有限元方法及其应用

——方法构造和数学基础——

李开泰　黄艾香　黄庆怀

YOU XIAN YUAN FANGFA JIQI YING YONG

①

西安交通大学出版社

有限元方法及其应用(I)

——方法构造和数学基础——

李开泰　黄艾香　黄庆怀

西安交通大学出版社

内　容　简　介

本书包括“方法构造和数学基础”和“发展及应用”两大部分，分两册发行。它们既是一个整体，又具有相对独立性。

第一部分由第一章到第六章组成。内容包括方法构造、在电子计算机上实现的全过程、椭圆边值问题、变分原理和有限元解的收敛性讨论。第二部分由第七章到第十一章组成。内容包括混合元、杂交方法、有限元谱逼近、发展方程的有限元逼近，以及在流体力学、弹性力学、中子扩散方程和电磁场方面的应用。

本书可作为高等院校理工科硕士研究生的教材，除第一部分外，还可在第二部分中选择所需章节，作为对有限元方法在深度和广度上进一步的开拓；如用作应用数学、计算数学、应用力学、应用物理等专业本科生选修课教材，则采用第一部分内容是适宜的。本书对理工科高等院校教师和有关的科技工作者也是一本有价值的参考书。

有限元方法及其应用

李开泰　黄艾香　黄庆怀

责任编辑　　蒋　潞

西安交通大学出版社出版

西安咸宁路28号

*

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行　　各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32　印张 8 7/8　字数 186 千字

1984年12月第一版　　1984年12月第一次印刷

印数　1—8000

统一书号：15340·012　　定价：1.85元

序　　言

由于偏微分方程在理论和实践上的重要性，它的数值解法，长期以来吸引着数学家、物理学家和工程师们的注意。一种数值方法包括它的数学基础和它的实现，都紧紧地依赖于理论数学的发展和计算手段的改善。计算机科学的发展，现代大型高速电子计算机的出现，对数值方法冲击之大，是历史从来未有过的。作为求解偏微分方程的一个强有力的手段——有限元方法，正是电子计算机时代的产物。

有限元方法是 R. Courant 于 1943 年首先提出，五十年代由航空结构工程师们所发展，随后逐渐波及到土木结构工程，到了六十年代，在一切连续场领域，都愈来愈广泛地得到运用。

我国冯康教授和西方科学家各自独立奠定了有限元方法的数学理论基础。由于愈来愈多的数学家加入了发展有限元方法的行列，这种方法便由工程局限性中逐渐解脱出来，代之以统一的观点和严密的数学描述，并确立了它的数学基础。

有限元方法摈弃了刻划自然规律中局部的、瞬时的数学描述，而以大范围的、全过程的数学分析作为自己的出发点。局部和整体，瞬时和全过程，只是以两种不同的角度来描述自然现象。一个过程，既可以被微分方程所描述，又服从相应的变分原理，方法虽然不同，但却从两个不同的侧面来反映同一自然规律。

数值分析的任务，就是从无限维空间转化到有限维空间，把连续统转变为离散型的结构。有限元方法是利用场函数分片多项式逼近模式来实现离散化过程的，也就是说，有限元方法依赖于这样的有限维子空间，它的基函数系是具有微小支集的函数系，这样的函数系与大范围分析相结合，反映了场内任何两个局部地点场变量的相互依赖关系。任何一个局部地点，它的影响函数和影响区域，正是基函数本身和它的支集。在线性力学范畴里，场内处于不同位置的力相互作用产生的能量，可用双线性泛函 $B(\phi_i, \phi_j)$ 来表示，其中 ϕ_i,ϕ_j 正是相应地点的基函数。$B(\phi_i, \phi_j)$的大小与 ϕ_i，ϕ_j 支集的交集大小有关，如果两个支集的测度为零，则 $B(\phi_i\phi_j)=0$，因此，离散化所得到的方程其系数矩阵是稀疏的。若区域分割细小化，则支集不相交的基函数对愈多，矩阵也就愈稀疏。这给数值解法带来了极大的方便。

有限元方法之所以能获得如此迅速的发展和广泛的应用，是因为它具有独特的优越性。如以往常用的差分方法，其不足之处是，由于采用的是直交网格，因此它较难适应区域形状的任意性，而且区分不出场函数在区域中轻重缓急之差异，此外它还有编制不出通用程序的困难。然而，有限元方法可以用任意形状的网格分割区域，还可以根据场函数的需要疏密有致地、自如地布置节点，因而对区域的形状有较大的适应性。另外，有限元方法在实用上更大的优越性还在于，它与大容量的电子计算机相结合，可以编制通用的计算程序，代表着数值计算方法的进步，反过来也促进了计算机科学的发展。如果忽视了这一点，就会低估有限元方法的价值。

耗资几百万美元，投入上百个人年的大型有限元分析程序系统不断产生，一种工程应用软件学科已经形成。在高等院校理工科的许多专业里已把有限元方法作为大学生或研究生的必修课程，如何用尽量少的教学时数，使学生掌握有限元方法及其在电子计算机上的实现的技巧和在各种领域中的应用，如何使计算数学、应用数学研究生获得恰当的有限元数学理论基础并能独立地开展有限元方法理论和实践方面的研究。是编写本书的宗旨。

本书在第一章到第四章中，论述了有限元方法结构及其在电子计算机上如何实现；第五章和第六章是有限元方法的基础知识；第七章到第九章是有限元方法在一些领域中的应用，可根据不同的专业选用，使学生获得必要的应用背景材料和技巧；第十章到第十二章的内容是有限元方法的数学理论，其中包括混合有限元，谱逼近理论，发展方程的有限元逼近和非线性问题。

本书经过多次教学实践，并取得了良好的效果。其内容可作为高等院校理工科研究生和计算数学、应用数学专业学生的教材，也可作为有关教师和工程师的参考资料。

在编写本书过程中，承我校游兆永教授和航空工业部周天孝高级工程师认真审阅，并提出了宝贵的意见，作者在此表示衷心的感谢。

目　　录

第一部分　方法结构和数学基础

第一章　有限元方法结构

有限元方法作为一种数值方法，用来进行固体力学的结构分析或是用来求解一般场的问题时，大致要经过如下几个过程：

1) 寻找与原始问题相适应的变分形式；

2) 建立有限元子空间，即选择元素类型和相应的形状函数；

3) 单元刚度矩阵的计算和总刚度矩阵的合成；

4) 有限元方程组的求解；

5) 回到实际问题中去。

这一章里，我们将对上述前四个过程给予系统的论述。

§1　Galerkin 变分原理和 Ritz 变分原理

考察问题

$$\begin{cases} -\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(p(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=f(x,y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\ (x,y)\in\Omega \\ u\Big|_{\Gamma_1}=0 \\ \left[p(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x,y)u\right]_{\Gamma_2}=g(x,y) \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $p(x,y)$ 一阶连续可导，且 $p(x,y)\geqslant p_0>0$，$\sigma(x,y)$ 连

续且 $\sigma(x,y)\geqslant 0$，$\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的外法线方向，Ω 是 R^2 中的连通区域，它的边界 $\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 分段光滑。

以 $C^1(\Omega)$ 和 $C^2(\Omega)$ 分别记 Ω 上一切一阶和二阶连续可导函数的全体。

如果函数 $u(x,y)\in C^2(\Omega)$，并且具有一直到边界上的一阶连续导数，它在 Ω 内处处满足(1.1)的微分方程，且在边界上满足(1.1)的边界条件，那么称 $u(x,y)$ 为定解问题(1.1)的古典解。

实际上，上述古典解要求太苛刻了，我们力求放宽它的条件，而使(1.1)解的范围能加以扩大，为此先引进范数

$$\|u\|_{1,\Omega}^2=\iint_\Omega (u_x{}^2+u_y{}^2+u^2)\,dxdy \tag{1.2}$$

在范数(1.2)下，完备化 $C^1(\Omega)$ 所得到的函数空间记为 $H^1(\Omega)$，若引进内积

$$(u,v)_1=\iint_\Omega (u_xv_x+u_yv_y+uv)\,dxdy \tag{1.3}$$

则 $H^1(\Omega)$ 便是 Hilbert 空间，这种类型的 Hilbert 空间称为一阶 Соболев 空间．记 $\mathscr{D}(\Omega)$ 为 Ω 上一切无限可微且支集在 Ω 内的函数全体，$\mathscr{D}(\Omega)$ 在范数(1.2)下完备化，得到的空间记为 $H_0^1(\Omega)$

设 $C_*{}^1(\Omega)=\left\{u\,\middle|\, 在\,\Omega\,内分片一阶光滑，u\big|_{\Gamma_1}=0\right\}$，$C_*{}^1(\Omega)$ 在范数(1.2)下完备化所得到的空间等价于：

$$V=\left\{u\,\middle|\, u\in H^1(\Omega),\ u\big|_{\Gamma_1}=0\right\} \tag{1.4}$$

在 V 上赋于内积(1.3)，则 V 也是一个 Hilbert 空间，且

$$H_0^1(\Omega)\subset V\subset H^1(\Omega).$$

引进双线性泛函

$$B(u,v)=\iint_{\Omega}(pu_xv_x+pu_yv_y)dxdy+\int_{\Gamma_1}\sigma uvds$$

$$\forall u,v\in H^1(\Omega) \qquad (1.5)$$

因为当固定 u 时，$B(u,v)$ 是 v 的线性泛函，而固定 v 时，则是 u 的线性泛函。换句话说，若 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 为任意常数，那么

$$\begin{aligned}B(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,\beta_1v_1+\beta_2v_2)&=\alpha_1\beta_1B(u_1,v_1)\\&+\alpha_1\beta_2B(u_1,v_2)+\alpha_2\beta_1B(u_2,v_1)\\&+\alpha_2\beta_2B(u_2,v_1)\quad \forall u_1,u_2,v_1,v_2\in H^1(\Omega)\end{aligned} \qquad (1.6)$$

可以证明由(1.5)所定义的 $B(u,v)$ 具有下列性质：

i) 对称性。即 $B(u,v)=B(v,u)$ (1.7)

ii) 在 $V\times V$ 上连续。即存在一个常数 $M>0$，使

$$|B(u,v)|\leqslant M\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}\quad \forall u,v\in V \qquad (1.8)$$

iii) 在 V 上是强制的。即存在常数 $\gamma>0$，使

$$B(u,u)\geqslant\gamma\|u\|_{1,\Omega}^2\quad \forall u\in V \qquad (1.9)$$

作线性泛函

$$f(v)=\iint_{\Omega}f(v)dxdy+\int_{\Gamma_1}gvds \qquad (1.10)$$

显然，$f(v)$ 也是 v 的连续泛函。

(1.1)相应的变分问题是：求 $u\in V$，使得

$$B(u,v)=f(v)\quad \forall v\in V \qquad (1.11)$$

满足(1.11)的解 u 称为(1.1)的弱解。将弱解所在的空间称为容许空间，一般也称试探空间。同时由于(1.11)必须对 V 中任一元素 v 都要成立，故称 V 为检验空间。上述问题其容许空间和检验空间取同一个 Hilbert 空间 V，这时一般

又称 V 为能量空间。

变分问题是在容许空间中求解的。它并未涉及到边界 Γ_2 上的条件。也就是说，在求解变分问题(1.11)时，并不要求在满足 Γ_2 上条件的函数类内求解，所以，这类边界条件称为自然边界条件．而边界 Γ_1 上的条件称为本质边界条件，或称为强加边界条件。

(1.1)的古典解与弱解的关系，可由下列命题看出。

命题 1.1 若 $u\in C^2(\Omega)$ 是 (1.1) 的古典解，则 u 必是(1.11)的解，即 u 也是(1.1)的弱解。反之若(1.11)的解为 u，且 $u\in C^2(\Omega)$ 则 u 也是(1.1)古典解。

证 设 $u\in C^2(\Omega)$ 是 (1.1) 的古典解，则对 $\forall v\in V$，用 v 乘(1.1)方程两边并取积分，于是有

$$-\iint_\Omega v\,\mathrm{div}(p\nabla u)dxdy=\iint_\Omega fv\,dxdy$$

也可写成

$$-\iint_\Omega (\mathrm{div}(vp\nabla u)-p\nabla v\nabla u)dxdy$$
$$=\iint_\Omega fv\,dxdy$$

利用 Gauss 定理，得

$$\iint_\Omega p\nabla u\nabla v\,dxdy-\oint_{\partial\Omega} v\,p\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_\Omega f\,vdxdy$$

注意到 $v\in V$，以及 u 满足(1.1)的边界条件，故得

$$B(u,v)=(f,v)\quad \forall v\in V$$

即 u 也满足(1.11)。

反之，若 u 是(1.11)的弱解，且 $u\in C^2(\Omega)$，那么，由 $v\Big|_{\Gamma_1}=0$ 得

$$\iint_{\Omega} p\nabla u\nabla v\,dxdy=\iint_{\Omega}\Big[\mathrm{div}\,(pv\nabla u)$$

$$-v\,\mathrm{div}\,(p\nabla u)\Big]dxdy$$

$$=\oint_{\partial\Omega} pv\,\frac{\partial u}{\partial n}ds-\iint_{\Omega} v\mathrm{div}(p\nabla u)dxdy$$

$$=\int_{\Gamma_2} pv\,\frac{\partial u}{\partial n}ds-\iint_{\Omega} v\,\mathrm{div}(p\nabla u)dxdy$$

代入(1.11)得

$$\int_{\Gamma_2}\sigma uv\,ds+\int_{\Gamma_2} vp\,\frac{\partial u}{\partial n}ds-\iint_{\Omega} v\,\mathrm{div}(p\nabla u)dxdy$$

$$=\iint_{\Omega} fv\,dxdy+\int_{\Gamma_2} gvds$$

故有

$$\iint_{\Omega} v[\mathrm{div}(p\nabla u)+f]dxdy+\int_{\Gamma_2} v\left(g-p\,\frac{\partial u}{\partial n}-\sigma u\right)ds=0$$

由于 v 的任意性，可得 u 满足(1.1)。即 u 为 (1.1) 的古典解。证毕。

(1.11)称为边值问题(1.1)的 Galerkin 变分形式。其解的存在，由下述 Lax－Milgram 定理保证。

定理 1.1 (Lax－Milgram 定理)设 V 是一个Hilbert空间，$B(u,v)$是 $V\times V$ 上的双线性泛函，且满足

1) 对称性 $B(u,v)=B(v,u)\quad \forall u,v\in V$ (1.12)

2) 有界性 $|B(u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|\quad \forall u,v\in V$ (1.13)

3) 强制性 $B(u,v)\geqslant\gamma\|u\|^2\quad \forall u\in V$ (1.14)

这里M，γ 是不依赖于 u，v 的正常数，$\|\cdot\|$为V中的范数。而 f 是V上的线性连续泛函，那么变分问题

求 $u\in V$ 使得 $B(u,v)=f(v)\quad \forall v\in V$ (1.15)

存在唯一的解 u^*，并且有以下估计式

$$\|u^*\|\leqslant\frac{1}{\gamma}\|f\|_* \tag{1.16}$$

其中 $\|\cdot\|_*$ 是 V 的对偶范数。

证 由于 $B(u,v)$ 满足对称正定条件，故可以在 V 上定义新内积 $[u,v]=B(u,v)$。并且有

$$\gamma\|v\|^2\leqslant[v,v]\leqslant M\|v\|^2$$

即新内积的范数等价于 $\|\cdot\|$，对于 V 的新范数 $f(v)$ 仍是线性有界泛函.根据 Riesz 定理可知,存在唯一的元素 $u^*\in V$ 使得

$$[u^*,v]=f(v)\quad\forall v\in V$$

即

$$B(u^*,v)=f(v)\quad\forall v\in V$$

于是 u^* 就是所求的解。另一方面

$$\gamma\|u^*\|^2\leqslant B(u^*,u^*)=[u^*,u^*]=f(u^*)\leqslant\|f\|_*\|u^*\|$$

从而估计式(1.16)成立。证毕。

作二次泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}B(v,v)-f(v) \tag{1.17}$$

$J(v)$的极小值问题是：求 $u\in V$，使得

$$J(u)=\min_{v\in V}J(v) \tag{1.18}$$

称(1.18)为(1.1)的 Ritz 变分形式。

定理 1.2 设 V 是 Hilbert 空间，$B(u,v)$是 $V\times V$ 上满足条件(1.12)－(1.14)的双线性泛函，f 是 V 上线性连续泛函，$J(v)$为(1.17)所定义的二次泛函。那么，(1.18)和(1.11)两个问题中

1） 任一个问题有解，则解不多于一个；

2） 任一个问题的解，必是另一个问题的解；

3） 如果 u^* 是它们的解，那么

$$J(v)-J(u^*)=\frac{1}{2}B(v-u^*,v-u^*) \quad \forall v\in V \quad (1.19)$$

证 首先证明(1.11)的解是唯一的。设 u_1,u_2 为(1.11)的解，且 $w=u_1-u_2$。由于

$$B(u_1,v)=f(v) \quad \forall v\in V$$
$$B(u_2,v)=f(v) \quad \forall v\in V$$

所以有

$$B(u_1-u_2,\ v)=0 \quad \forall v\in V$$

也就是

$$B(w,v)=0 \quad \forall v\in V$$

令 $v=w$，则有 $B(w,w)=0$。由 B 的正定性，可知 $w=0$，即 $u_1=u_2$。

其次证明(1.18)的解也是(1.11)的解。设 $v\in V$，且 λ 为任一实数，并设 u 为(1.18)的解，那么

$$J(u+\lambda v)=\frac{1}{2}B(u,u)+\lambda B(u,v)$$
$$+\frac{1}{2}\lambda^2 B(v,v)-f(u)-\lambda f(v)$$
$$\geqslant J(u)=\frac{1}{2}B(u,u)-f(u)$$

即
$$\frac{1}{2}\lambda^2 B(v,v)+\lambda(B(v,v)-f(v))\geqslant 0$$

由于 λ 的任意性，故下式一定成立

$$B(u,v)=f(v) \quad \forall v\in V$$

即 u 也是(1.11)的解。

最后证明(1.11)的解，也一定是(1.18)的解。