21世纪统计学系列教材

应用随机过程

张 波 编著

民大学出版社

21世纪统计学系列教材

应用随机过程

张　波　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用随机过程/张波编著
北京:中国人民大学出版社,2001
21世纪统计学系列教材

ISBN 7-300-03769-0/F·1133
Ⅰ.应…
Ⅱ.张…
Ⅲ.随机过程-高等学校-教材
Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第18064号

21世纪统计学系列教材
应用随机过程
张波 编著

出版发行:中国人民大学出版社
(北京中关村大街31号 邮编100080)
邮购部:62515351 门市部:62514148
总编室:62511242 出版部:62511239
E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经 销:新华书店
印 刷:三河市新世纪印刷厂

开本:787×980毫米 1/16 印张:11
2001年5月第1版 2001年5月第1次印刷
字数:199 000

定价:14.00元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

总　序

改革开放以来，高等统计教育有了很大的发展。随着课程设置的不断调整，有不少教材出版，同时也翻译引进了一些国外优秀教材。作为培养我国统计专门人才的摇篮，中国人民大学统计学系自1952年创建以来，走过了风风雨雨，一直坚持着理论与应用相结合的办学方向，培养能够理论联系实际、解决实际问题的高层次人才。随着新知识经济和网络时代的到来，我们在教学科研的实践中，深切地感受到，无论是自然科学领域、社会科学领域的研究，还是国家宏观管理和企业生产经营管理，甚至人们的日常生活，信息需求量日益增多，信息处理技术更加复杂，作为信息技术支柱的统计方法，越来越广泛地应用于各个领域。

面对新的形势，我们一直在思索，课程设置、教材选择、教学方式等怎样才能使学生适应社会经济发展的客观需要。在反复酝酿、不断尝试的基础上，我们决定与统计学界的同仁，共同编写、出版一套面向21世纪的统计学系列教材。

这套系列教材聘请了中科院院士、中国科技大学陈希孺教授，上海财经大学数量经济研究院张尧庭教授，中国科学院数学与系统科学研究所冯士雍研究员等作为编委。他们长期任中国人民大学的兼职教授，一直关心、支持着统计学系的学科建设和应用统计的发展。中国人民大学应用统计科学研究中心2000年已成为国家级研究基地，这些专家是首批专职或兼职研究人员。这一开放性研究基地

的运作，将有利于提高我国应用统计科学研究的水平，也必将进一步促进高等统计教育的发展。

这套教材是我们奉献给新世纪的，希望它能促进应用统计教育水平的提高。这套教材力求体现以下特点：

第一，在教材选择上，主要面向经济类统计学专业。选材既包括统计教材也包括风险管理与精算方面的教材。尽管名为统计学系列教材，但并不求大、求全，而是力求精选。对于目前已有的内容较为成熟、适合教学需要、公认的较好的教材，并未列入本次出版计划。

第二，每部教材的内容和写作，注意广泛吸收国内外优秀教材的成果。教材力求简明易懂、内容系统和实用，注重对统计方法思想的阐述，并结合大量实际数据和实例说明统计方法的特点及应用条件。

第三，强调与计算机的结合。为着力提高学生运用统计方法分析解决问题的能力，教材所涉及的统计计算，要求运用目前已有的统计软件。根据教材内容，选择使用 SAS、SPSS、TSP、STATISTICA、EVievs、MINITAB、Excel 等。

感谢中国人民大学出版社的同志们，他们怀着发展我国应用统计科学的热情和提高统计教育水平的愿望，经过反复论证，使这套教材得以出版。感谢参与教材编写的同行专家、统计学系的教师。愿大家的辛勤劳动能够结出丰硕的果实。我们期待着与统计学界的同仁，共同创造应用统计辉煌的明天。

易丹辉

2000 年 8 月

于中国人民大学

前　言

近几十年来，由于实际的需要和数学工作者的努力，随机过程无论在理论上还是在应用上都有了蓬勃发展。它的基本知识和方法，不仅为数学、概率统计专业所必需，也为通信、控制、生物、社会科学及工程技术、经济领域的应用与研究所需要。因此，随机分析的方法越来越受到人们的重视，高等院校的学生、研究生、工程技术人员、金融工作者更要求学习和掌握随机过程的知识。本书正是为适应这种需求，根据近年来讲授这门课的教学实践所积累的资料，参考国内外有关著作编写而成的。由于随机过程这门学科发展十分迅速，其内容十分丰富，作为一本教科书，不可能包括其全部内容，因此，本书根据经济类统计学专业本科生教学的需要选择素材。为适应更广泛的读者，本书着重于随机过程的基本知识和基本方法的介绍，特别注重实际应用，尽量回避测度论水平的严格证明。只有第八章难以避免地用到稍多一点的测度论知识，这一章初学者可以不学，有测度论基础或对数理金融有兴趣的读者可以选学。一般读者只要具有高等数学及概率论的基础知识便可阅读和理解本书的大部分内容。本书各章都配有一些与社会、经济、管理以及生物等专业相关的例子和习题，以帮助学生加深对基本理论的理解，提高应用随机过程理论解决问题的能力。为了便于有兴趣的读者进一步学习，书后列出较多的参考书目。

全书可分为三个部分。第一部分（第一、二、三、五章）是预备知识和随机过程最基本的内容，一般教科书都包含这部分内容；第二部分是更新过程，这一内容在许多教科书中没有单独讨论，考虑到它在应用中的重要性，特别是在人口学和保险论中的应用，故将它放在第四章讲授；其余为第三部分，鉴于在经济和金融方面应用的需要，分别介绍鞅、布朗（Brown）运动与随机积分及其应用。

笔者得以完成本书，首先要感谢易丹辉、顾岚教授等许多同仁的鼓励、支持和帮助。特别是张尧庭教授、易丹辉教授和顾岚教授在百忙之中审阅了初稿并提出了许多宝贵意见，帮助我纠正了一些不妥之处。张景肖同学参与了部分章节的编写工作，并且验算了书中的全部习题。在此致以深切的谢意！同时也要感谢中国人民大学统计学系，使得笔者有机会在教学实践中完成本书的写作和修改。由于编者水平所限，书中的错误、缺点在所难免，敬请读者批评指正。

目 录

第一章

准 备 知 识

随机过程通常被视为概率论的动态部分。在概率论中研究的随机现象,都是在概率空间(Ω,F,P)上的一个或有限多个随机变量的规律性。涉及中心极限定理时也不过是随机变量序列的讨论。在实际问题中,我们还需要研究一些随机现象的发展和变化过程,即随时间不断变化的随机变量,而且,所涉及的随机变量通常是无限多个(甚至有时与时间一样多, 因而是不可数的)。我们首先对在本书经常用到的概率论基本知识和基本概念作简要的回顾。

第一节　概率空间

随机试验是概率论的基本概念,试验的结果事先不能准确地预言, 但具有如下三个特性:

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的结果不止一个,但预先知道试验的所有可能的结果;

(3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现。

随机试验所有可能结果组成的集合称为这个试验的**样本空间**,记为Ω。Ω中的

元素 ω 称为**样本点**或**基本事件**,Ω 的子集 A 称为**事件**,样本空间称为**必然事件**,空集 $\varnothing$ 称为**不可能事件**。

在实际问题中,人们通常不是对所有的事件(样本空间的所有子集)都感兴趣,而只关心某些事件及其发生的可能性的大小。我们用下面的概念来刻画这种事件。

定义 1.1.1 设 Ω 是一个集合,F 是 Ω 的某些子集组成的集合族。如果满足:

(1)$\Omega \in F$;

(2) 若 $A \in F$,则 $\bar{A} = \Omega \setminus A \in F$;

(3) 若 $A_n \in F,\ n = 1,2,\cdots$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in F$;

则称 F 为σ- 代数。(Ω,F) 称为**可测空间**,F 中的元素称为**事件**。

如果 F 是事件的σ- 代数,则:

(1)$\varnothing \in F$;

(2) 当 $A_n \in F, n \geqslant 1,\ \bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n \in F$。

定义 1.1.2 设 $\Omega = \mathbf{R}$。由所有半无限区间$(-\infty,x)$生成的 σ- 代数(即包含集族$\{(-\infty,x),x \in \mathbf{R}\}$的最小 σ- 代数)称为 $\mathbf{R}$ 上的**波莱尔**(Borel)**σ- 代数**。记为 $\beta(\mathbf{R})$,其中的元素称为波莱尔集合。类似地可定义 $\mathbf{R}^n$ 上的**波莱尔σ- 代数**$\beta(\mathbf{R}^n)$。

定义 1.1.3 设(Ω,F)是可测空间,$P(\cdot)$ 是定义在 F 上的实值函数。如果

(1) 任意 $A \in F, 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2)$P(\Omega) = 1$;

(3) 对两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots$(即当 $i \neq j$ 时,$A_i \cap A_j = \varnothing$)有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 P 是(Ω,F)上的**概率**,(Ω,F,P) 称为**概率空间**,$P(A)$ 称为事件 A 的概率。

由定义易见事件的概率有如下性质:

(1) 若 $A,B \in F$ 则 $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$。

(2) 若 $A,B \in F$ 且 $A \subset B$,则 $P(A) \leqslant P(B)$ (单调性)。

(3) 若 $A,B \in F$ 且 $A \subset B$,则 $P(B - A) = P(A) - P(B)$。

(4) 若 $A_n \in F, n \geqslant 1$,则 $P\{\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n\} \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1} P(A_n)$。

(5) 若 $A_n \in F$ 且 $A_n \uparrow A$,即,$A_n \subset A_{n+1}, n \geqslant 1$,且 $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n = A$,则

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)\text{(下连续)}$$

(6) 若 $A_n \in A$ 且 $A_n \downarrow A$,即,$A_{n+1} \subset A_n, n \geqslant 1$ 且 $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n = A$ 则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)(\text{上连续})$$

如果概率空间(Ω,F,P)的P-零集(即零概率事件)的每个子集仍为事件,则称为**完备的概率空间**。为了避免P-零集的子集不是事件的情形出现,我们把概率测度完备化。令N代表Ω的所有P-零集的子集的全体。由$\{F,N\}$生成的σ-代数(即包含F和N的最小σ-代数)称为F的完备化,记为$\bar{F}$。$\bar{F}$中的每个集合B都可以表示为$B=A\cup N$,其中$A\in F,N\in F$,且$A\cap N=\varnothing$.定义

$$\bar{P}(B)=\bar{P}(A\cup N)=P(A)$$

则P就被扩张到$\bar{F}$。

容易验证$\bar{P}$是$\bar{F}$上的概率测度。集函数$\bar{P}$称为P的完备化。本书总假定P是完备的概率测度。

定义 1.1.4 设$A_n\in F,n\geqslant 1$。所有属于无限多个集合A_n的ω的集合称为集列A_n的**上极限**,记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$。可以证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$$

有时也记为$\{A_n,i.o.\}$。集列A_n的**下极限**定义为

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{\omega\in\Omega:\exists n_0;\ \forall n>n_0;\omega\in A_n\}$$

容易证明

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n$$

下面看一个例子。

例 1.1.1 设有某人在反复地投掷硬币,观察硬币朝上的是正面或反面。$\Omega=$\{所有由投掷结果“正面”和“反面”组成的序列\},$F=\{\Omega$的所有子集$\}$,记A_n为第n次投掷的是“正面”的事件,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{\text{有无限多个投掷结果是“正面”}\}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{\text{除有限多个外,投掷结果都是“正面”}\}$$

第二节 随机变量和分布函数

定义 1.2.1 设(Ω,F,P)是(完备的)概率空间,X是定义在Ω、取值于实数集$\mathbf{R}$的函数,如果对任意实数$x\in\mathbf{R}$,$\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}\in F$,则称$X(\omega)$是$F$上的**随机变量**,简称为随机变量。称

$$F(x)=P\{\omega:X(\omega)\leqslant x\},-\infty<x<\infty$$

为随机变量 X 的**分布函数**。

注:在上面的定义中,如果 X 是广义实值函数,即 X 可以取 ∞ 值,则需要加上条件:X 是几乎处处有限的,即 $P\{\omega: |X(\omega)| = \infty\} = 0$。否则会出现按上面定义的分布函数是假分布的情况。

定义 1.2.2 两个随机变量 X 与 Y,如果满足 $P\{\omega \in \Omega: X(\omega) \neq Y(\omega)\} = 0$。则称它们是**等价的**。

对于两个等价的随机变量,我们视为同一。

定理 1.2.1 下列命题等价:

(1) X 是随机变量;

(2) $\{\omega: X(\omega) \geqslant a\} \in F, \forall a \in \mathbf{R}$;

(3) $\{\omega: X(\omega) > a\} \in F, \forall a \in \mathbf{R}$;

(4) $\{\omega: X(\omega) < a\} \in F, \forall a \in \mathbf{R}$。

为简单起见,习惯上将 $\{\omega: X(\omega) \geqslant a\}$ 记为 $\{X \geqslant a\}$。

定理 1.2.2

(1) 若 X, Y 是随机变量,则 $\{X < Y\}, \{X \leqslant Y\}, \{X = Y\}$,及 $\{X \neq Y\}$ 都属于 F;

(2) 若 X, Y 是随机变量,则 $X \pm Y$ 与 XY 亦然;

(3) 若 $\{X_n\}$ 是随机变量序列,则 $\sup\limits_n X_n, \inf\limits_n X_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$ 都是随机变量。

映射 $X: \Omega \to \mathbf{R}^d$,表示为 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_d)$,若对所有的 $k, 1 \leqslant k \leqslant d, X_k$ 都是随机变量,则称 $\mathbf{X}$ 为随机向量。

复值随机变量 Z 定义为两个实值随机变量 X 和 Y 的线性组合 $X + \mathrm{i}Y$。

给定随机变量 X,可以生成 Ω 上的 σ- 代数,即包含所有形如 $\{X \leqslant a\}, a \in \mathbf{R}$ 的最小 σ- 代数,记为 $\sigma(X)$。类似地可定义由随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 生成的 σ- 代数 $\sigma(X_1, \cdots, X_n)$。

在实际应用中,常见的随机变量有两种类型:离散型随机变量和连续型随机变量。

离散型随机变量 X 的概率分布用分布列描述

$$p_k = P\{X = x_k\}, k = 1, 2, \cdots$$

其分布函数

$$F(x) = \sum_{x_k \leqslant x} p_k$$

连续型随机变量 X 的概率分布用概率密度 $f(x)$ 描述,其分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

对于随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1,\cdots,X_d)$，它的（$d$ 维）分布函数（或联合分布函数）定义为

$$F(x_1,\cdots,x_d) = P\{X_1 \leqslant x_1,\cdots,X_d \leqslant x_d\}$$

这里 $d \geqslant 1, x_k \in \mathbf{R}, 1 \leqslant k \leqslant d$。

定理 1.2.3 若 $F(x_1,\cdots,x_d)$ 是联合分布函数，则

(1) $F(x_1,\cdots,x_d)$ 对每个变量都是单调的，

(2) $F(x_1,\cdots,x_d)$ 对每个变量都是右连续的，

(3) 对 $i = 1,2,\cdots,d$

$$\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_d) = 0,$$

$$\lim_{x_1,\cdots,x_n \to \infty} F(x_1,\cdots,x_d) = 1$$

如果 $f(x_1,\cdots,x_d) = \left(\frac{\partial^d F}{\partial x_1 \cdots \partial x_d}\right)$ 对所有的 $(x_1,\cdots,x_d) \in \mathbf{R}^d$ 存在，则称函数 $f(x_1,\cdots,x_d)$ 为 $F(x_1,\cdots,x_d)$ 或 $\boldsymbol{X} = (X_1,\cdots,X_d)$ 的**联合密度函数**，并且

$$F(x_1,\cdots,x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,\cdots,t_d)\mathrm{d}t_n \cdots \mathrm{d}t_1$$

设 $F(x_1,\cdots,x_d)$ 为 $X_1,\cdots,X_d$ 的联合分布函数，$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n \leqslant d$，则 $X_1,\cdots,X_d$ 的**边际分布** $F_{k_1,\cdots,k_n}(x_{k_1},\cdots,x_{k_n})$ 定义为

$$F(x_{k_1},\cdots,x_{k_n}) = F(\infty,\cdots,\infty,x_{k_1},\infty,\cdots,\infty,x_{k_2},\infty,\cdots,\infty,x_{k_n},\infty,\cdots,\infty)$$

下面是一些常见的分布。

1. 离散均匀分布：如果

$$p_k = \frac{1}{n}, k = 1,2,\cdots,n,$$

则称之为离散均匀分布密度。

2. 二项分布：对固定的 n 和 $0 \leqslant p \leqslant 1$，如果

$$p_k = \binom{n}{k}$$

则称之为以 n 和 p 为参数的二项分布密度。

3. 几何分布：如果 $\{p_k\}, k \geqslant 0$ 可表示为

$$p_k = pq^{k-1}, k \geqslant 1$$

其中 $p + q = 1$，则称之为几何分布密度。

4. 泊松(Poisson)分布：如果分布 $\{p_k\}, k \geqslant 0$ 可表示为

$$p_k = e^{-\lambda}\lambda^k / k!, k = 0,1,\cdots$$

则称之为参数为 $\lambda > 0$ 的泊松分布密度。

5. 连续的均匀分布(简称为均匀分布):如果密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} [b-a]^{-1}, & \text{如果 } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{,其他} \end{cases}$$

其中 $a < b$,则称之为区间 $[a,b]$ 上的均匀分布密度。

6. 正态分布:如果密度函数为

$$f(x) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \cdot \exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2], x \in \mathbf{R}$$

则称之为参数为 μ 和 σ^2 的正态分布密度,也称为高斯(Gauss)分布密度。若随机变量 X 服从正态分布,则记为 $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$。

7. Γ 分布:如果密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} [\lambda/\Gamma(\alpha+1)](\lambda x)^\alpha e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & , x \leqslant 0 \end{cases}$$

则称之为以 $\alpha > -1, \lambda > 0$ 为参数的 Γ 分布密度,这里 Γ 函数定义为

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy, x > 0$$

8. 指数分布:如果在 Γ 分布中令 $\alpha = 0, \lambda > 0$,即密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & , x \leqslant 0 \end{cases}$$

则称之为指数分布密度。

9. χ 方分布:如果在 Γ 分布中取 $\alpha = (n-2)/2$,n 是正整数,并且 $\lambda > \frac{1}{2}$,则

$$f(x) = [2^{n/2}\Gamma(n/2)]^{-1} x^{(n-2)/2} e^{-x/2}, x > 0$$

称为自由度是 n 的 χ 方分布密度。

10. d 维正态分布:设 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\cdots,\mu_d)$,$\boldsymbol{\Sigma}$ 是 d 阶正定对称阵,并且其行列式为 $|\boldsymbol{\Sigma}|$,如果联合密度函数为

$$f(x_1,\cdots,x_d) = (2\pi)^{-d/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})]$$

则称之为 d 维正态分布密度。若随机变量 X 服从 d 维正态分布,则记为 $X \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$。

第三节　数字特征,矩母函数与特征函数

随机变量完全由它的概率分布(函数)描述。而确定其分布函数一般说来是相