

高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)

高等数学

下 册

蔡森甫 刘浩荣 编著

同济大学出版社

内 容 简 介

本书是根据1981年12月教育部组织审订的高等数学函授教学大纲编写而成。编写时还参照了全日制工科高等数学教学大纲，并参考了我校原有的函授高等数学教材。全书分上下两册，下册的内容包括向量代数及空间解析几何；多元函数的微分法及其应用；重积分、曲线积分与曲面积分；无穷级数与微分方程。

本书便于自学，可作为高等工科院校的函授高等数学教材，也可作为全日制工科大学、职工业余大学、电视大学及其他工程技术人员自学高等数学的参考书。

责任编辑 孟玉恩

封面设计 徐 繁

高 等 数 学 下 册

蔡森甫 刘浩荣 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路1239号)

新华书店上海发行所发行

常熟文化印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 21 字数 601千字

1988年2月第1版 1988年2月第1次印刷

印数 1—20,500 科技新书目 160—261

ISBN7—5608—0029—7/0.15

定价 4.15元
4.20元

目 录

第七章 空间解析几何与向量代数	1
§ 7.1 空间直角坐标系	1
一、空间点的直角坐标	1
二、空间两点间的距离	3
习题 7—1	5
§ 7.2 向量及其加减法 向量与数量的乘法	5
一、向量概念	5
二、向量的加减法	6
三、向量与数量的乘法	8
习题 7—2	11
§ 7.3 向量的坐标	12
一、向量在轴上的投影与投影定理	12
二、向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标	14
三、向量的模与方向余弦的坐标表示式	18
习题 7—3	20
§ 7.4 数量积 向量积 $\wedge$ 混合积	21
一、两向量的数量积	21
二、两向量的向量积	26
三、向量的混合积	30
习题 7—4	32
§ 7.5 平面及其方程	33
一、平面的点法式方程	33
二、平面的一般方程	35
三、两平面的夹角	37
习题 7—5	40
§ 7.6 空间的直线及其方程	41

一、空间直线的一般方程	41
二、空间直线的对称式方程与参数方程	42
三、两直线的夹角	45
四、直线与平面的夹角	47
五、杂例	48
习题 7—6	50
§ 7.7 曲面及其方程	52
一、曲面方程的概念	52
二、旋转曲面	54
三、柱面	57
习题 7—7	58
§ 7.8 空间曲线及其方程	59
一、空间曲线的一般方程	59
二、空间曲线的参数方程	61
三、空间曲线在坐标面上的投影	62
习题 7—8	63
§ 7.9 二次曲面	64
一、椭球面	64
二、抛物面	66
三、双曲面	68
习题 7—9	70
§ 7.10 空间立体图形的作法举例	70
习题 7—10	73
内容提要	73
自学指导	79
复习思考题	84
测验作业题(七)	86
第八章 多元函数的微分法及其应用	88
§ 8.1 多元函数的基本概念	88
一、多元函数概念	88

二、二元函数的极限	92
三、二元函数的连续性	94
习题 8—1	97
§ 8.2 偏导数	98
一、偏导数的定义及其算法	98
二、高阶偏导数	103
习题 8—2	105
§ 8.3 全微分及其应用	106
一、全微分的定义	106
二、全微分在近似计算及误差估计中的应用	111
习题 8—3	114
§ 8.4 多元复合函数的求导法则	115
习题 8—4	120
§ 8.5 隐函数的求导公式	121
习题 8—5	124
§ 8.6 偏导数的几何应用	125
一、空间曲线的切线与法平面	125
二、曲面的切平面与法线	127
习题 8—6	130
§ 8.7 方向导数与梯度	131
一、方向导数	131
二、梯度	134
习题 8—7	138
§ 8.8 多元函数的极值及其求法	139
一、多元函数的极值及最大值、最小值	139
二、条件极值 拉格朗日乘数法	145
习题 8—8	149
§ 8.9 最小二乘法	150
习题 8—9	156
内容提要	156

自学指导	163
复习思考题	168
测验作业题(八)	170
第九章 重积分	171
§ 9.1 二重积分的概念与性质	171
一、二重积分的概念	171
二、二重积分的性质	175
习题 9—1	179
§ 9.2 利用直角坐标计算二重积分	180
习题 9—2	189
§ 9.3 利用极坐标计算二重积分	191
习题 9—3	199
⁴ § 9.4 二重积分的换元法	201
⁴ 习题 9—4	206
§ 9.5 二重积分的应用	207
一、曲面的面积	208
二、平面薄片的重心	212
三、平面薄片的转动惯量	214
习题 9—5	216
§ 9.6 三重积分的概念及其在直角坐标系中的算法	216
习题 9—6	222
§ 9.7 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	222
一、利用柱面坐标计算三重积分	223
二、利用球面坐标计算三重积分	225
习题 9—7	230
⁴ § 9.8 含参变量的积分	232
⁴ 习题 9—8	238
内容提要	239
自学指导	246
复习思考题	264

测验作业题(九)	267
第十章 曲线积分与曲面积分	268
§ 10.1 对弧长的曲线积分	268
一、对弧长的曲线积分的概念与性质	268
二、对弧长的曲线积分的计算法	271
习题 10—1	276
§ 10.2 对坐标的曲线积分	277
一、对坐标的曲线积分的概念与性质	277
二、对坐标的曲线积分的计算法	280
三、两类曲线积分之间的联系	286
习题 10—2	287
§ 10.3 格林公式及其应用	289
一、格林公式	289
二、平面上曲线积分与路径无关的条件	292
三、二元函数的全微分求积	297
习题 10—3	301
§ 10.4 对面积的曲面积分	302
一、对面积的曲面积分的概念与性质	302
二、对面积的曲面积分的计算法	304
习题 10—4	308
§ 10.5 对坐标的曲面积分	308
一、对坐标的曲面积分的概念与性质	308
二、对坐标的曲面积分的计算法	314
三、两类曲面积分之间的联系	320
习题 10—5	322
§ 10.6 高斯公式 ⁴ 通量与散度	322
一、高斯公式	322
二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件	327
⁴ 三、通量与散度	328
习题 10—6	330

⁴ § 10.7 斯托克斯公式 环流量与旋度	331
一、斯托克斯公式	331
二、空间曲线积分与路径无关的条件	338
三、环流量与旋度	339
⁴ 习题 10—7	342
内容提要	342
自学指导	353
复习思考题	377
测验作业题(十)	379
第十一章 无穷级数	381
§ 11.1 常数项级数的概念和性质	381
一、常数项级数的概念	381
二、无穷级数的基本性质	384
三、级数收敛的必要条件	387
习题 11—1	388
§ 11.2 常数项级数的审敛法	389
一、正项级数的比较审敛法	389
二、正项级数的比值审敛法与根值审敛法	393
三、交错级数及其审敛法	398
四、绝对收敛与条件收敛	400
习题 11—2	404
⁴ § 11.3 广义积分的审敛法 Γ -函数	406
一、广义积分的审敛法	406
二、 Γ -函数	413
⁴ 习题 11—3	416
§ 11.4 幂级数	417
一、函数项级数的一般概念	417
二、幂级数及其收敛性	418
三、幂级数的运算	423
习题 11—4	425

§ 11.5 函数展开成幂级数	426
一、泰勒级数	426
二、函数展开成幂级数	429
三、间接展开法	433
习题 11—5	436
§ 11.6 函数的幂级数展开式的应用	436
一、近似计算	436
二、欧拉公式	441
习题 11—6	443
§ 11.7 傅立叶级数	443
一、三角级数 三角函数系的正交性	444
二、函数展开成傅立叶级数	446
习题 11—7	455
§ 11—8 正弦级数和余弦级数	456
一、奇函数和偶函数的傅立叶级数	456
二、函数展开成正弦级数或余弦级数	460
习题 11—8	462
§ 11.9 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数	463
习题 11—9	467
§ 11.10 傅立叶级数的复数形式	467
习题 11—10	470
内容提要	471
自学指导	481
复习思考题	398
测验作业题(十一)	501
第十二章 微分方程	503
§ 12.1 微分方程的基本概念	503
习题 12—1	508
§ 12.2 可分离变量的一阶微分方程	509
习题 12—2	519

§ 12.3 齐次方程	520
一、齐次方程	520
二、可化为齐次的方程	525
习题 12—3	528
§ 12.4 一阶线性微分方程	528
一、线性方程	528
二、贝努利方程	535
习题 12—4	537
§ 12.5 全微分方程	538
习题 12—5	542
§ 12.6 可降阶的高阶微分方程	543
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	543
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	545
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	548
习题 12—6	552
§ 12.7 高阶线性微分方程及其解的结构	553
一、二阶线性微分方程举例	553
二、线性微分方程的解的结构	556
习题 12—7	559
§ 12.8 二阶常系数齐次线性微分方程	560
习题 12—8	570
§ 12.9 二阶常系数非齐次线性微分方程	571
一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型	571
二、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$ 型	574
习题 12—9	579
§ 12.10 欧拉方程	579
习题 12—10	582
§ 12.11 微分方程的幂级数解法举例	582
习题 12—11	586
§ 12.12 常系数线性微分方程组解法举例	587

习题 12—12	590
内容提要	590
自学指导	598
复习思考题	621
测验作业题(十二)	623
习题答案	625

第七章 空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，我们曾经通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数建立了对应关系，从而把平面上的图形和方程对应起来，就可以用代数方法来研究几何问题。空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的。

正象平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的。

我们已经知道平面解析几何是以坐标法为基础的，而坐标法的建立则有赖于有向线段，由此可见，有向线段是十分重要的。我们指出，有向线段的重要性还不仅于此。更重要的是有向线段还可以用来表示既有大小又有方向的量，这种量就是在物理学、力学中所常用的向量。

本章首先建立空间直角坐标系，并引进有着广泛应用的向量，介绍向量的一些运算，然后以向量为工具来讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容。

§ 7.1 空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

为了沟通空间图形与数的研究，我们需要建立空间的点与有序数组之间的联系。这种联系通常是用类似于平面解析几何的方法通过引进空间直角坐标系来实现的。具体讨论如下：

过空间一个定点 O ，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位。这三条轴分别叫做 x 轴（横轴）、 y 轴（纵轴）、 z 轴（竖轴），统称坐标轴。通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正方向要符合右手规则，即以右手握

住 z 轴, 当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向 (图 7-1)。这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系。点 O 叫做坐标原点 (或原点)。

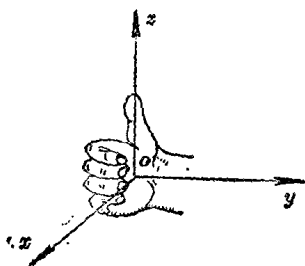


图 7-1

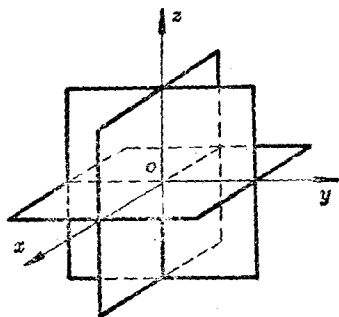


图 7-2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样定出的三个平面统称为坐标面。例如称 x 轴及 y 轴所确定的坐标面为 xy 面。三个坐标面把空间分成八个部分, 每一部分叫做卦限。如把含有正向 x 轴、正向 y 轴、正向 z 轴的那个卦限叫做第一卦限 (图 7-2)。

取定了空间直角坐标系后, 就可以建立起空间的点与有序数组之间的对应关系。

设 M 为空间的一个已知点。我们过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴, 它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 P 、 Q 、 R (图 7-3), 这三点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标依次设为 x 、 y 、 z (即在坐标轴上有向线段的值 OP 、 OQ 、 OR 分别为 x 、 y 、 z)。于是空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x 、 y 、 z 。这组数 x 、 y 、 z 就叫做点 M 的坐标, 并依次称 x 、 y 和 z 为点 M 的横坐标, 纵坐标和竖坐标。坐标为 x 、 y 、 z 的点 M 通常记作 $M(x, y, z)$ 。

反过来, 已知一有序数组 x 、 y 、 z , 我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P , 在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q , 在 z 轴上取坐标为 z 的点 R , 然后通过 P 、 Q 与 R 分别作 x 轴、 y 轴与 z 轴的垂直平面。这三

个垂直平面的交点 M 便是以有序数组 x, y, z 为坐标的点(图7-3)。

这样,通过空间直角坐标系,我们就建立了空间的点 M 和有序数组 x, y, z 之间的一一对应关系.

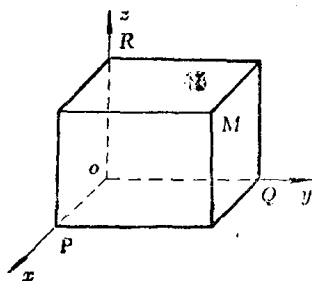


图 7-3

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征。例如：如果点 M 在 $yo z$ 面上，则 $x=0$ ；同样， zox 面上的点， $y=0$ ； xoy 面上的点， $z=0$ 。如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$ ；同样， y 轴上的点， $z=x=0$ ； z 轴上的点， $x=y=0$ 。如点 M 为原点，则 $x=y=z=0$ 。

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点。为了用两点的坐标来表达它们间的距离 d ，我们过 M_1 、 M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面。这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 7-4)。

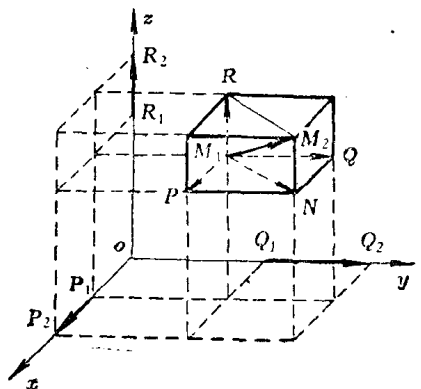


图 7-4

由于 $\triangle M_1NM_2$ 为直角三角形, $\angle M_1NM_2$ 为直角, 所以

$$d^2 = |M_1 M_2|^2 = |M_1 N|^2 + |N M_2|^2.$$

又因 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形, 且 $|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2$, 所以

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

由于

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式。

特殊地, 点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 求证以 $M_1(4, 3, 1)$ 、 $M_2(7, 1, 2)$ 、 $M_3(5, 2, 3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形。

解 因为

$$|M_1M_2|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14,$$

$$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6,$$

$$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6,$$

所以 $|M_2M_3| = |M_3M_1|$, 即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形。

例 2 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点。

解 因为所求的点 M 在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0, 0, z)$, 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\begin{aligned} & \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} \\ &= \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2}. \end{aligned}$$

两边去根号, 解得

$$z = \frac{14}{9}.$$

所以, 所求的点为 $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$ 。

习 题 7—1

1. 在空间直角坐标系中, 定出下列各点的位置:

$$A(1, 2, 3); \quad B(-2, 3, 4);$$

$$C(2, -3, -4); \quad D(3, 4, 0);$$

$$E(0, 4, 3); \quad F(3, 0, 0).$$

2. 求下列各对点之间的距离:

$$(1) (0, 0, 0), (2, 3, 4);$$

$$(2) (4, -2, 3), (-2, 1, 3).$$

3. 求点 $M(4, -3, 5)$ 与原点及各坐标轴间的距离.

4. 试证以三点 $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$ 、 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

5. 在 $yo\bar{z}$ 平面上, 求与三已知点 $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

§ 7.2 向量及其加减法 向量与数量的乘法

一、向 量 概 念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时, 通常会遇到这样一类量, 它们既有大小, 又有方向, 例如力、力矩、位移、速度、加速度等等, 这一类量叫做向量 (或矢量).

在数学上, 往往用一条有方向的线段, 即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为始点、 M_2 为终点的有向线段所表示的向量, 记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (图 7-5). 此外, 有时用一个粗体字母或用一个上面加箭头的字母来表示向量, 例如向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{F}$ 或 $\vec{a}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{F}$ 等等.

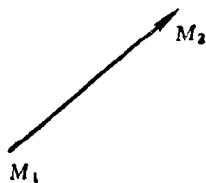


图 7-5

向量的大小叫做向量的模。向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 、 $\mathbf{a}$ 、 $\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 、 $|\mathbf{a}|$ 、 $|\vec{a}|$ 。模等于 1 的向量叫做单位向量。模等于零的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$ 。零向量的方向可以看作是任意的。在直角坐标系中，如以坐标原点 O 为始点，向一个点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$ ，这个向量叫做点 M 对于 O 点的向径（或矢径），常用粗体字 $\mathbf{r}$ 表示。

在实际问题中，有些向量与其始点有关，有些向量与其始点无关。由于一切向量的共性是它们都有大小与方向，所以在数学上我们只研究与始点无关的向量，并称这种向量为自由向量（以后简称向量），即只考虑向量的大小和方向，而不论它的始点在什么地方。当遇到与始点有关的向量时（例如，谈到某一质点的运动速度时，这速度就是与所考虑的那一质点的位置有关的向量），可在一般原则下作特别处理。

由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的模相等，且方向相同，我们就说向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是相等的，记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 。这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的。

由以上关于两个向量相等的规定可以看出，两个向量相等必须同时满足三个条件：

- (1) 两向量的长度相等；
- (2) 两向量平行（或同在一直线上）；
- (3) 两向量的指向（由起点到终点的方向）相同。因此要考虑一个向量等式是否成立，必须分别考虑这三个条件是否都满足。

二、向量的加减法

根据力学上实验的结果，我们可以得到求两力的合力的平行四边形法则。对于速度、加速度也有相同的结果。仿此，我们对一般向量规定加法运算如下。

设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ， $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ ，以 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 为边作一平行四边形 $OACB$ ，取对角线 $\overrightarrow{OC}$ ，它也表示一向量，记作 $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ （图 7-6），我们称向量 $\mathbf{c}$ 为向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的和，记作

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$