气象统计预报基础

章景德　高富荣　郑祖光　编著

气象出版社

气象统计预报基础

章景德　高富荣　郑祖光　编著

气象出版社

（京）新登字046号

内 容 简 介

本书较系统而简明地介绍了气象统计分析预报的基础知识以及方法的原理和应用。全书共分三篇：第一篇是线性代数，第二篇是概率论和数理统计，第三篇讲述常用的统计预报方法，包括：预报因子的收集和筛选以及预报模型的建立，回归分析，判别分析，经验正交函数分解，聚类分析，周期分析，平稳时间序列分析，数值预报产品的统计释用（MOS）的方法及其应用等。每章后面附有习题，讲述概念清楚，深入浅出，通俗易懂，便于自学。

本书可作为高等院校气象专业大专学生的教材，也可供广大气象业务工作者和有关院校师生参考。

气象统计预报基础

章景德　高富荣　郑祖光　编著

责任编辑：李如彬　终审：纪乃晋

*

封面设计：严瑜仲　责任技编：席大光　责任校对：黄丽荣

*

气象出版社出版

（北京西郊白石桥路46号　邮编100081）

北京昌平环球印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行　全国各地新华书店经销

*

开本：850×1168 1/32　印张：18.625　字数：479千字

1995年3月第1版　1995年3月第1次印刷

印数：1—1700

ISBN 7-5029-1809-4/P·0701（课）

定价：12.70元

前　言

当前，在改革开放和新技术革命的新形势下，气象部门迫切需要一支数量上能基本满足要求，质量上又有较高水平的专业队伍，以加速实现气象现代化。

根据这个总要求，则需大力发展气象教育事业，尤其需要办好大专层次教育，而进行教材建设又是一项重要的基础工作。为此，我司委托北京气象学院编写了一套适合气象专科层次的通用教材，同时它也可用于专科函授、自学考试，还可作为气象、农林、水利、航空等部门的气象专业人员学习参考用书。这样就弥补了过去气象大专层次教材的空白。

这套教材是北京气象学院在经过多届教学实践的基础上进行逐步修改而成的，共编写了《计算方法》、《气象学》、《天气学教程》、《动力气象学》、《数值天气预报基础》、《气象统计预报基础》、《天气分析和诊断方法》等七种。编写的指导思想是尽力面向实际和反映新技术发展及新方法的应用，在保持教材的科学性、系统性和一定水平的条件下，力求通俗易懂，从而照顾到中级气象专业人员进行学习参考使用。

参加这套教材编写工作的都是北京气象学院有教学经验的教师。初稿完成后，我司还组织了部分气象高等院校的专家、教授进行审查，对教材修改提出了许多宝贵的意见，编者根据这些意见又进一步作了修改。在修改过程中，还得到了有关专家和教授的指导，并对教材进行了全面审订工作，使得教材趋于完善，在此一并表示衷心感谢。

中国气象局科教司

序 言

本世纪70年代以来，以概率论、线性代数和数理统计为基础的天气预报方法在我国气象台站得到广泛的应用，近些年来，由于计算机的逐渐普及和计算技术的发展，这个方法得以迅速进展，内容越来越丰富，逐步形成了一门新的学科——气象统计分析和预报。随着学科的不断发展，又开拓出一些新的领域，尤其是多元分析、时间序列、随机微分方程以及动力-统计等分支进展很快。例如，多元分析中的方向数据分析、投影追踪，动力-统计中的分布函数法、矩方程法、蒙特卡洛法和卡曼滤波法等。总之，气象统计预报方法已被广大气象台站所采用，成为天气预报中不可缺少的方法，具有很强的实用性。因此，在气象院校中开设统计预报课程是必要的。

但是，目前缺少适合大专层次教学以及大专函授、自学使用的气象统计预报教材。为了填补这个空白，在中国气象局科教司的指导和支持下，我们编写了这本书。在编写过程中力求做到概念清楚，深入浅出，通俗易懂，便于自学。在内容上，力求比较系统而简洁地讲解气象统计分析和统计预报两方面的基础知识——概率论、线性代数和数理统计，为学习后面的具体方法打下基础；同时注意在众多的预报方法中选材，把常用的几种基本方法收入书中，并加进目前推广的新技术，如MOS方法等。

全书共分三篇。第一、二篇分别讲解线性代数以及概率论、数理统计的基本知识。第三篇讲述统计分析和预报的方法，首先介绍预报因子的收集和筛选；然后是几种常用方法，把重点放在回归分析和平稳时间序列分析上，同时介绍了判别分析、经验正交函数分解、聚类分析以及周期分析等；最后专门阐述数值预报产品的统计释用（MOS）方法及其应用。为了帮助学生理解和掌

握所讲的内容，较多的给出示意性例子以及在气象上实际应用的例子，同时在每章后面附有复习思考题和习题。

使用本书作为教材时，要按日校和函授的特点进行教学。对于日校教学，可以根据学时选讲带*号的章节；对于函授教学则可不讲这些内容，其余章节应在“以自学为主，面授为辅”的原则下完成教学。在教学过程中，可选一个或两个基本方法安排学生上机实习，以加深对方法的理解，提高上机的能力。

本书第一篇和第二篇由高富荣编写；第三篇第十一至十五章由景德编写，十六至十八章由郑祖光编写；全部写出后，由章景德统编定稿。北京大学地球物理系黄嘉佑教授审阅了全书文稿，提出了宝贵的修改意见，我们在此特表谢意。由于编者水平所限，错误和不足之处在所难免，敬请读者予以指正。

编者

1992年于北京气象学院

目　录

前言

序言

第一篇　线性代数基础

第一章　行列式……………………………… (2)

§1.1　n阶行列式的定义……………………… (2)

§1.2　行列式的基本性质……………………… (9)

§1.3　拉普拉斯(Laplace)展开定理……………… (18)

§1.4　克莱姆法则……………………………… (21)

习题一………………………………………… (25)

第二章　矩阵与向量………………………… (28)

§2.1　矩阵的概念……………………………… (28)

§2.2　矩阵的运算……………………………… (30)

§2.3　可逆矩阵的逆矩阵……………………… (37)

§2.4　向量及其运算…………………………… (41)

习题二………………………………………… (45)

第三章　线性方程组解的结构……………… (48)

§3.1　n维向量组的线性相关与线性无关…………… (48)

§3.2　矩阵的初等变换与矩阵的秩……………… (53)

§3.3　线性方程组解的结构…………………… (60)

§3.4　正交投影与最小二乘法………………… (71)

习题三………………………………………… (80)

第四章　线性方程组解的计算方法………… (84)

§4.1　用矩阵的初等行变换求解线性方程组………… (84)

§4.2　高斯-亚当消去法 ……………………… (88)

§4.3　求解与求逆的并行方案……………………（93）
§4.4　求解求逆紧凑方案…………………………（95）
习题四………………………………………………（97）
第五章　矩阵的特征值与特征向量………………（98）
§5.1　矩阵的特征值和特征向量……………………（98）
§5.2　实对称矩阵的特征值和特征向量……………（102）
§5.3　用迭代法求特征值和特征向量………………（108）
§5.4　二次型简介…………………………………（116）
习题五………………………………………………（123）
参考文献……………………………………………（124）

第二篇　概率论与数理统计基础

第六章　随机事件与概率…………………………（125）
§6.1　随机事件……………………………………（125）
§6.2　频率与概率…………………………………（126）
§6.3　事件的运算及概率的加法公式………………（130）
§6.4　条件概率与乘法公式…………………………（139）
§6.5　全概率公式与贝叶斯公式……………………（143）
习题六………………………………………………（147）
第七章　随机变量与分布函数……………………（151）
§7.1　随机变量……………………………………（151）
§7.2　概率分布……………………………………（153）
§7.3　正态分布……………………………………（164）
§7.4　多维随机变量及其概率分布…………………（172）
§7.5　随机变量函数的分布…………………………（183）
§7.6　三个常用的重要分布…………………………（186）
§7.7　本章内容提要………………………………（190）
习题七………………………………………………（193）
第八章　随机变量的数字特征……………………（199）

§8.1 数学期望……………………………………………（199）
§8.2 方差……………………………………………………（207）
§8.3 协方差与相关系数………………………………（211）
习题八…………………………………………………………（219）
第九章 参数估计……………………………………（223）
§9.1 数理统计的基本概念……………………………（223）
§9.2 点估计…………………………………………………（234）
§9.3 估计量的衡量标准…………………………………（239）
§9.4 区间估计……………………………………………（244）
习题九…………………………………………………………（248）
第十章 假设检验……………………………………（251）
§10.1 假设检验的基本思想……………………………（251）
§10.2 正态总体的参数检验……………………………（255）
§10.3 正态分布拟合度的χ^2-检验(非参数检验)……（263）
习题十…………………………………………………………（269）
参考文献………………………………………………………（271）

第三篇 统计预报基础

第十一章 概述…………………………………………（273）
§11.1 天气预报中的概率统计方法……………………（273）
§11.2 概率统计预报模式的建立………………………（274）
§11.3 资料的整理…………………………………………（277）
§11.4 预报因子的提供和筛选…………………………（278）
习题十一………………………………………………………（303）
第十二章 回归分析……………………………………（304）
§12.1 回归概念……………………………………………（305）
§12.2 一元线性回归………………………………………（307）
§12.3 多元线性回归………………………………………（324）
*§12.4 其他形式的回归……………………………………（345）

§12.5　逐步回归 …………………………………… (354)
习题十二…………………………………………… (385)
第十三章　判别分析…………………………… (387)
§13.1　问题的提出 …………………………………… (387)
§13.2　Fisher 意义的二级判别…………………… (388)
§13.3　判别方程的显著性检验 …………………… (399)
§13.4　因子选择 ……………………………………… (401)
§13.5　多级判别 ……………………………………… (404)
§13.6　逐步判别 ……………………………………… (418)
习题十三…………………………………………… (445)
***第十四章　聚类分析** ………………………… (446)
§14.1　相似性统计量 ………………………………… (446)
§14.2　系统聚类法 …………………………………… (449)
§14.3　有序样品的聚类 …………………………… (464)
§14.4　K-均值法 …………………………………… (468)
§14.5　变K变N聚类方案 ……………………… (474)
习题十四…………………………………………… (476)
第十五章　自然正交函数分解………………… (477)
§15.1　概述 …………………………………………… (477)
§15.2　空间函数阵与时间函数阵的求解 ………… (479)
§15.3　场的估计与逼近 …………………………… (482)
§15.4　自然正交函数分解的应用 ………………… (488)
习题十五…………………………………………… (492)
第十六章　平稳时间序列分析………………… (493)
§16.1　平稳随机过程的基本概念 ………………… (493)
§16.2　自回归模型与自回归预报方程 …………… (502)
§16.3　自回归方程的阶数选择和精度估计 ……… (508)
习题十六…………………………………………… (512)
第十七章　周期分析…………………………… (513)

§17.1 方差分析 ……………………………………………… (513)
§17.2 谐波分析 ……………………………………………… (522)
*§17.3 谱分析……………………………………………… (534)
习题十七……………………………………………………… (552)
第十八章 数值预报产品的统计释用……………………… (553)
§18.1 基本思路与方法 …………………………………… (553)
§18.2 逐步回归和逐步判别在MOS中的应用……… (559)
习题十八……………………………………………………… (567)
参考文献……………………………………………………… (567)
附表Ⅰ 标准正态分布函数值表…………………………… (569)
附表Ⅱ 标准正态分布双侧分位数(u_α)表……………… (570)
附表Ⅲ χ^2-分布的上侧α分位点……………………………… (571)
附表Ⅳ t-分布的双侧α分位点 ………………………………… (573)
附表Ⅴ F-分布的上侧α分位点……………………………… (575)

第一篇　线性代数基础

线性代数作为一种基本的数学工具，在气象统计、流体力学、数值预报、大气动力学以及统计动力学领域中的应用日益广泛，特别是近二十年来，随着计算机技术和各种自动化遥感探测技术的迅速发展，矩阵理论和计算线性代数已渗入到气象科学的理论分析和资料处理的各个领域中。

由于学习时间有限，本篇不可能把气象领域中所涉及到的线性代数知识全部讲述，只能就统计天气预报中所涉及到的线性代数基础知识进行较系统的讲述，以求掌握好统计天气预报的基础理论和基本方法，为从事气象实际工作增添一份能力。

统计天气预报方法所建立的预报方程以及确定预报系数的正规方程，大多是线性的或可化线性的。因此，线性代数（特别是线性方程组）的理论和计算方法及其在电子计算机上的实现方案，是统计天气预报不可缺少的组成部分。学好线性代数便成为理解并掌握统计天气预报方法的必要基础。在本篇中我们将分五章讲解解线性代数的基本知识。

本篇第一章为行列式，第二章为矩阵与向量，第三章为线性方程组解的结构，第四章为线性方程方程组的计算方法，第五章为矩阵的特征值与特征向量。

在本篇所讲述的五章中，读者应着重掌握第二、三、四章的基本内容，特别是重点内容。因为这些内容在统计预报的基本方法中有着广泛的应用。此外，在很多科学领域中，都有着更广泛的应用，在实际工作中常常会碰到这方面的理论。

本篇第四、五两章中所讲的计算方法及其在电子计算机上的实现方案是本书的一个特点，它紧密地结合了统计天气预报的内容，望读者留心学习。

第一章　行列式

本章介绍n阶行列式的定义及其运算，并在此基础上给出求解n元线性方程组的克莱姆准则。

§1.1　n阶行列式的定义

一、二阶、三阶行列式

行列式是一种算式，它是在线性代数方程组的求解问题中定义的。

如二元一次(线性)方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

式中未知数x_1和x_2的系数为a_{ij}，$(i=1,2; j=1,2)$，其中i为该系数所在方程的序号，j表示该系数是哪个未知数前的系数。例如a_1是第一个方程中第二个未知数x_2前的系数。

由初等代数知识可知，用消去法求解方程组（1.1）得其解为$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0)$：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了便于记忆，以上解的分母可以按方程组系数的原来位置，记为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

(1.2)式的左边称为一个二阶行列式。横排称为行，竖排称为列。其中每一个 $a_{ij}(i=1,2,j=1,2)$ 称为该二阶行列式的元素，i 为行的序号，j 为列的序号。即 a_{ij} 是位于该行列式的第 i 行、第 j 列位置上的元素。如 a_{21} 是位于第二行、第一列位置上的元素。(1.2)的右边则称为左边行列式的值。仔细观察可以发现，它是二阶行列式的位于两条对角线上的元素相乘并按下列所示取正号、负号后的和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$- \qquad +$$

由此分析，(1.1)的解中各分子分别为以下二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

这样二元线性方程组当其系数组成的行列式值不为零时，其解可用二阶行列式表示为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\[2em] x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

与此类似，对三元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1.3)$$

引入三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.4}$$

若其值不为零，则(1.3)的解可表示为：

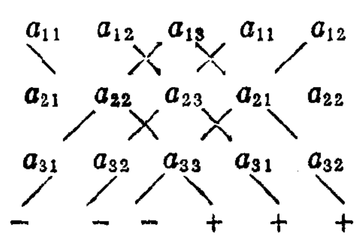
$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\triangle_3}=\frac{D_1}{\triangle_3}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\triangle_3}=\frac{D_2}{\triangle_3}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\triangle_3}=\frac{D_3}{\triangle_3}$$

其中$\triangle_3$为(1.4)中的三阶行列式，也称为方程(1.3)的系数行列式。$D_i(i=1,2,3)$为解中各分子行列式。D_i恰是用方程组中的常数项系数代替$\triangle_3$中的第i列所得到的行列式。

由(1.4)式可见，$\triangle_3$的值由六项组成，每项都是三个元素的乘号积取适当的符号。而且每个乘积含有每一行和每一列中的一个元素，并且只含该行该列中一个元素。这可以通过下面的图示（称为沙路法则）进行计算：



位于每条直线上的三个元素进行相乘后按照该直线下所标正负号取符号，然后相加，便是三阶行列式的值。

例1.1：求解下列三元一次方程组：

$$\begin{cases}2x-y+z=0\\3x+2y-5z=1\\x+3y-2z=4\end{cases}$$

解：(1)求$\triangle_3$及D_i的值

$$\triangle_3=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&-5\\1&3&-2\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-5)\cdot1+1\cdot3\cdot3-$$

$$1\cdot2\cdot1-2\cdot(-5)\cdot3-(-1)\cdot3\cdot(-2)=28\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&2&-5\\4&3&-2\end{vmatrix}=13;\qquad D_2=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&-5\\1&4&-2\end{vmatrix}=47$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\1&3&4\end{vmatrix}=21$$

(2)计算解x_1，x_2，x_3

$$x_1=\frac{D_1}{\triangle_3}=\frac{13}{28};\qquad x_2=\frac{D_2}{\triangle_3}=\frac{47}{28};\qquad x_3=\frac{D_3}{\triangle_3}=\frac{3}{4}$$

可见，在引入行列式的概念后，二元、三元线性方程组的解可以用二阶、三阶行列式表示，形式简便易记。因此，一般地，n个元n个线性方程的联立方程组，我们也希望引入n阶行列式用来表示其解。但当$n>3$时，不能动用“沙路法则”来定义n阶行列式的计算。下面我们采取“用低阶行列式定义高一阶行列式”这种递归办法定义一般的n阶行列式。

二、n阶行列式的定义

定义1.1：由n^2个数组成的n阶行列式为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

具有n行n列，它表示一个算式。当$n=2$时：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

当$n>2$时：

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \qquad (1.5)$$

其中： $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$, $(j=1,2,\cdots,n)$

M_{1j}为在原n阶行列式D中去掉a_{1j}所在的行（第一行）与所在的列（第j列）后剩下的$(n-1)^2$个元素组成的$n-1$阶行列式。即：

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21}\cdots a_{2(j-1)}, a_{2(j+1)}, \cdots a_{2n} \\ a_{31}\cdots a_{3(j-1)}, a_{3(j+1)}, \cdots a_{3n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n(j-1)}, a_{n(j+1)}\cdots, a_{nn} \end{vmatrix}$$

M_{1j}称为a_{1j}的余子式，A_{1j}称为a_{1j}的代数余子式。

按以上定义，我们可以通过二阶行列式的值计算三阶行列式，而用三阶行列式的值计算四阶行列式……以此类推一般n阶行列式的值可用$n-1$阶行列式值计算而得。

例1.2：计算四阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

解：由定义1.1，按第一行展开得：

$$D=1\cdot A_{11}+2\cdot A_{12}+(-1)A_{13}+3\cdot A_{14}$$

因为$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$, $(j=1,2,3,4)$