高等学校函授教材
（兼作高等教育自学用书）

高等数学

下册

蔡森甫　刘浩荣　编著

同济大学出版社

内 容 简 介

本书是根据1981年12月教育部组织审订的高等数学函授教学大纲编写而成。编写时还参照了全日制工科高等数学教学大纲，并参考了我校原有的函授高等数学教材。全书分上下两册，下册的内容包括向量代数及空间解析几何；多元函数的微分法及其应用；重积分、曲线积分与曲面积分；无穷级数与微分方程。

本书便于自学，可作为高等工科院校的函授高等数学教材，也可作为全日制工科大学、职工业余大学、电视大学及其他工程技术人员自学高等数学的参考书。

责任编辑　孟玉恩
封面设计　徐　繁

高 等 数 学
下 册

蔡森甫　刘浩荣　编著

同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
常熟文化印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 21　字数 601 千字
1988年2月第1版　1988年2月第1次印刷
印数 1—20,500　科技新书目 160—261
ISBN7—5608—0029—7/O.15
定价 2.15元
2.20

目　录

第七章　空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，我们曾经通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数建立了对应关系，从而把平面上的图形和方程对应起来，就可以用代数方法来研究几何问题。空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的。

正象平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的。

我们已经知道平面解析几何是以坐标法为基础的，而坐标法的建立则有赖于有向线段，由此可见，有向线段是十分重要的。我们指出，有向线段的重要性还不仅于此。更重要的是有向线段还可以用来表示既有大小又有方向的量，这种量就是在物理学、力学中所常用的向量。

本章首先建立空间直角坐标系，并引进有着广泛应用的向量，介绍向量的一些运算，然后以向量为工具来讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容。

§7.1　空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

为了沟通空间图形与数的研究，我们需要建立空间的点与有序数组之间的联系。这种联系通常是用类似于平面解析几何的方法通过引进空间直角坐标系来实现的。具体讨论如下：

过空间一个定点O，作三条互相垂直的数轴，它们都以O为原点且一般具有相同的长度单位。这三条轴分别叫做x轴（横轴）、y轴（纵轴）、z轴（竖轴），统称坐标轴。通常把x轴和y轴配置在水平面上，而z轴则是铅垂线；它们的正方向要符合右手规则，即以右手握

住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时大拇指的指向就是 z 轴的正向（图 7-1）。这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系。点 O 叫做坐标原点(或原点)。

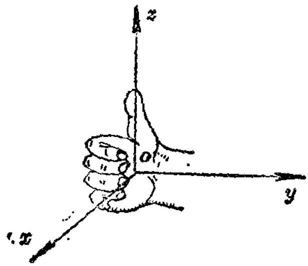

图 7-1

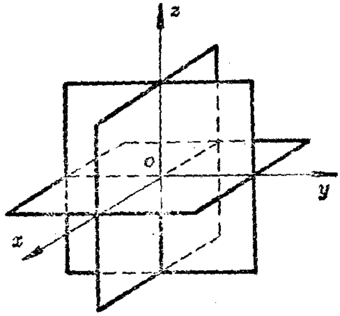

图 7-2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面。例如称 x 轴及 y 轴所确定的坐标面为 xoy 面。三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限。如把含有正向 x 轴、正向 y 轴、正向 z 轴的那个卦限叫做第一卦限(图 7-2)。

取定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与有序数组之间的对应关系。

设 M 为空间的一个已知点。我们过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R(图 7-3)，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次设为 x, y, z（即在坐标轴上有向线段的值 OP、OQ、OR 分别为 x, y, z)。于是空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x, y, z。这组数 x, y, z 就叫做点 M 的坐标，并依次称 x, y 和 z 为点 M 的横坐标，纵坐标和竖坐标。坐标为 x, y, z 的点 M 通常记作 $M(x, y, z)$。

反过来，已知一有序数组 x, y, z，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后通过 P、Q 与 R 分别作 x 轴、y 轴与 z 轴的垂直平面。这三

个垂直平面的交点M便是以有序数组x, y, z为坐标的点(图 7-3)。

这样，通过空间直角坐标系，我们就建立了空间的点M和有序数组x, y, z之间的一一对应关系。

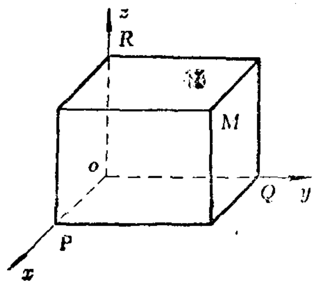

图 7-3

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征。例如：如果点M在yoz面上，则$x=0$；同样，zox面上的点，$y=0$；xoy面上的点，$z=0$。如果点M在x轴上，则$y=z=0$；同样，y轴上的点，$z=x=0$；z轴上的点，$x=y=0$。如点M为原点，则$x=y=z=0$。

二、空间两点间的距离

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点。为了用两点的坐标来表达它们间的距离d，我们过M_1、M_2各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面。这六个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体(图 7-4)。

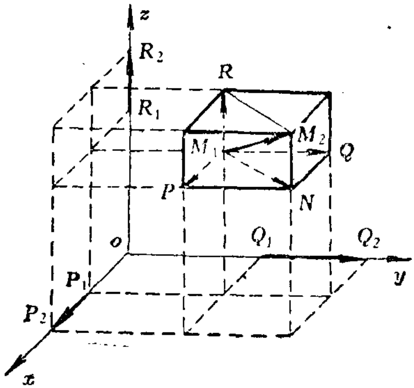

图 7-4

由于ΔM_1NM_2为直角三角形，$\angle M_1NM_2$为直角，所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2.$$

又因ΔM_1PN也是直角三角形，且$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$，所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2.$$

由于

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式。

特殊地，点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 求证以 $M_1(4, 3, 1)$、$M_2(7, 1, 2)$、$M_3(5, 2, 3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形。

解 因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形。

例 2 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点。

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，所以设该点为 $M(0, 0, z)$，依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}.$$

两边去根号，解得

$$z=\frac{14}{9}.$$

所以，所求的点为 $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$.

习 题 7—1

1. 在空间直角坐标系中，定出下列各点的位置：

$A(1, 2, 3)$； $B(-2, 3, 4)$；

$C(2, -3, -4)$； $D(3, 4, 0)$；

$E(0, 4, 3)$； $F(3, 0, 0)$。

2. 求下列各对点之间的距离：

(1) $(0, 0, 0)$，$(2, 3, 4)$；

(2) $(4, -2, 3)$，$(-2, 1, 3)$。

3. 求点 $M(4, -3, 5)$ 与原点及各坐标轴间的距离。

4. 试证以三点 $A(4, 1, 9)$、$B(10, -1, 6)$、$C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形。

5. 在 yoz 平面上，求与三已知点 $A(3, 1, 2)$、$B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点。

§7.2 向量及其加减法 向量与数量的乘法

一、向量概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，通常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向，例如力、力矩、位移、速度、加速度等等，这一类量叫做向量（或矢量）。

在数学上，往往用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。以 M_1 为始点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$（图 7-5）。此外，有时用一个粗体字母或用一个上面加箭头的字母来表示向量，例如向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{j}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等等。

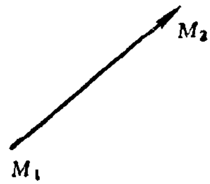

图 7-5

向量的大小叫做向量的模。向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$。模等于1的向量叫做单位向量。模等于零的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$。零向量的方向可以看作是任意的。在直角坐标系中，如以坐标原点 O 为始点，向一个点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$，这个向量叫做点 M 对于 O 点的向径(或矢径)，常用粗体字 $\boldsymbol{r}$ 表示。

在实际问题中，有些向量与其始点有关，有些向量与其始点无关。由于一切向量的共性是它们都有大小与方向，所以在数学上我们只研究与始点无关的向量，并称这种向量为自由向量（以后简称向量），即只考虑向量的大小和方向，而不论它的始点在什么地方。当遇到与始点有关的向量时(例如，谈到某一质点的运动速度时，这速度就是与所考虑的那一质点的位置有关的向量)，可在一般原则下作特别处理。

由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，且方向相同，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的。

由以上关于两个向量相等的规定可以看出，两个向量相等必须同时满足三个条件：

(1) 两向量的长度相等；

(2) 两向量平行(或同在一直线上)；

(3) 两向量的指向(由起点到终点的方向)相同。因此要考虑一个向量等式是否成立，必须分别考虑这三个条件是否都满足。

二、向量的加减法

根据力学上实验的结果，我们可以得到求两力的合力的平行四边形法则。对于速度、加速度也有相同的结果。仿此，我们对一般向量规定加法运算如下。

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为边作一平行四边形 $OACB$，取对角线 $\overrightarrow{OC}$，它也表示一向量，记作 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$ (图 7-6)，我们称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$