博奕論导引

J·麦克金賽著

人民教育出版社

博 奕 論 导 引

J·麦克金賽著
高鴻勛　曾鼎鉌　王虞生譯

人 民 教 育 出 版 社

本书是根据麦克金赛(J.C.C. Mckinsey)著Introduction to the Theory of Games一书譯出的。

本书主要內容：矩形博奕及其基本定理，矩形博奕的解及求博奕值的近似計算法，广义型博奕及其一般理論，連續博奕及其基本定理，对統計推断的应用，綫性規划，n人零和博奕及其解，非零和博奕，以及一些未解决的問題等。

这是博奕論方面的一本較好的入門书，其中二人博奕及多人博奕的理論，在国民經济中可以有程度不同的应用。但是此书是以資本主义社会的竞爭与資产阶級生活准則为根据的一个数学理論。賭博、行賄、竞爭、威胁及其他类似的詞句在书中是屡見不鮮的，而且在說明和立論时也貫穿着这种資产阶級的立場和观点。因而，在翻譯时尽管删节了許多有害的东西，但終不能从根本上改变全书面貌。为此特請北京大学概率論教研室張尧庭同志就全书作了一个較系統的批判，以期尽量消除不良的影响，使讀者得到在数学理論上有益的东西。

由以上所說的情况来看，本书的出版只希望它能起到"参考磚"的作用，我們除了希望讀者和学术界对此书进行批判外，还希望我国学术界和出版界編写与出版更多更好的这一方面书籍来尽快地代替它。

博 奕 論 导 引

J. 麦 克 金 賽 著

高鴻勛　曾鼎鉌　王廈生譯

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

民族印刷厂印装　新华书店发行

統一书号 13010·730　开本 850×1168 1/32　印張 11 12/16

字数 294,000　印数 0001—4,500　定价（8）¥1.50

1960年4月第1版　1960年4月北京第1次印刷

序 言

博奕論是数学中一个新的分支。虽然它的历史很短，但是它所研究的对象和人們的生产实踐却有着密切的联系，而且处理問題的方法又有明显的特色，因而引起了广泛的注意，成为近年来数学中发展很快的一支。

关于博奕論方面最早的著作，一般都認为是1912年策墨洛(F. Zer melo)的"关于把集合論应用于象棋博奕理論中"一文。后来在1921年波来儿(Borel)討論了博奕論中一些个别的情况并且猜出了一些結果，1928年馮·諾伊曼(Von Neumam)証明了这些結果，当时的研究对象主要是日常生活中的一些游戏(如象棋，桥牌等)。此后相当一段时期內博奕論几乎处于停頓的阶段，这正与概率論相仿：当研究的对象还仅仅是脱离生产活动的日常游戏时，数学的理論就不可能获得强大的生命力，并且也不会具有一个完善的理論。直到第二次世界大战期間，軍事上，生产上提出了許多問題，象飞机如何偵察潛水艇的活动，生产組織如何組織得更合理，怎样的物資調运方案才是最优的…等等，这些問題都和"博奕"具有共同的特点，于是"博奕"就成为許多数学家研究的对象，他們也获得了一系列的重要結果，从而博奕論就脱离了准备阶段，形成了自己的系統的理論。1944年馮·諾伊曼和摩根司特恩(Morgenstern)合著的"博奕論和經济行为"一书将博奕論从数学方面向前推进了一步，但在观察社会現象經济現象时，处处表現了資产阶級的荒謬观点。如果說在战爭时期博奕論的应用比較着重于軍事問題，那末它的应用范圍在战后大大地扩展了，它有力地帮助人类来向大自然进行"博奕"(統計判决函数論就是以这样一个观点作为基础的)。到現在，它和控制論，概率論，計算技术，經济計划，生产組織……各个

方面发生了联系，它已成为內容丰富和应用領域广闊的一門科学理論了。

不难理解，博奕論中的"博奕"不应只按字面了解为日常生活中的游戏，更不应了解为賭博，而应看作是概括了相当广泛的某一类現象的数学模型。在这一类現象中有某些"博奕者"参加，他們所关心的对象(或称之为"利益")不全相同，他們能够用某种方法获得自己的"利益"。这里的博奕者旣可以是个人，也可以是集体，旣可以是某一类生物，也可以是自然界。博奕論主要就是研究在这种現象中博奕者应該如何来选擇自己的策略。很明显，这样的数学模型是概括了相当广泛的一类現象的。机器的自动調节，自动控制就是要机器学会一种"博奕"的本領。苏联的学者还指出博奕論对經济問題的分析是有帮助的(参看莫斯科大学学报 1959 年第一期：А. Я. Боярский: О Теории игр как Теории Экономического Поведения，博奕論在軍事方面也是有用的。至于博奕論对綫性規划，数理統計的作用就更显著了，这一点在这本书里有专門的介紹，这儿就不提了。

从博奕論发展的历史和它研究的对象来看，它是很有前途的科学理論，然而資产阶級的学者却把它引到了歧途。自从博奕論出現以后，資产阶級的經济学家就立刻抓住这門学科来使自己摆脫困境，就以博奕論作为了解和認識整个經济活动的主要方法。摩根司特恩本人就是边际效用論的拥护者。在他們看来，社会上的每一个人都是在参加一場博奕，都有可能走运或者倒霉，最終的結果是一部分人走运了——发財致富，另一部分人就必須倒霉——貧困，因此貧富不均在这班人看来是社会的"正常現象"，似乎資本主义制度对每个人都是一律平等的，貧穷只是不走运的自然結果，而与社会制度无关。实际上，无产阶級在資本主义社会里受剝削，被剝夺了各种权利，怎么可能与資本家平等呢？脫离了阶級观点来研究社会問題，来分析經济現象又怎么可能眞实地反映客观情况呢？很明显，他們的目的就是要粉飾資本

主义世界，迷惑和欺騙劳动人民，我們知道，資本家的剝削是造成劳动人民貧困的根本原因，只有推翻了資本主义制度才能摆脫貧困，社会主义国家的活生生的現实有力地說明了这一点。当然这种反动的作用并不是博奕論本身所引起的，而是由于資产阶級辯护士們，阴謀替資本主义社会辯护而濫用博奕論的結果。这种反动的观点在这本书里也有所反映，例如，著者在书中就多处污蔑过工人阶級的形象，宣傳阶級調和的反动論点。比如他說，在資本主义社会中工人罢工和怠工对工人阶級和資产阶級是两敗俱伤的事。这当然是极端荒謬和有害的，它的目的和效果只能是麻痹工人阶級的革命意志。在資本主义社会里，罢工和怠工是工人阶級进行經济斗爭政治斗爭的有力手段，而对資本家却毫无好处。譯者刪去了这类东西是完全应該的。不过这种观点在个别地方还是不免一再出現，請讀者隨时注意。正因为博奕論是以具有竞爭性的活动作为研究对象，所以資本主义社会中的商业竞爭就成为博奕論应用的陣地。例如本书第七章就举例說明一个肥皂商人应該如何来和同行进行竞爭，使自己能获得更多的利潤；书末几章也談到了如何用賄賂、誘騙来进行活动；它还討論了如何建立集团之間的联合，以便大魚吃小魚，如何进行分贓等等这一类問題。正因为如此，資产阶級的学者对博奕論的作用就大肆吹嘘，达到了荒謬不堪的地步，比如本书第一章就提到了博奕論在婚姻問題上也可应用等等。由此可見，任何一門有用的学科在資本主义社会中会"发展"成什么样子！

我們正确地認識了博奕論的研究对象和它的作用之后，那末学习博奕論就是在于掌握它，使它成为对社会主义建設有用的工具。我們对它的了解越深入，它的作用也就越显著，我們要把博奕論变成无产阶級在与自然和敌人斗爭中的有力的助手。

麦克金賽(Mckinsey)的这本书的重点，是介紹博奕論数学方面的基本理論和一般問題。正如前面所指出的，从政治思想观点上看，它是錯誤重重的，但和現在看到的資本主义国家出版的这一类书比較起来，

它在数学方面的叙述和推导还是比較清晰的，引用的数学工具也不多，并且还专門写了一些有关的准备知識，最后还提出了一些問題以供进一步探索，在这些方面还是比較好的，它給初学博奕論的讀者会带来許多方便。总之，在目前还缺乏用正确的观点写成的这类书籍的情况下，只要我們端正态度，明确目的，批判地进行学习，那末从这本书中也完全可以学到博奕論的一些基本知識。

北京大学概率論教研室

張尧庭 1960.2.10

譯者序

本书系根据 J. 麦克金賽著博奕論导引(Introduction to the Theory of Games)一书翻譯并部分改編而成。博奕的数学理論是有助于社会主义建設的；但是原书除了数学理論以外；在全书的叙述过程中，編者都是从資本主义社会中的竞爭，欺騙及資产阶級生活准則为出发点的并且对于問題的論述也是唯心主义的。因此，我們在翻譯过程中作了部分的改編：保留了原书中的数学方面，删去了原书中有关資本主义立場和观点的評述部分；对于删去的个别事例又換上了另外的事例；此外，少数的資本主义社会中的問題虽然保存下来但是标上了"在資本主义国家……"字样。这样做，是否恰当还希望讀者們提出宝貴意見。

在数学內容的叙述与証明中我們所見到的遺漏与錯誤或者我們認为不妥之处，也作了一些小的修改或补充；个别的符号，图表等作了一些改动。原书对于概念的引进与講解比較淺显易懂，个别的則稍嫌冗长；有些証明多借助于直观論述而不够謹严，但是为了适合更多的讀者，特别是只有微积分基本知識的讀者，我們很少改动这些方面，而只在个别的地方作了一些补充与修改。

在第二，三，十六，十七四章原书分别引进了"dominance"这个概念。第二章用这个字来表述向量(或純策略)之間的关系，而第三章用它来表述混合策略之間的关系。乍看起来，第二章可以看作是第三章的特殊情形，但是在第二章一个向量可以 dominantes 它本身，而在第三章一个混合策略却不能够 dominantes 它本身。因此我們把这同一个字分别譯为"超过"与"支配"，用以区别：一个策略或(超値向量)不能够"超过"它本身(第三，十六，十七章)；然而一个向量却可以"支配"它自己(第二章)。

博奕論在很多地方都連系到社会实际与生产实际。对于这方面的数学理論只是初次接触，而有关的实际知識更是陌生。特别是象“博奕論导引”这本資产阶級的学术著作，尽管在翻譯过程中一再斟酌，但限于水平，思想性方面的問題，翻譯与改編上的錯誤一定还有不少，盼讀者看到时提出意見。

目 录

第一章　矩形博奕

1. 引言

在这本书里，我們将要研究策略博奕的数学理論。所謂策略博奕可以玩象棋、桥牌及扑克为例，玩这种游戏的人可以用他們的智慧及机智击敗对方。除了社交娛乐圈里用到博奕論以外，博奕論还有更重要的意义，因为它可以普遍地应用到許多有关竞争的情况中去，并且一个竞争的結局一半受一方控制而另一部分也受到对手的控制。許多經济、社会、政治以及軍事上的竞爭都属此类。

虽然在許多实际生活中的竞爭里以及各种社交博奕中包含着随机的因素（例如桥牌中的分牌或者軍事行动中遇到的气候），但我們一般地不考虑其結局只依賴于机遇而不受参与者的才能影响的那种博奕。

策略博奕与（純粹）机遇博奕的主要分别在于进行游戏时，前者要用到参与者的智慧与技巧；而后者是不必要的。一个下棋的生手要与一个棋手平等地比賽是肯定要輸的，而擲骰子（当然不許作弊）就沒有生手与熟手的区别。但这并不是說在有关机遇博奕上沒有应解决的数学难題，但是，解决这种問題的标准方法至少是存在的，不过我們不准备在这里講。

以后我們差不多只注意到策略博奕論的純数学方面，而只是通过举例提出一些它們在經济問題中的应用。有关这方面的书籍及文献可以参閱本书的末尾的书目。

2. 术語及博奕分类

我們用“博奕”两个字来表明进行游戏（或竞賽）的一組規則和玩法；而用“局”表示这种規則的某一次具体实現。对我們来說把这两个

概念区别开来是适宜的。例如我們可以說，“圍棋是一种比象棋更难的博奕”，但是我們說“昨天晚上我玩了三局圍棋”而不用“三博奕圍棋”。

我們用“步法”或“步”表示在博奕进行中的“点”(或阶段)。在这种点，一个局中人(参加博奕的人)也有时是一种机遇装置从一組可行的作法里挑选一种作法，称所选出的作法为一“着”或一次“选擇”。例如我們可以說“黑子在第十个步法上由于巧妙着(选擇)而获胜”。

策略博奕的种类和变化都很多。我們现在提出几种分类的方式。

首先，我們可以依局中人的数目来区分博奕：一人博奕，二人博奕等等。一人玩的骨牌游戏便是一种一人博奕，圍棋是二人博奕。当我們說这是 n 人博奕时，并不一定表示这个博奕的每一局恰好是 n 个人参加，只要这个博奕的規則規定一切局中人都分在 n 个互斥的組里(每人只属一組)，而每一組的人都有相同利益。这 n 个利害相同的組就可以看作是 n 个“人”。例如虽然一般來說圍棋只是两个人下，但是也可以由两“队”来下圍棋，例如每队三个人。縱然这样，圍棋还是圍棋，而且是二人博奕，不是六人博奕。同样看法，我們应把桥牌看作是二人博奕，而不是四人博奕：因为南北两家有共同利害，应看做是一个“人”，东西两家也应看做是一个“人”。

在資本主义社会里，人們在社交上玩博奕的时候，常决定在每一局終了时，按照博奕規則要用錢币彼此支付。但在其他博奕里也常常有这种情形：局中人在每一局終了时，算出每一个参与者由于他的相对技巧所应得的分数，把这些分数記录下来，但是并不支付錢币，例如桥牌游戏常常就是这样。最后也有些博奕就連分数也不記录，只是簡单地宣布誰“輸”誰“贏”，例如猜拳、象棋、圍棋就是这类。我們为了以后叙述上的便利时常要提到在每一局終了时，局中人之間有支付，而假設这种支付就是錢币支付。

設若現在考慮由 n 个局中人 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ 进行的一局 n 人博奕，令 $p_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ 为这一局終了时支付給 P_i 的数目 (若 P_i 必

須付出，那末 p_i 就是負的)。如果

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0,$$

我們就称这一局是另和的；如果一种博奕的每一局都只能是另和的，我們就称这个博奕本身是另和的①。可以看到通常賭錢的所謂博奕都是另和的，因为每一局的过程既不会增加財富也不会消灭財富。然而，非另和的博奕仍然是很重要的；因为如果我們要在博奕論里找到經济过程的模型，那末我們就非考虑非另和博奕不可，因为每一个經济过程通常总是要創造(或消灭)財富的。可以看到一个經济过程使每一个参与者都增加(或減少)財富。

我們也可以把博奕按照它有多少步法而分类。例如猜拳只須每人一步便可分胜負，但有时博奕每一局的長短可以不同——圍棋可以下得很長也可以下得很短，这依賴于两个局中人的相对技巧。

一个有限博奕具有有限步法，每一个步法只包含有限个着；不是有限的博奕就称为无穷博奕。

最后，博奕也可以依照局中人自以前步法中所能利用的信息总和而分类。在圍棋及象棋里，局中人每一步都可以从以前步法得到充分的信息；但是在桥牌里，一个局中人对于別人分到什么牌是不了解的，因而有一部分是无知的。显然可以看到，从某一种博奕一开始就把局中人所能得到的信息規則改变，那末，我們可以得到一种完全不同的博奕。如果在打桥牌时，一开始就把每个人的牌都亮出来，这种桥牌将完全是另外一种博奕了。如果在下象棋时不許局中人知道关于他的对手如何选擇的信息，那末，这种棋也完全是一种新的博奕了。

3. 矩形博奕的定义

一个一人的另和博奕沒有什么技巧上的困难，因为无論他怎样做，

① 在第六章中当引進策略的概念之后，我們將給"另和博奕"以較广的定义。

他总是得到另，因此他可以这样做也可以那样做。至于进行一个非另和一人博奕时，局中人只須解一个普通的最大化問題，他可以在各种可能的选擇里挑出一个来，使他所得到的是最大就可以了；如果博奕包括有隨机步法，那么他可以挑选使他得到的数学期望值为最大的那个。因此，要研究策略博奕的特征，我們应該考虑多人博奕。

我們的研究可以从另和的二人博奕开始，并假定每个局中人只有一个步法。設第一个局中人从前面m个正整数中选出一个数，而第二个局中人，他不知道第一个人选的是什么，从前面n个正整数里选出一个数，根据这两个数，按博奕的規則局中人之一付給另一人一笔数目，对于这种博奕，我們給它一个名称，叫作矩形博奕（我們初看可能認为矩形博奕是一种很特殊的博奕，但是以后我們可以看到不是这样，其他的許多种博奕都可以化为矩形博奕）。

举一个矩形博奕的例如下：局中人P_1从(1, 2, 3)这組数里选出一个数，而局中人P_2，事先并不知道P_1选擇了那一个数，他从(1, 2, 3, 4)这組数里选出一个数来，在他們都选定以后，P_2按照下表支付給P_1一笔数目：

	1	2	3	4
1	2	1	10	11
2	0	−1	1	2
3	−3	−5	−1	1

也就是説，若P_1选1而P_2选3时，P_2支付給P_1 10元（或10分或10个其他币制单位）；若P_1选3而P_2选2，則P_2支付給P_1負5元，也就是P_1支付給P_2 5元。为簡单計，以后我們叙述这种博奕时只給出一个所謂支付矩陣：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

另外可以举出一个矩形博奕的例是古代意大利所常玩的"二指莫拉",[1] 这种游戏是两个人玩的,每一个人出一个或出两个指姆,同时又把猜测对方所出的指姆数叫出来。如果只有一个局中人猜测正确,那么他所赢得的数目就是他自己所出指姆数与对方所出指姆数之和,否则博奕重新进行。設若我們用(1,2)表示一个局中人自己出1个指姆而猜测对方出2个指姆的情形,则博奕的支付矩陣如下:

	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
(1, 1)	0	2	−3	0
(1, 2)	−2	0	0	3
(2, 1)	3	0	0	−4
(2, 2)	0	−3	4	0

对于矩形博奕来說,一个最重要的問題是有沒有一个最优方法来进行一局(对于任何博奕自然也有这个問題),也就是說,有沒有一个合理的論据註局中人采用某一种方法比用其他方法更为有利。

用上述第一个例题来說(不是二指莫拉問題),問題是很容易解决的。因为我們可以注意到上面矩陣第一行的每一項都大于第二行的相当項,而且也大于第三行的相当項。所以,对 P_1 来說,不論 P_2 选擇什么,P_1 选擇1总比选2或3要好,因此 P_1 的最优方法是选擇1。类似地,由于第二列的每一項都小于其他三列的相当項;更因为 P_2 要使自己的支付越少越好,所以 P_2 的最优方法是选擇2。

上面的論証是根据支付矩陣有下面这样一个特殊性质:某一行(某一列)的每一項都大于(小于)其他行(列)的相当項。为了能够对較广泛情形的博奕进行分析,我們要引进一些新概念。

4. 具鞍点的矩形博奕

設一个矩形博奕的 $m\times n$ 矩陣为:

---

[1] 譯者注:与中国的猜拳类似,不过每人最多只出两个指姆而已。