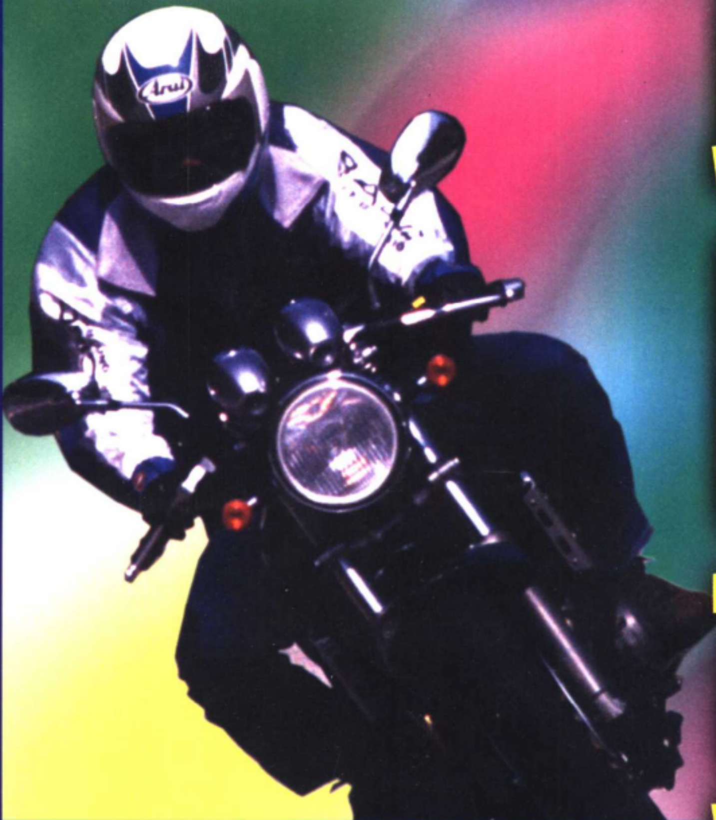
吉教社
奥林匹克丛书

SHUXUE OLYMPIC

COMPETITION

数学奥林匹克

高中三年级

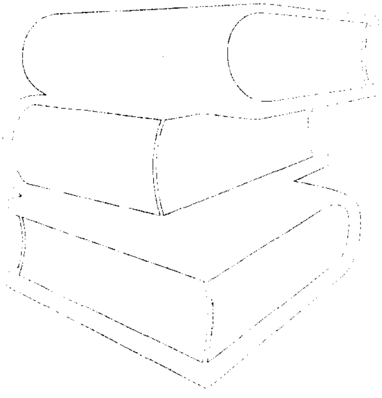


吉教社
奥林匹克丛书

OLYMPIC COMPETITION

数学 奥林匹克

高中三年级



(吉)新登字 02 号

数学奥林匹克 （高中三年级） 赵权忠 李宏新 主编

责任编辑：王世斌 阎爱群 封面设计：王 康

出版：吉林教育出版社 880×1230毫米 32开本 15.625印张 443 000字
发行：吉林教育出版社 2002年1月第1版 2002年1月第1次印刷
印数：1－8 000册 定价：15.00元
印刷：长春市第九印刷厂 ISBN 7－5383－4310－5/G·3932

丛书主编　阚秀敏　张劲松　张恩伟

主　　编　赵权忠　李宏新

副 主 编　王丽锋　卫广红

编　　委　赵权忠　郭忠喜　孙静波

王丽锋　杨吉春　赵丽光

杜凤华　李宏新　李雅旻

李　婧　李卫东　邢雪锋

陈佳辉　姜福强　杨惠敏

刘艳玲　李叶青　王晓菊

吴宇杰　孙艳华　张嘉宾

贺　萍　杨亚庚　黄　静

王孝男

前　言

为了扩大广大学生的知识面，增加知识储备，激发学生学习的兴趣，有效地培养科学的思维方法和综合解题能力，我们编写组的全体成员经过一年多的艰苦工作，终于使这套丛书在“春绣人间千里绿肥红壮艳，歌传广宇万家书灿墨浓香”的氛围中和广大的热心读者见面了。

本丛书旨在开启学生的心扉，震撼学生的心灵，挖掘深层信息，架设由已知、经可知、达未知的桥梁，运用发散思维“进行思维与灵魂的对话”，使学生真正体味“纸上得来终觉浅，心中悟出方知深”的真谛。

致天下之治者在人才，成天下之才者在教化。奥林匹克丛书是一种把过去和现在联系起来的多媒体。本丛书在如林的教辅材料中，博采众家之长，自成完整的知识体系。是望子成龙、望女成凤的家长的理想选择，是莘莘学子的好帮手。“诗也，书也，文也，无非心其得也，知之，好之，牙之，当从学而习之”。

寸有所长，尺有所短，由于我们水平有限，书中不足之处在所难免，敬请各位不吝赐教。

目　录

代数部分

几何部分

代数部分

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

考纲要求

1. 理解集合、子集(真子集)、交集、并集、补集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合.

2. 了解映射的概念，在此基础上加深对函数有关概念(如符合“f”)的理解；掌握函数的表示法.

理解反函数的意义，并会求一些函数的反函数，掌握互为反函数的函数图像间的关系.

3. 会求函数的定义域及某些简单函数的值域.

4. 理解函数的奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的奇偶性，能利用函数的奇偶性与图像对称性的关系描绘函数的图像.

5. 理解函数的单调性的概念，并能判断一些简单的函数的单调性.

6. 理解二次函数的概念，掌握它的图像和性质，了解二次函数、一元二次不等式及一元二次方程三者之间的关系，能灵活运用二次函数的最大值、最小值以及二次函数的图像和一元二次方程实数根的分布范围等知识解决有关问题.

7. 掌握幂函数的概念、图像和性质，在考查掌握幂函数性质和运用性质解决问题时，所涉及的幂函数 $f(x)=x^a$ 中的 a 限于在集合 $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ 中取值.

8. 理解对数(包括常用对数)的概念和对数的运算法则，掌握对数形式与指数形

式的互化.熟练掌握换底公式.

9.掌握指数函数、对数函数的概念及其图像和性质.运用指数函数和对数函数的图像和性质解决有关问题.

10.会解简单的指数方程和对数方程，并能解决有关问题.

11.能利用函数的奇偶性与图像的对称性的关系描绘函数的图像.

12.掌握互为反函数的函数图像间的关系.

13.掌握基本初等函数的图像.

知识要点

1.集合：集合与集合间的子集、真子集、等集的关系；集合间的交、并、补运算.

2.映射与函数：函数是非空数集 A 到非空数集 B 的映射，函数的定义域与值域的图像特征要覆盖 X 轴与 Y 轴的范围.

3.函数的基本性质：单调性的图像特征是上升或下降；奇偶性的图像特征是关于原点或 Y 轴对称.显然，函数的定义域关于原点对称，是该函数为奇函数或偶函数的必要非充分条件.

4.幂函数、指数函数和对数函数：由幂函数 $y=x^{a}$（a 为常数)中的有理数 a 的不同情况，确定其定义域.以幂函数在第一象限的图像特征，根据定义域描绘其图像.指数函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq1$)与对数函数 $y=\log_{a}{}^{x}$（$a>0,a\neq1$)互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

5.指数方程和对数方程：转化为代数方程或用图像法求解.在解对数方程时，由于应用对数运算法则进行方程变形，有时会引起允许值范围的扩大或缩小，产生增根或失根，故必须验根.

高考命题要点

1.用适当的集合表示法表示给定的集合.

2.用 $\in$、$\notin$ 表示元素与集合的关系，用 $\subseteq$、$\subset$、$=$ 表示集合与集合的关系.

3.求给定集合的交集、并集、补集.

4.判断一个集合到另一个集合的对应法则是否可以确定一个映射.

5.求函数值.

6.根据已知条件，求函数表达式.

7. 求反函数以及利用"函数 $y=f(x)$与反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称"解决有关问题.

8. 求函数定义域.

9. 求较简单函数的值域及函数的最值.

10. 二次函数的定义、图像与性质.

11. 二次函数在指定区间上的最值.

12. 二次函数解析式的几种表示方法.

13. 运用二次函数的知识解决某些数学问题与实际问题.

14. 幂函数的定义、图像，以及其主要性质.

15. 应用幂函数的图像和性质比较大小、函数正负性的讨论等.

16. 对于函数的奇偶性这个考点，一要能判断一些简单函数的奇偶性，二要能利用函数的奇偶性与图像的对称性的关系描绘函数图像.

17. 对于函数的单调性，①会用作差(商)法证明一些简单函数的单调性；②给出函数解析式，确定其定义域内的单调区间;③利用单调性作图.

18. 利用函数的奇偶性和单调性解一些综合性的题目.

19. 利用对数的运算法则及换底公式化简对数式或证明含有对数的恒等式.

20. 综合运用幂函数、指数函数、对数函数的性质，比较两个或几个数的大小.

21. 研究与指数函数、对数函数有关的复合函数的性质.

22. 基本初等函数的图像.

23. 函数图像的基本变换.

24. 函数图像的应用.

25. 简单类型的指数方程和对数方程的求解.

26. 含参数的指数方程和对数方程的讨论.

典型例题解析

例 1： 设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$\overline{A}\cap B=\{3,7\}$，$A\cap\overline{B}=\{2,8\}$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,3,4,5,6,7,8\}$，求 A 、B 、$\overline{A}\cap\overline{B}$.

解 ⇨ 用韦恩图表示集合 I 、A 、B 的关系，表示集合 A 、B 的两个相交圈将表示全集 I 的矩形分成互不相交的四个部分，它们分别表示 $A\cap\overline{B}$，$A\cap B$，$\overline{A}\cap B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，如图 1－1.

依题意，知 $A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\{1\}$. 又 $A\cap\overline{B}=\{2,8\}$，$\overline{A}\cap B=\{3,7\}$，由韦恩图知，$A=\{1,2,8\}$，$B=\{1,3,7\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{4,5,6\}$.

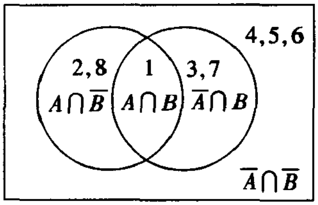


图 1－1

评述 ⇨ 借助于集合的韦恩图表示是解决集合问题的常用方法.在集合运算中，直接运用集合运算律 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 可以使解题简便.

例 2： 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2+2mx+4, x\in R\}$，$B=\{x\mid \log_{\frac{2}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant 0\}$ 且 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

分析 ⇨ 本题的关键是理解集合 A 的含义，将集合语言转换成数学语言或几何语言或符号语言.

集合 A 中的元素是 y，y 又满足 $y=x^2+2mx+4$，$x\in R$，其实质是二次函数的值域.

解 ⇨ $\because$ $y=x^2+2mx+4=(x+m)^2+4-m^2\geqslant 4-m^2$. $\therefore$ 集合 $A=\{y\mid y\geqslant 4-m^2\}$. $\because$ $\log_{\frac{2}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}x\leqslant 0$，$\therefore$ $\log_{\frac{2}{3}}x-\log_3 x\leqslant 0$，$\log_3 x(\log_3 x-1)\leqslant 0$. 解得 $0\leqslant\log_3 x\leqslant 1$，即 $1\leqslant x\leqslant 3$. $\therefore$ 集合 $B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，$\because$ $A\cap B=\varnothing$，$\therefore$ $4-m^2>3$，解得 $-1<m<1$，即为实数 m 的取值范围.

例 3： 若关于 x 的不等式 $4x+p<0$ 的每一个解都是不等式 $x^2-x-2>0$ 的解，求实数 p 的取值集合.

分析 ⇨ 这里给出了两个不等式解之间的关系，若对解作一一考察，得不到确定 p 的条件.若从整体考虑，设不等式 $x^2-x-2>0$ 的解集为 B，$B=\{x\mid x^2-x-2>0\}=\{x\mid x<-1$ 或 $x>2\}$，不等式 $4x+p<0$ 的解集为 A，$A=\{x\mid 4x+p<0\}=\{x\mid x<-\frac{p}{4}\}$.再把两个不等式解之间的已知关系，转化成两个集合之间的关系，即 $A\subseteq B$.结合数轴(如图 1-2)，不难得到：$-\frac{p}{4}\leqslant -1$.由此即可求得 p 的取值集合为 $\{p\mid p\geqslant 4\}$.

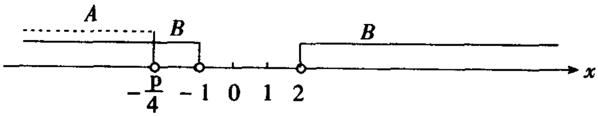


图 1-2

这种用整体的观点处理问题的思想在中学数学中的运用是很多的.例如，用换元法解方程：$6x^2+9x+\sqrt{2x^2+3x-2}=6$ 时，不过是把方程中的一个局部 $\sqrt{2x^2+3x-2}$ 当作一个整体，记作 y，而使原方程变成了关于 y 的方程：$3y^2+y=0$，通过先解出 y（$y=0$ 或 $y=-\frac{1}{3}$），再由 $\sqrt{2x^2+3x-2}=0$ 解得 x（$x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-2$）.从而可看到，换元法解方程，本质上是适当处理局部、整体的关系的一种方法.

把握整体决不是不管组成整体的个体，抓好构成整体的个体的共性，是这里要十分注意的.

例 4：如果奇函数 $y=f(x)(x\neq 0)$，在 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x-1$，那么使 $f(x-1)<0$ 的 x 的范围是 (　　)

A. $x<0$　　　　B. $1<x<2$

C. $x<0$ 或 $1<x<2$　D. $x<2$ 且 $x\neq 0$

分析一 ⇨ 先求出 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的解析式及 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围，再求 $f(x-1)<0$ 的 x 的取值范围.

解法一 ⇨

∵ 奇函数 $y=f(x)(x\neq 0)$，在 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x-1$.

∴ $\begin{cases}x>0,\\ f(x)=x-1<0,\end{cases}$ 得 $0<x<1$，

∴ $0<x-1<1$，即 $1<x<2$.

设 $x<0$，则 $-x>0$.

∴ $f(-x)=-x-1$，即 $f(x)=x+1$.

∴ $f(x-1)=x$.

由 $f(x-1)<0$ 得 $x<0$.

∴ x 的范围是 $x<0$ 或 $1<x<2$.

应选 C.

分析二 ⇨ 画出函数的图像.

解法二 ⇨ 由已知可画出函数 $y=f(x)$ 的图像如图 1－3.

由图像知当 $f(x)<0$ 时，$x<-1$ 或 $0<x<1$.

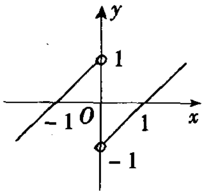


图 1－3

$\therefore\ f(x-1)<0$ 时，得 $x-1<-1$ 或 $0<x-1<1$，即得 $x<0$ 或 $1<x<2$，故应选 C.

例 5: 函数 $f(x)=(e^x-a)^2+(e^{-x}-a)^2\ (0<a<2)$ 的最小值为________.

解 ⇨

因为 $f(x)=(e^x+\frac{1}{e^x})^2-2a(e^x+\frac{1}{e^x})+2a^2-2$.

设 $t=e^x+\frac{1}{e^x}$，则 $g'(t)=t^2-2at+2a^2-2=(t-a)^2+a^2-2$.

$\because\ t=e^x+\frac{1}{e^x}\geqslant 2$，$\therefore$ 函数 $g'(t)$ 的定义域是 $[2,+\infty)$.

$\because\ 0<a<2$，$\therefore$ 当 $t=2$ 时，$f(t)$ 的最小值是 $2a^2-4a+2$. 即 函数 $f(x)$ 的最小值是 $2(a-1)^2$.

评述 ⇨

这里用换元法将 $f(x)$ 转化 $f(t)$ 的二次函数的形式，并要注意 t，a 的取值范围.

例 6: 对于任意 $x\in R$，函数 $f(x)$ 表示 $-x+3$、$\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$、x^2-4x+3 中的较大者，则 $f(x)$ 的最小值是 ( )

A. 2　B. 3　C. 8　D. -1

分析 ⇨

首先应理解题意“函数 $f(x)$ 表示 $-x+3$、$\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$、x^2-4x+3 中的较大者”是指对某个区间而言，函数 $f(x)$ 表示 $y=-x+3$，$y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$，$y=x^2-4x+3$ 中最大的一个.

其次是找出函数 $f(x)$ 的表达式. 此时可利用函数的图像来确定.

如图 1-4，分别画出三个函数 $y=-x+3$，$y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$，$y=x^2-4x+3$. 得到三个交点 A、B、C 的坐标分别为(0，3)、(1，2)、(5，8). 从图像观察可得函数 $f(x)$ 的表达式是：

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3 & (x\leqslant 0),\\ -x+3 & (0<x\leqslant 1),\\ \frac{3}{2}x+\frac{1}{2} & (1<x\leqslant 5),\\ x^2-4x+3 & (x>5).\end{cases}$$

$f(x)$ 的图像是图中的实线部，图像的最低点是点 $B(1，2)$.

∴ 函数 $f(x)$ 的最小值是 2，故选 A.

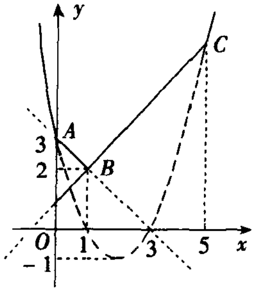


图 1-4

例 7: 如图 1-5，灌溉渠的横断面是等腰梯形，底宽及两边坡总长度为 l，边坡的倾斜角为 60°.

(1)求横断面面积 y 与底宽 x 的函数关系式；

(2)已知底宽 $x\in\left[\frac{l}{4},\frac{l}{2}\right]$，求横断面面积 y 的最大值和最小值.

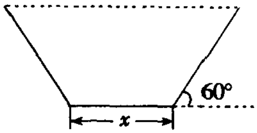


图 1-5

解 ⇨

(1)由已知，边坡长为 $\frac{l-x}{2}$，则渠高为 $\frac{l-x}{2}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}(l-x)$，渠上底宽为 $\frac{l-x}{2}\cos 60°\cdot 2+x=\frac{1}{2}(l+x)$.

∴ $y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(l+x)+x\right]\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(l-x)$，即 $y=\frac{\sqrt{3}}{16}(-3x^2+2lx+l^2)$.

(2) $y=\frac{\sqrt{3}}{16}(-3x^2+2lx+l^2)=-\frac{3\sqrt{3}}{16}(x-\frac{l}{3})^2+\frac{\sqrt{3}}{12}l^2$.

$\because$ $x\in[\frac{l}{4},\frac{l}{2}]$，$\frac{l}{3}\in[\frac{l}{4},\frac{l}{2}]$，

$\therefore$ $x=\frac{l}{3}$时，y有最大值$\frac{\sqrt{3}}{12}l^2$；当$x=\frac{l}{2}$时，y有最小值$\frac{5\sqrt{3}}{64}l^2$.

评述 ⇨ 本题是有关函数的实际问题.其方法是把实际问题用数学形式表示出来，建立变量之间的函数关系.

例 8: 已知函数 $y=f(x)$的定义域为 $[0, 2)$，求函数 $F(x)=f(\log_2 x)+f(\sqrt{x^2-1})$的定义域.

解 ⇨ 依题意，得$\begin{cases}0\leqslant\log_2 x<2,\\0\leqslant\sqrt{x^2-1}<2;\end{cases}$

解得$\begin{cases}1\leqslant x<4,\\1\leqslant x<\sqrt{5}或-\sqrt{5}<x\leqslant-1.\end{cases}$

$\therefore$ $1\leqslant x<\sqrt{5}$，故函数 $F(x)$的定义域是 $[1, \sqrt{5}.)$

评述 ⇨ 已知$f(x)$的定义域为 $[a, b]$，求$f(g(x))$的定义域是指求满足 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的x的取值范围，而已知$f[g(x)]$的定义域是 $[a, b]$，指的是 $x\in[a, b]$.

例 9: 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{\sqrt{x+5}}{\lg(6-x^2)}$；(2) $y=\lg(a^x-2\cdot 3^x)$ $(a>0$且$a\neq1)$.

解 ⇨

(1)要使此函数有意义，必须

$$\begin{cases} x+5\geqslant 0, \\ 6-x^2>0, \\ 6-x^2 1. \end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases} x\geqslant -5, \\ -\sqrt{6}<x<\sqrt{6}, \\ x\neq \pm\sqrt{5}. \end{cases}$$

$\therefore\quad -\sqrt{6}<x<\sqrt{6}$ 且 $x\neq \pm\sqrt{5}$.

(2)要使此函数有意义，必须 $a^x-2\cdot 3^x>0$，即 $(\frac{a}{3})^x>2$.

当 $a>3$ 时，此函数的定义域为 $\{x\mid x>\log_{\frac{a}{3}}2\}$；

当 $0<a<3$ 且 $a\neq 1$ 时，此函数的定义域为 $\{x\mid x<\log_{\frac{a}{3}}2\}$；

当 $a=3$ 时，此函数的定义域为 $\varnothing$.

评述 ⇨

求函数的定义域时，应遵循下列规则：分式的分母不为零；偶次根式中的被开方数为非负数；对数的真数为正数，底数大于零且不等于1；对含有参数的问题要注意对参数进行分类讨论；由实际问题建立的函数，其定义域受实际问题的具体条件制约.

例 10：求满足下列各条件的函数解析式.

(1)已知 $f(x)$ 为有理函数，且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$，求 $f(x)$.

(2)已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$.

(3)已知 $2f(x^2)+f(\frac{1}{x^2})=x$，且 $x>0$，求 $f(x)$.

分析 ⇨

(1)因 $f(x+1)$，$f(x-1)$ 与 $f(x)$ 有相同的次数，且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$，故 $f(x)$ 为二次函数，因此可用待定系数法求 $f(x)$.

(2)已知 $f(\sqrt{x}+1)$ 的表达式求 $f(x)$，既可以用定义法，又可以用换元法.