经济数学基础《中》

线性代数

主　编　魏有德
副主编　李文高

大 学 出 版 社

(川)新登字 014 号

责任编辑：樊程方
封面设计：冯先洁
技术设计：樊程方

内容提要

本书是《经济数学基础》第二版的中册，内容为线性代数，全书分行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型等六章。

第二版是在初版基础上，根据教委新颁“教学大纲”重新编写的。鉴于线性代数在经济领域的广泛应用，新版把重点放在方法和财经应用的论述，而不强调数学理论的完整；取材和编排考虑了经济类专业学生的数学基础，也考虑了本科和专科的差异，便于教，便于学；习题安排了两个层次，节后练习侧重基础知识训练，章末习题则侧重综合训练和提高。

本书可作为高校本科和专科财经类专业的教材，也可作为成人高校同类专业的教材和在职职工自学用书。

经济数学基础(中)
线性代数
魏有德 主编
四川大学出版社出版发行 (成都市望江路 29 号)
四川省新华书店经销 郫县犀浦印刷厂印刷
850×1168mm 32 开本 8.25 印张 192 千字
1993 年 2 月第 1 版 1993 年 2 月第 1 次印刷
印数：0001—6000 册
ISBN 7-5614-0737-8/O·80 定价：4.80 元

前　言

《经济数学基础》是大学本科、专科财经类专业的必修基础课程，它包括微积分、线性代数、概率与数理统计等内容。

这本《线性代数》是《经济数学基础》的中册，是在四川大学数学系经济数学教研室多年教学的基础上，根据国家教委新颁布的"教学大纲"，并参考初版书有关内容，重新编写而成的。新版书的编写原则是：从第一线实际教学要求出发，教师便于安排组织教学，学生易于接受和自学。本书的特点是：(一)注意保持较大的适应性，使本教材既适用于经济和管理类专业的本科教学，也适用于专科和成人教育的同类专业的教学。各校可按教学大纲的不同要求，选取其中有关部分进行教学。(二)在注意理论的严密性和完整性的同时，侧重于方法和它与实际问题联系的讲授，做到教师好教，学生易学。(三)配备两个层次的练习题，便于教学和因材施教。每节后我们配备了基础知识练习，为教学的基本要求；每章后又配备了一些综合练习题，供教师和学生选用。

全书包括行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值和特征向量、二次型等六章。按教学计划，本科授完这些内容，约需72学时。专科、函授、夜大及短训班，可选讲第一至第四章，以及第五章的部分内容，约56学时。

本书由魏有德、李文高主编。各章执笔者为：第一章，钟波；第二、三、四章，王继炳；第五、六章，方儒新。

不妥之处，恳请读者批评指正。

编者

1992年12月

目　录

第一章　行列式

§1.1　行列式概念 …………………………………………… (1)
§1.2　行列式的性质 …………………………………………… (10)
§1.3　行列式按行列展开 ……………………………………… (20)
§1.4　克莱姆法则 ……………………………………………… (28)
习题一 ……………………………………………………………… (36)

第二章　矩　阵

§2.1　矩阵的概念及运算 ……………………………………… (39)
§2.2　几种特殊的矩阵 ………………………………………… (57)
§2.3　逆矩阵 …………………………………………………… (61)
§2.4　矩阵的初等变换 ………………………………………… (66)
§2.5　矩阵的秩 ………………………………………………… (81)
§2.6　分块矩阵 ………………………………………………… (85)
习题二 ……………………………………………………………… (94)

第三章　线性方程组

§3.1　消元法解线性方程组 …………………………………… (97)
§3.2　n 维向量 ……………………………………………… (110)
§3.3　向量组的秩 ……………………………………………… (121)
§3.4　线性方程组解的结构 …………………………………… (126)

习题三……………………………………………………………… (135)

第四章　向量空间

§4.1　向量空间 ………………………………………………… (138)
§4.2　向量的内积 ……………………………………………… (145)
§4.3　正交矩阵与正交变换 …………………………………… (150)
习题四……………………………………………………………… (156)

第五章　矩阵的特征值和特征向量

§5.1　矩阵的特征值和特征向量 ……………………………… (158)
§5.2　矩阵级数 ………………………………………………… (178)
§5.3　投入产出分析 …………………………………………… (190)
习题五……………………………………………………………… (202)

* 第六章　二次型

§6.1　二次型与对称矩阵 ……………………………………… (204)
§6.2　用初等变换化二次型为标准形 ………………………… (207)
§6.3　用正交变换化二次型为标准形 ………………………… (216)
§6.4　二次型的分类 …………………………………………… (218)
习题六……………………………………………………………… (228)

练习与习题答案……………………………………………… (230)

第一章　行列式

无论在生产管理活动中，还是在商品流通和交换过程中，许多变量之间的相互关系，在一定程度上可分为线性关系和非线性关系两大类．线性代数就是研究变量之间的线性关系的一门基础学科．行列式是研究线性代数的不可缺少的工具．本章在给出二阶、三阶行列式的基础上，引出 n 阶行列式的概念，讨论行列式的性质，以及行列式的计算方法，最后应用 n 阶行列式解 n 个方程联立的 n 元线性方程组．

§1.1　行列式概念

行列式概念可以从解线性方程组引入．未知量是一次的方程称为**线性方程**．两个方程的二元线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x_1、x_2 为未知量，系数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 的第一个脚标 i 表示这个系数处在第 i 个方程，第二个脚标 j 表示这个系数是第 j 个未知量的系数．

由消元法知，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)有解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为研究方便，对于(1.2)的分母引进记号

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

这样规定的记号(1.3)称为**二阶行列式**，其中 a_{ij} 称为此二阶行列式的**元素**，横排称为**行**，竖排称为**列**. 根据(1.3)的规定，对(1.2)的分子，我们分别引进记号

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

这里 D_1、D_2 是用常数项 b_1、b_2 分别代替 D 中第一列与第二列元素所得的行列式. 于是在 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1)的解可用行列式简明地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1.4}$$

例 1 用行列式解二元一次方程组

$$\begin{cases}5x_1+3x_2=13\\ 6x_1+4x_2=16\end{cases}$$

解 先计算三个二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 6 & 4\end{vmatrix}=5\times 4-3\times 6=2,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}13 & 3\\ 16 & 4\end{vmatrix}=13\times 4-3\times 16=4,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}5 & 13\\ 6 & 16\end{vmatrix}=5\times 16-13\times 6=2.$$

因为 $D\neq 0$，所以方程组有解，其解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{4}{2}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{2}{2}=1.$$

二阶行列式表示的代数和，可用图 1.1 的**对角线法则**记忆，其

中实线联结两元素的乘积取正号，虚线联结两元素的乘积取负号.

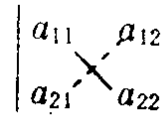

图 1.1

类似地，为了讨论三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

的解，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.6}$$

(1.6) 的左端称为**三阶行列式**. 行列式的元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示这元素位于第 i 行，称为**行标**，第二个下标 j 表示该元素位于第 j 列，称为**列标**. (1.6) 的右端为左端三阶行列式表示的代数和，可用图 1.2 的**对角线法则**记忆. 其中实线联结元素的乘积取正号，虚线联结元素的乘积取负号.

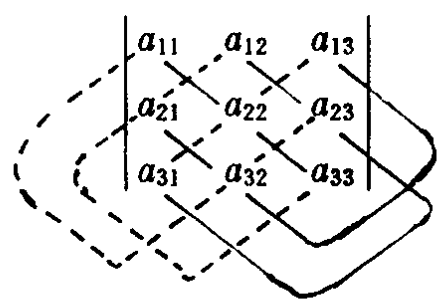

图 1.2

例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 7 \times 8 + 4 \times (-2) \times 2 + (-5) \times 8 \times (-1) - 3 \times (-2) \times (-1) - 4 \times 8 \times 8 - (-5) \times 7 \times 2 = 0.$$

(1.6) 左端的三阶行列式是由方程组(1.5) 的系数构成的，称为(1.5) 的**系数行列式**. 由消元法可知，当系数行列式不为零时，

(1.5) 有解,其解可用行列式表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1.7}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

上述二元、三元线性方程组的行列式解法可以推广到 n 个方程的 n 元线性方程组上去. 但对角线规则已不适用,须引入新的概念和计算规则.

定义 1.1 由 1,2,…,n 组成的一个不重复的有序数组称为一个 **n 阶排列**.

例如,1234 和 1423 是两个 4 阶排列,35241 是一个 5 阶排列, 54124 不是 5 阶排列.

n 阶排列的总数为 $n!$ 个. 在全部 $n!$ 个 n 阶排列中,$123\cdots(n-1)n$ 是唯一按自然顺序组成的排列,称为 **n 阶标准排列**. 在 4 阶排列 1432 中,4 比 3 大,但 4 排在 3 前面,与由小到大的自然顺序相反,称 4 和 3 这对数构成一个逆序. 在排列 1432 中,构成逆序的数对还有 42,32. 因此,排列 1432 有 3 个逆序,称排列 1432 的逆序数为 3. 一般地有

定义 1.2 一个排列中的两个数,如果排在前面(左边)的大于排在后面(右边)的,就称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$$

例如排列 1432 的逆序数为 3，记为 $\tau(1432) = 3$. n 阶标准排列的逆序数 $\tau(12\cdots n) = 0$.

定义 1.3 逆序数是奇数的排列称为**奇排列**，逆序数是偶数的排列称为**偶排列**.

例如，$\tau(1432) = 3$，因此 1432 是奇排列，$\tau(4321) = 6$，所以 4321 是偶排列. 1234 也是偶排列.

在分析行列式各项符号时，要把一个 n 阶排列变换为另一个 n 阶排列. 最简单的变换是把排列中的两个数互换位置，其余数不动，这种变换称为**对换**.

例如，排列 1234 经 1 与 4 的对换变为排列 4231. 因 1234 为偶排列，4231 为奇排列，即此排列经一次两个数的对换改变了奇偶性.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证 先证对换相邻两数的特殊情形. 设原排列

$$A\ i\ j\ B$$

经相邻两数 i 与 j 的对换变为新排列

$$A\ j\ i\ B$$

其中 A、B 表示除 i、j 之外未变动的数. 比较这两个排列的逆序. 显然，A、B 中的逆序个数没有改变；i、j 与 A、B 中任何一个数的逆序也未改变；改变的仅仅是 i 与 j 的次序，当 $i < j$ 时，新排列增加一个逆序，当 $i > j$ 时，新排列减少一个逆序. 不论增加或是减少一个逆序，排列的奇偶性总是改变了. 因而，相邻对换改变排列的奇偶性.

再证所对换的两个数之间还有 s 个数的情形. 设原排列

$$A\ i\ K_1\ K_2 \cdots K_s\ j\ B$$

经 i 与 j 的对换变为新排列

$$A\ j\ K_1\ K_2 \cdots K_s\ i\ B$$

新排列可以看成是从原排列出发，将 i 顺次与 K_1、K_2、…、K_s、j

作 $s+1$ 次相邻对换，变为中间排列

$$A\,K_1\,K_2\cdots K_s\,j\,i\,B$$

再由这个中间排列出发，将 j 顺次与 K_s、…、K_2、K_1 作 s 次相邻对换得到的. 也即 i 与 j 的对换可经 $2s+1$ 次相邻对换来实现. 一次相邻对换改变排列的奇偶性，$2s+1$ 是奇数，奇数次改变奇偶性的结果，必然改变排列的奇偶性. 因此，一般情况下，一次对换改变排列的奇偶性.

定理 1.2 在全部 $n(n\geqslant 2)$ 阶排列中，奇排列与偶排列的个数相等，都是 $n!/2$ 个.

证 设全部 n 阶排列中有 p 个奇排列，q 个偶排列. 将每个奇排列都对换 1 与 2，由定理 1.1 知，p 个奇排列变为 p 个不同的偶排列，因偶排列总数为 q，所以，$p\leqslant q$；同理，将 q 个偶排列都对换 1 与 2，可得 $q\leqslant p$. 因此，$p=q$，即奇偶排列数相等.

现在来看三阶行列式(1.6) 右端的结构. 可以看出，三阶行列式等于所有位于不同行不同列的元素的乘积的代数和，其项数为 3!，正负项各占一半，每项的符号为：当这一项元素的行标按自然顺序排列时，列标的排列若是偶排列，则取正号；列标的排列若是奇排列，则取负号. 三阶行列式的这个特点，对于用行列式解 n 个方程联立的 n 元线性方程组，可以推广.

定义 1.4 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，两边各加一条竖直线段，构成记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

在赋予它如下取值规则之后，称为 n **阶行列式**. 取值规则为：n 阶行列式表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和；各项的符号为：当这一项中元素行标为标准排列时，若对应列标的排

列为偶排列，则该项取正号，若对应列标为奇排列，则该项取负号.

n 阶行列式定义的数学表达式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad (1.9)$$

这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 阶排列，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和，$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 为行列式的**一般项**，每个 a_{ij} 都称为行列式的**元素**，横排称为**行**，竖排称为**列**，(1.9) 的右端称为**行列式的展开式**. (1.8) 中从左上角到右下角的对角线叫**主对角线**. n 阶行列式简记为 D 或 $|a_{ij}|$. 当 $n=1$ 时，由一个元素 a 构成的一阶行列式规定为 a.

由定理 1.2 知，n 阶行列式共有 $n!$ 项，正负项各占一半(不含元素本身的符号).

例 3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零，这个行列式主对角线右上方元素全为零，称为**下三角形行列式**.

解 D 中不少元素为零，从而很多项都是零，只要把不为零的项找出来相加即可. 先看零元最多的第一行，D 的一般项中 a_{1j_1} 取自第一行，第一行仅 $a_{11} \neq 0$，因此 D 中只有含 a_{11} 的项不为零；再看第二行，一般项中 a_{2j_2} 取自第二行，第二行只有 a_{21}、a_{22} 不为零，而 a_{11} 已取自第一列，a_{2j_2} 就不能再取第一列，只能取 a_{22}，所以 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的项不为零. 由此推知，D 中只有含 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为零.

又因 $\tau(12\cdots n)=0$,所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可得**上三角形行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地,**对角形行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

在 n 阶行列式的定义中,确定各项符号时,每一项的 n 个元素的行标都是取的标准排列,由于数的乘法具有交换律,因此可以把这 n 个元素的行标按任意顺序排列,这时行列式各项符号该如何确定呢?

定理 1.3 n 阶行列式的一般项可以写为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.10}$$

证 首先,因为 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 阶排列,所以 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是 D 中取自不同行不同列的元素的乘积. 其次,将 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中元素作两两对换,将行标变为标准排列,这时列标变为排列 $K_1K_2\cdots K_n$. 因为每作一次两个元素的对换,行标与列标所成排列都同时作一次对换,其逆序数都同时改变奇偶性,因而其逆序数总和的奇偶性不变. 也即

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}&=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(K_1K_2\cdots K_n)}\\&=(-1)^{\tau(K_1K_2\cdots K_n)}\end{aligned}$$

所以(1.10) 就是(1.9) 的一般项.

由定理 1.3，我们有

$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{1.11}$$

特别地有

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.12}$$

其中 $\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示对所有 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和.

例 4 计算下列四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & 0 & a_{13} & 0\\ a_{21} & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{32} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{vmatrix}$$

解 这个四阶行列式各行各列均只有一个元素不为零，因此，这行列式只有一项不为零，它是这四个非零元素的乘积带上相应的符号. 由(1.11) 可得

$$D=(-1)^{\tau(2314)+\tau(1234)}a_{21}a_{32}a_{13}a_{44}=a_{21}a_{32}a_{13}a_{44}$$

或者 $$D=(-1)^{\tau(1234)+\tau(3124)}a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}=a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$$

或者 $$D=(-1)^{\tau(4312)+\tau(4231)}a_{44}a_{32}a_{13}a_{21}=a_{44}a_{32}a_{13}a_{21}$$

练习 1－1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix}a^2 & ab\\ ab & b^2\end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 5 & 7\end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 9 \\ 5 & 6 & 12 \end{vmatrix}$　(8) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

2. 利用行列式解方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 = 13 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

3. 求下列排列的逆序数，并指出其奇偶性.

(1) 3214；　(2) 52143；　(3) 43521；

(4) $n(n-1)\cdots 321$.

4. 用定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

5. 若$(-1)^{\tau(1K2l)}a_{11}a_{K2}a_{23}a_{l4}$是四阶行列式的一项，则$K$、$l$之值及该项符号为(　)：

(a) $K=3, l=4$，符号为正；　(b) $K=3, l=4$，符号为负；

(c) $K=4, l=3$，符号为正；　(d) $K=4, l=3$，符号为负.

§1.2　行列式的性质

用定义计算行列式，一般要计算$n!$项. 为避免n较大时计算量

很大的麻烦，我们讨论行列式的性质.

定义 1.5 将行列式 D 的行与列互换所得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^T 或 D'. 即

若
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则
$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.13}$$

性质 1 将行列式转置，行列式不变. 即 $D = D^T$.

证 若记

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 与 D^T 的元素之间满足关系

$$a_{ij} = b_{ji} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

将此关系代入(1.9)得

$$\begin{aligned} D &= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} b_{j_1 1}b_{j_2 2}\cdots b_{j_n n} \end{aligned}$$

由(1.12)知道，上式右端等于 D^T. 所以 $D = D^T$.

性质 1 说明，行列式中行与列的地位是对称的，凡有关行成立的性质，对列也成立. 下述各性质，是对行说的，对列也成立.

性质 2 交换行列式两行，行列式变号.

证略. 试看下例：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{①}{} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

利用对角线展开法则，容易验证上式左、右两个三阶行列式的展开式仅相差一个“－”号.

推论　若行列式 D 中有两行元素对应相等，则 $D=0$.

因为将 D 中元素对应相等的这两行互换，结果仍为 D，但由性质 2，它又应为 $-D$，所以 $D=-D$，因此 $D=0$.

性质3　用数 K 乘行列式某一行，等于用数 K 乘此行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Ka_{i1} & Ka_{i2} & \cdots & Ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = KD$$

证　由(1.9)，上式左边

$$D_1 = \sum (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(Ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$
$$= K\sum (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} = KD$$

这个性质表明：如果行列式某行所有元素有公因子 K，则此公因子可提到行列式外面.

推论1　行列式 D 中有一行元素全为零，则 $D=0$.

推论2　若行列式 D 中有两行元素对应成比例，则 $D=0$.

因为将 D 中成比例的这两行元素的比例系数提到行列式前面，所得行列式这两行元素对应相等，所以 $D=0$.

性质4　若行列式 D 的某一行各元素可以写成两个元素的和，则 D 就可写成两个行列式的和. 这两个行列式分别以这两个元

---

① 行列式后的双箭头符号表示相应两行对换.