创新与应用题演练

5555

初三代数

5元教辅

5元

WUYUANJIAOFU

北方妇女儿童出版社

创新与应用题演练

初三代数

5 元教辅

5元

WUYUANJIAOFU

Strong

思创图书工作室 策划
王 磊 主编
北方妇女儿童出版社 出版

主　编　王　磊
作　者　王　磊　李　杰　齐　丽

图书在版编目（CIP）数据

创新与应用题演练．初三代数／王磊主编．—长春：北方妇女儿童出版社，2001.11
（五元教辅）
ISBN 7-5385-1964-5

Ⅰ.创...　Ⅱ.王...　Ⅲ.理科(教育)—课程—中学—教学参考资料　Ⅳ.G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 073877 号

创新与应用题演练·初三代数

主　　编　王　磊
责任编辑　王振营
出 版 者　北方妇女儿童出版社
发 行 者　北方妇女儿童出版社文教图书发展中心
地　　址　长春市人民大街 124 号出版大厦 11 层
电　　话　0431-5678573
印　　刷
开　　本　1/32 850×1168(毫米)
印　　张　4.5

2001 年 11 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN 7-5385-1964-5/G·1186
定价:5.00 元

出版说明

本丛书是专门为中小学生设计的。

全套丛书均取材于中小学生们感兴趣的、考试中分值较高而学生们又不易掌握的内容。每册书内容集中,实时性强,易掌握。因此,本丛书体例广泛,不局限于某一种单一的编写体例。同时,本丛书体现着一个基本原则:只要是学生们感兴趣的,考试中出现的,能提高学习能力和素质的,就是我们要推出的。

这是一套开放的、创新的丛书,我们的体例和体系具备了一个"新陈代谢"、"源源不断"的机制。继首批推出 26 种,受到广大读者的欢迎后,本次推出的 24 种,同样是经过我们和专家精选的作品,至今汇成的 50 股涓涓的源头之水,仍会不停地流淌,仍将不断加入新的细流。

和我们的产品一样,我们是一个年轻、开放、创新的集体,我们将听取来自方方面面的、对我们、对我们的图书具有积极意义的建议和意见,以使我们和你们共同成长壮大,为丛书的使用者、经营者带来惊喜。

思创图书

目　录

第一章　一元二次方程

第一单元　一元二次方程

一、创新思维与灵活应用

（一）一元二次方程的意义及解法的创新与应用

典例精析 1　试比较下列两个方程的异同

$$x^2+2x-3=0,\ x^2+2x+3=0$$

方法导引与解答　1. 两个方程的相同点：

(1)都是一元二次方程；

(2)都已经化为一元二次方程的一般形式；

(3)二次项系数相同，均为 1；

(4)一次项系数相同，均为 2；

(5)常数项的绝对值相等，均为 3；

(6)都是整系数的一元二次方程，等等

2. 两个方程的不同点：

(1)常数项的符号相反；

(2)判断式不等；

(3)前者有实数根，后者没有实数根；

(4)考虑两个方程的左边，前者可分解为两个因式的乘积，即$(x-1)(x+3)$，而后者不能分解（在实数范围内），等等．

典例精析 2　用三种方法解方程 $2x^2-7x-4=0$

方法导引　对于数字系数的一元二次方程，最简便的解法是因式分解法．使用因式分解法的条件是：方程一边为空，另一边能分解为两个一次因式的积，当用因式分解法难度较大时，就用公式法，它是解一元二次方程万能的方法．最不方便的方法是

配方法，实质上也是开平方法，虽在解方程时很少用它，但配方法在理论上十分重要，并且还是公式法的基础，不可忽视. 因此，要解一元二次方程就要同时掌握这三种方法.

解法一：(配方法)

移项，得 $2x^2-7x=4$

把方程的各项都除以 2，得 $x^2-\frac{7}{2}x=2$. 配方，得

$x^2-\frac{7}{2}x+(-\frac{7}{4})^2=2+(-\frac{7}{4})^2$

$(x-\frac{7}{4})^2=\frac{81}{16}$，解这个方程，得 $x-\frac{7}{4}=\pm\frac{9}{4}$

即 $x_1=4$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

解法二：(公式法)

$\because a=2,\ b=-7,\ c=-4,$

$b^2-4ac=(-7)^2-4\times2\times(-4)=81>0$

$\therefore\ x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{81}}{2\times2}=\frac{7\pm9}{4},$

$\therefore\ x_1=4,\ x_2=-\frac{1}{2}$

解法三：(因式分解法)

原方程可变形为：$(2x+1)(x-4)=0$

$2x+1=0$，或 $x-4=0$

$\therefore\ x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=4$

解后评注　一题多解可以开拓解题的思路，但在解的过程中应该找出最佳的解题方法.

(二)一元二次方程的根的判别式、根与系数关系的创新与应用

典例精析 3　m 为何值时，关于 x 的方程 $mx^2-2x+3=0$ 有实根.

方法导引　由于"解关于 x 的方程"与"解关于 x 的二次方程"是不同的，此题中 x^2 的系数为字母 m，故解答时应分为 $m=0$ 与 $m\neq0$ 两种情况进行探讨.

解：当 $m=0$ 时，原方程变为 $-2x+3=0$，此时，原方程有实根 $x=\frac{3}{2}$

当 $m\neq 0$ 时，$mx^2-2x+3=0$ 是一元二次方程

$\Delta=(-2)^2-4m\times 3=4-12m$

若要方程有实数根，须 $\Delta\geqslant 0$，即 $4-12m\geqslant 0$，解得 $m\leqslant\frac{1}{3}$

当 $m\leqslant\frac{1}{3}$ 时，原方程有实数根．

解后评注 根据根的情况，确定系数中字母的取值范围的步骤：

(1)化方程为一般形式；

(2)把判别式 Δ 用含有字母系数的代数式表示；

(3)根据根的情况列不等式或方程；

(4)解不等式或方程即会得出所求．

典例精析 4 已知方程 $x^2+kx+\sqrt{2}=0$ 的一个根是 -1，求 k 的值及另一根．

方法导引 本题有两种常见的解法，都很有特色：

一种是：由根与系数关系设方程的另一个根为 x_1，则由两根之和、两根之积的关系，得出两个关于 x_1 及 k 的方程，解这个方程组求出 x_1 及 k 的值．另一种方法是：由 -1 是原方程的根，把 $x=-1$ 代入原方程，则可求出 k 的值．进而求出方程的根．

解法 1：设方程的另一个根是 x_1，由根与系数的关系可知：

$$\begin{cases}-1+x_1=-k\\-1\cdot x_1=\sqrt{2}\end{cases},\therefore x_1=-\sqrt{2},k=\sqrt{2}+1.$$

解法 2：$\because -1$ 是方程的一个根，则

$(-1)^2-k+\sqrt{2}=0,k=\sqrt{2}+1$

$\therefore x^2+(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$，$(x+\sqrt{2})(x+1)=0$，$x_1=-1$，$x_2=-\sqrt{2}$

$\therefore k$ 的值为 $\sqrt{2}+1$，方程的另一个根为 $-\sqrt{2}$．

典例精析 5 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根和为 S_1，平方和为 S_2，立方和为 S_3，求 $aS_3+bS_2+cS_1$ 的值．

方法导引 若方程的两根为 x_1、x_2，则解题的思路有如下两条：一是在方程中构

造 $x_1+x_2, x_1^2+x_2^2, x_1^3+x_2^3$ 这样三个关系．另一个是先求出 $x_1+x_2, x_1^2+x_2^2, x_1^3+x_2^3$ 的值．

解法 1：设方程的两根为 x_1、x_2，则由方程根的定义有：

$ax_1^2+bx_1+c=0$ ①

$ax_2^2+bx_2+c=0$ ②

①$\times x_1$，得 $ax_1^3+bx_1^2+cx_1=0$ ③

②$\times x_2$，得 $ax_2^3+bx_2^2+cx_2=0$ ④

③+④，得 $a(x_1^3+x_2^3)+b(x_1^2+x_2^2)+c(x_1+x_2)=0$

即 $aS_3+bS_2+cS_1=0$

解法 2：设方程两根为 x_1、x_2，则由根与系数关系有：

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，

于上有 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-\frac{b}{a})^2-2(\frac{c}{a})=\frac{b^2-2ac}{a^2}$

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]=(-\frac{b}{a})[(-\frac{b}{a})^3-3\cdot\frac{c}{a}]=-\frac{b(b^2-3ac)}{a^3}$

$\therefore\ as_3+bs_2+cs_1=a\times[-\frac{b(b^2-3ac)}{a^3}]+b\times\frac{b^2-2ac}{a^2}+c\times(-\frac{b}{a})=$

$\frac{-b(b^2-3ac)+b(b^2-2ac)-abc}{a^2}=\frac{-b^3+3abc+b^3-2abc-abc}{a^2}=0$

典例精析 6 已知方程 $x^2+2x=k-1$ 无实根，求证方程 $x^2+kx=1-2k$ 一定有两个不相等的实数根

方法导引 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 是判断一元二次方程根的情况的重要依据．

当 $b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根．

因此，本题的条件 $x^2+2x=k-1$ 无实数根，就是说 $b^2-4ac<0$，这样就可以求出 k 的范围．注意在使用判别式时，要把方程化为一般形式，求出 k 的取值范围后，要证 $x^2+kx=1-2k$ 一定有两个不相等的实数根，那么再证这个方程的判别式一定大于零就可以了．

解:方程 $x^2+2x=k-1$ 可化为 $x^2+2x+1-k=0$,由方程无实根,则 $\Delta_1=2^2-4(-k+1)<0$,$\therefore k<0$

而方程 $x^2+kx=1-2k$ 可化为 $x^2+kx+2k-1=0$,则 $\Delta_2=k^2-4(2k-1)=k^2-8k+4$

当 $k<0$ 时 $k^2>0$,$-8k>0$,$\therefore k^2-8k+4>0$,即 $\Delta_2>0$

$\therefore$ 方程 $x^2+kx=1-2k$ 一定有两个不相等的实根

典例精析 7 已知关于 x 的方程 $x^2+3x-m=0$①的两个实数根的平方和等于11,求证:关于 x 的方程 $(k-3)x^2+kmx-m^2+6m-4=0$②有实数根.

方法导引 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实根为 x_1、x_2,则必满足如下三个条件:

(1)有两个实根,则 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$

(2)$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$;(3)$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

本题中还有一个条件就是两个实数根的平方和等于11,则 ${x_1}^2+{x_2}^2=11$.

由上述关系就能求出 m 的值,从而可以化简要证的方程,再去证明这个方程的判别式大于等于零就可以了.

解:设方程①$x^2+3x-m=0$ 的两个实数根是 x_1、x_2 根据题意,得

$$\begin{cases}\Delta_1=9+4m\geqslant 0\\ x_1+x_2=-3\\ x_1x_2=-m\\ {x_1}^2+{x_2}^2=11\end{cases}\quad 解得\begin{cases}m\geqslant -\dfrac{9}{4}\\ m=1\end{cases},\ \therefore m=1$$

把 $m=1$ 代入方程②$(k-3)x^2+kmx-m^2+6m-4=0$ 中,得

$(k-3)x^2+kx+1=0$, 当 $k-3=0$,即 $k=3$ 时,方程②是一元一次方程

$\therefore m=1$ 且 $k=3$ 时方程②有实数根,$x=-\dfrac{1}{3}$

当 $k-3\neq 0$,即 $k\neq 3$ 时,方程②是一元二次方程

$\because \Delta_2=k^2-4(k-3)=(k-2)^2+8>0$

$\therefore$ 当 $m=1$ 且 $k\neq 3$ 时,方程②有两个不相等的实数根

综上所述,当方程①的两个实数根的平方和等于11时,方程②有实数根.

典例精析 8 当 m 是什么值时,关于 x 的方程 $x^2-4x+3m+1=0$ 有两个不相

等的正实数根?

方法导引 (1)当$\Delta=b^2-4ac>0$,且$\frac{c}{a}>0$,$-\frac{b}{a}>0$时方程$ax^2+bx+c=0$的两根都是正数.

(2)当$\Delta=b^2-4ac>0$,且$\frac{c}{a}>0$,$-\frac{b}{a}<0$时,方程$ax^2+bx+c=0$的两根都是负数.

(3)当$\frac{c}{a}<0$时,方程$ax^2+bx+c=0$的两根异号

(4)当$\frac{c}{a}<0$,$-\frac{b}{a}>0$时,方程$ax^2+bx+c=0$的两根异号且正根的绝对值较大

(5)当$\frac{c}{a}<0$,$-\frac{b}{a}>0$时,方程$ax^2+bx+c=0$的两根异号且负根的绝对值较大

(6)当$c=0$时,方程$ax^2+bx+c=0$有一个根为0

(7)当$a+b+c=0$时,方程$ax^2+bx+c=0$有一个根为1

(8)当$a-b+c=0$时,方程$ax^2+bx+c=0$有一个根为-1.

解:设方程的两实根为x_1、x_2

$$\therefore\begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0\\x_1x_2=\frac{c}{a}>0\end{cases}\quad 即\begin{cases}(-4)^2-4(3m-1)>0\\4>0\\3m+1>0\end{cases}$$

$$解得\begin{cases}m<1\\m>-\frac{1}{3}\end{cases}\quad 即-\frac{1}{3}<m<1$$

$\therefore$当$-\frac{1}{3}<m<1$时,原方程有两个不相等的正实根.

典例精析9 已知方程$x^2-2ax+a^2+a-1=0$有两个实数根,化简$\sqrt{a^2-2a+1}+|2+a|$

方法导引 题目的条件是:方程有两个实数根,这就是说$\Delta\geqslant0$,从而可以确定a的取值范围,而$\sqrt{a^2-2a+1}=\sqrt{(a-1)^2}$进一步化简时,需要讨论$a$的范围,显然$a-1\geqslant0$时,$\sqrt{(a-1)^2}=a-1$,$a-1<0$时$\sqrt{(a-1)^2}=1-a$ 对于$|2+a|$的讨论也是如此,$2+a\geqslant0$,则$|2+a|=2+a$,$2+a<0$则$|2+a|=-2-a$

这样的题目需要开放思维，联想各个知识点，认真讨论每一个必要的环节，得出正确的答案．

解：∵方程 $x^2-2ax+a^2+a-1=0$ 有两个实数根，

∴$\Delta=(-2a)^2-4(a^2+a-1)=-4a+4\geqslant 0$，∴$a\leqslant 1$

当 $a\leqslant -2$ 时，$\sqrt{a^2-2a+1}+|2+a|=\sqrt{(a-1)^2}+|2+a|=1-a-2-a=-2a-1$，当 $-2<a\leqslant 1$ 时 $\sqrt{a^2-2a+1}+|2+a|=\sqrt{(a-1)^2}+|2+a|=1-a+2+a=3$

解后评注　用字母表示数之后，注意字母的取值范围是很重要的，从本题的解题过程可以看出，字母在不同的范围内取值时，所得结果不同．因此，必须研究字母的取值范围才能准确解题．

典例精析 10　已知方程 $(x-1)(x-2)=k^2$，k 为实数，且 $k\neq 0$，不解方程

证明：(1)这个方程有两个不相等的实数根；

(2)这两个根一个大于 1，另一个小于 1.

方法导引　(1)显然是去证明判别式的值大于 0，可先把方程化为一般形式，再通过计算判别式的值得出结论．

(2)要证明两个根一个大于 1，另一个小于 1，按常规方法比较困难．若 α、β 是两个不等的实根，不妨设 $\alpha>1$，$\beta<1$，则 $\alpha-1>0$，$\beta-1<0$. 从而 $(\alpha-1)(\beta-1)<0$，从这一思路可以设法证．

$(\alpha-1)(\beta-1)<0$，就可说明 $\alpha-1$、$\beta-1$ 异号，也就是 α、β 中一个大于 1，另一个小于 1.

这一证明方法有一定难度，也体现了思维的灵活性．

解：(1)原方程整理，得 $x^2-3x+2-k^2=0$

∵$\Delta=(-3)^2-4(2-k^2)=9-8+4k^2=1+4k^2>0$

∴原方程有两个不等的实根．

(2)设原方程的两个不等实根分别为 α、β，则

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=2-k^2-3+1=-k^2$

∵$k\neq 0$，∴$-k^2<0$，即 $(\alpha-1)(\beta-1)<0$

∴$\alpha-1$ 与 $\beta-1$ 异号，

∴原方程的一个根大于 1，另一个根小于 1.

解后评注 若有一个实数 a，要证方程的两个实数根 α、β 一个大于 a，另一个小于 a，则只要证 $(\alpha-a)(\beta-a)<0$ 就可以了.

典例精析 11 若 a、b、c、$d>0$，证明：在方程①$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2a+b}x+\sqrt{cd}=0$. ②$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2b+c}x+\sqrt{ad}=0$. ③$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2c+d}x+\sqrt{ab}=0$. ④$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2d+a}x+\sqrt{bc}=0$ 中，至少有两个方程有不相等的实数根.

方法导引 要证明四个方程至少有两个方程有不相等的实数根可先分别求出四个方程的判别式，且这四个方程的判别式形式上都比较复杂，但不易判断判别式的值是否大于 0.

根据四个判别式的特点，可以求其中两个判别式的和，当和大于 0 时，这两个判别式至少有一个大于零，这一思路为解此题打开通路.

解：设这四个方程的判别式分别为 Δ_1、Δ_2、Δ_3、Δ_4，则

$$\Delta_1=(\sqrt{2a+b})^2-4\times\frac{1}{2}\sqrt{cd}=2a+b-2\sqrt{cd} \quad ①$$

$$\Delta_2=(\sqrt{2b+c})^2-4\times\frac{1}{2}\sqrt{ad}=2b+c-2\sqrt{ad} \quad ②$$

$$\Delta_3=(\sqrt{2c+d})^2-4\times\frac{1}{2}\sqrt{ab}=2c+d-2\sqrt{ab} \quad ③$$

$$\Delta_4=(\sqrt{2d+a})^2-4\times\frac{1}{2}\sqrt{bc}=2d+a-2\sqrt{bc} \quad ④$$

而 $\Delta_1+\Delta_3=2a+b-2\sqrt{cd}+2c+d-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2+a+c>0$ ⑤

$\Delta_2+\Delta_4=2b+c-2\sqrt{ad}+2d+a-2\sqrt{bc}=(\sqrt{a}-\sqrt{d})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+b+d>0$ ⑥

若 $\Delta_1\leqslant0$，$\Delta_3\leqslant0$，则 $\Delta_1+\Delta_3\leqslant0$，与⑤式矛盾，故 Δ_1、Δ_3 中至少有一个大于零. 同理，由⑥可知：Δ_2、Δ_4 中至少有一个大于零，故 Δ_1、Δ_2、Δ_3、Δ_4 中至少有两个大于零，即所给的四个方程中至少有两个方程有不相等的实数根.

解后评注 本题中"由两数之和大于零，则其中至少有一个数大于零"，这种判断方法是十分重要的，也是十分新颖的，这种思考方法可以拓宽解题思路.

典例精析 12 已知:关于 x 的方程 $x^2+bx+4b=0$ 有两个相等实根,y_1、y_2 是关于 y 的方程 $y^2+(2-b)y+4=0$ 的两实根,求以 $\sqrt{y_1}$、$\sqrt{y_2}$ 为根的一元二次方程.

方法导引 此题为有关根的判别式和根与系数关系的知识的综合运用题,关于 x 的方程有两个相等的实根,则其判别式 Δ 的值化为 0,由此求出字母系数 b 的值,将其值代入关于 y 的方程,则得到一个关于 y 的数字系数的一元二次方程,然后利用根与系数的关系求出其两根的和与差,进而求出 $\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}$,$\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}$ 的值,再代入公式 $x^2-(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2})x+\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}=0$ 即可求出所作的一元二次方程.

解:∵方程 $x^2+bx+4b=0$ 有相等实数根,∴$\Delta=b^2-16b=0$,∴$b=0$ 或 $b=16$

当 $b=0$ 时,$y^2+2y+4=0$,此时 $\Delta=2^2-4\times1\times4=4-16<0$,方程无实根

当 $b=16$ 时,$y^2-14y+4=0$

∴ $y_1+y_2=14$,$y_1\cdot y_2=4$,又∵ $\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}=\sqrt{(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2})^2}=\sqrt{y_1+y_2+2\sqrt{y_1y_2}}=\sqrt{14+2\sqrt{4}}=3\sqrt{2}$ $\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}=\sqrt{y_1y_2}=2$

∴以 $\sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}$ 为根的一元二次方程是 $x^2-3\sqrt{2}x+2=0$

典例精析 13 已知:方程 $2x^2-5mx+3n=0$ 两根之比是 2∶3,而方程 $x^2-2nx+8m=0$ 的两根相等(m、n 是不为零的实数)

求证:k 为任何实数时,方程 $mx^2+(n+k-1)x+(k+1)=0$ 恒有实数根

方法导引 已知的两个方程中都含有字母 m、n,而求证的方程中也含有字母 m、n,这样,只要设法求出 m、n 的值,或者它们之间的某种联系,但可能使问题得到解决

解:由方程 $2x^2-5mx+3n=0$ 的两根之比是 2∶3,可分别设方程的两根为 2α 和 3α

则 $\begin{cases}2\alpha+3\alpha=\dfrac{5}{2}m\\ 2\alpha\cdot3\alpha=\dfrac{3}{2}n\end{cases}$ 不难求出 m 与 n 之间的某种关系

再由方程 $x^2-2nx+8m=0$ 的两根相等,可得 $\Delta=0$,即

$(-2n)^2-4\times8m=0$,又找到了 m、n 之间的某种关系

于是,m、n 必可求出.再把 m、n 的值代入到求证的结论中去,可设法证明 Δ

$\geqslant 0$，问题便可得证．

证明：设方程 $2x^2-5mx+3n=0$ 的两根为 2α、3α

由根与系数的关系，得

$$\begin{cases} 2\alpha+3\alpha=\dfrac{5}{2}m & ① \\ 2\alpha\cdot 3\alpha=\dfrac{3}{2}n & ② \end{cases}$$

由①，得 $\alpha=\dfrac{m}{2}$，由②，得 $\alpha^2=\dfrac{n^2}{4}$

$\therefore (\dfrac{m}{2})^2=\dfrac{n}{4}$　即 $m^2=n$　③

$\because$ 方程 $x^2-2nx+8m=0$ 的两根相等．

$\therefore \Delta=(-2n)^2-4\times1\times8m=0$　即 $n^2=8m$　④

把③代入④，得 $m^4=8m$

$\because m\neq 0$

$\therefore m^3-8=0$，即 $(m-2)(m^2+2m+4)=0$

$\therefore m=2$　$\therefore n=m^2=4$

把 $m=2$，$n=4$ 代入要求证的方程中，得

$2x^2+(3+k)x+(k+1)=0$

$\because \Delta=(3+k)^2-4\times2\times(k+1)=k^2-2k+1=(k-1)^2\geqslant 0$

$\therefore$ 方程 $mx^2+(n+k-1)x+(k+1)=0$ 恒有实根

典例精析 14　设 a、b、c 为 ΔABC 的三边，求证方程 $b^2x^2-(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 无实根

方法导引　因为 a、b、c 是三角形的三边，a、b、c 均为正值，x^2 项的系数 $b^2\neq 0$，所以原方程是一元二次方程，欲证方程无实根，就要运用一元二次方程根的判别式的知识，经过整式的变形，联系到平面几何知识：三角形两边之和大于第三边，又回到判断一元二次方程是否有实根上来．

解：证明：$\because a$、b、c 是 ΔABC 的三边

$$\begin{aligned}\therefore \Delta &=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2\\ &=(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)\\ &=[(b+c)^2-a^2][(b-c)^2-a^2]\end{aligned}$$

$=(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(b-c-a)$

$\because a+b+c>0, b+c-a>0, a+b-c>0, b-c-a<0$

$\therefore \Delta<0$，故方程 $b^2x^2-(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 无实数根

典例精析 15 先阅读下列第(1)题的解答过程，然后再解答第(2)题

(1)已知实数 a、b 满足 $a^2=2-2a$，$b^2=2-2b$，且 $a\neq b$，求 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ 的值．

解法 1：由已知得 $a^2+2a-2=0, b^2+2b-2=0$，且 $a\neq b$.

$\therefore a$、b 是方程 $x^2+2x-2=0$ 的两个不相等的实数根．

由根与系数的关系，得 $a+b=-2$，$ab=-2$

$\therefore \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}-2=\dfrac{(-2)^2}{-2}-2=-4$

解法 2：由已知 $a^2=2-2a$ ①

$b^2=2-2b$ ②

①－②，得 $(a^2-b^2)+2(a-b)=0$　即 $(a-b)(a+b+2)=0$

$\because a\neq b, \therefore a+b+2=0, \therefore a+b=-2$

①×2，得 $a^2b^2=(2-2a)(2-2b)$，即 $(ab)^2-4ab-12=0$

$\therefore ab=6$ 或 $ab=-2$，显然 $\begin{cases}a+b=-2\\ab=6\end{cases}$ 无实数解

$\therefore a+b=-2, ab=-2$

$\therefore \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}-2=\dfrac{(-2)^2}{-2}-2=-4$

(2)已知 $p^2-2p-5=0, 5q^2+2q-1=0$，其中 p、q 为实数，求 $p^2+\dfrac{1}{q^2}$ 的值

解：显然 $q\neq 0$，由已知 $5q^2+2q-1=0$，得 $(\dfrac{1}{q})^2-2\cdot\dfrac{1}{q}-5=0$

又 $p^2-2p-5=0$

i)当 $p\neq\dfrac{1}{q}$ 时，$p\cdot\dfrac{1}{q}$ 是关于 x 的方程 $x^2-2x-5=0$ 的两个不相等的实数根

由根与系数的关系，得 $p+\dfrac{1}{q}=2, p\cdot\dfrac{1}{q}=-5$

$\therefore p^2+\dfrac{1}{q^2}=(p+\dfrac{1}{q})^2-2\cdot\dfrac{p}{q}=2^2-2\times(-5)=14$

ii)当 $p=\dfrac{1}{q}$ 时，$p\cdot\dfrac{1}{q}$ 是方程 $x^2-2x-5=0$ 的一个根

此时方程的两根为 $x_{1,2}=1\pm\sqrt{6}$

$\therefore p^2+\frac{1}{q^2}=2p^2=2(1\pm\sqrt{6})^2=14\pm4\sqrt{6}$

$\therefore p^2+\frac{1}{q^2}$的值为 14 或 $14+4\sqrt{6}$ 或 $14-4\sqrt{6}$

典例精析 16 关于 x 的方程 $m^2x^2+(2m+3)x+1=0$ 有两个乘积为 1 的实根；$x^2+2(a+m)x+2a-m^2+6m-4=0$ 有大于 0 且小于 2 的实根，求 a 的整数值.

解：$\because$方程 $m^2x^2+(2m+3)x+1=0$ 有两个乘积是 1 的实数根，

$$\therefore\begin{cases}m^2\neq0\\ \Delta=(2m+3)^2-4m^2\geqslant0\\ \frac{1}{m^2}=1\end{cases},\therefore m^2=1,\ \therefore m=\pm1$$

当 $m=-1$ 时，$\Delta=-3<0$，所以舍去 $m=-1$，$\therefore m=1$

方程 $x^2+2(a+m)x+2a-m^2+6m-4=0$ 变为 $x^2+2(a+1)x+2a+1=0$

解得 $x_1=-1$，$x_2=-2a-1$

又方程有大于 0 且小于 2 的实根，

$\therefore 0<-2a-1<2$，$\therefore -\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$

$\because a$ 为整数，$\therefore a=-1$

（三）一元二次方程与几何的创新与应用

典例精析 17 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，a、b、c 分别是$\triangle ABC$ 的三边，且 $a-b=2$，$b:c=3:5$，又二次方程 $x^2-2(k+1)x+k^2+12=0$ 两实根的平方和是$\triangle ABC$ 斜边的平方，求 k 值.

方法导引 由题目已知条件中给出的边之间的关系，可以进一步求出边长，由方程两实根的平方和是$\triangle ABC$ 斜边的平方的条件，列出有关 k 的方程，就可以求 k 值了.

解：在 $Rt\triangle ABC$ 中，设 $b=3m$，$c=5m(m>0)$，则

$a=\sqrt{(5m)^2-(3m)^2}=4m$，

$\therefore a:b=3:4$，又 $a-b=2$，$\therefore a=8$，$b=6$，$\therefore c=10$

由题意，设二次方程 $x^2-2(k+1)x+k^2+12=0$，两实根是 x_1、x_2，则 $x_1{}^2+x_2{}^2=100$.

即 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=100$