高等数学疑难解析

程乃栋　杨有椿　潘麟生
宁日晖　　　　　郭敏学　编

安徽科学技术出版社

责任编辑：杨家骝
封面设计：彭冲冲

高等数学疑难解析

程乃栋 杨有椿 潘麟生 宁日晖 郭敏学 编

*

安徽科学技术出版社出版

（合肥市跃进路1号）

新华书店经销　六安新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：12.375 字数：307,000

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数：00,001—6,000

统一书号：13200·91　定价：3.50元

前　　言

正确理解《高等数学》中的概念，掌握知识之间的内在联系和正确的解题方法，提高解题能力，是工科院校数学教师和学生共同感兴趣的问题。我们根据长期教学中，学生在数学概念的理解和解题等方面所反映的问题，参考有关资料，编写了这本《高等数学疑难解析》，供广大有志于提高数学水平的读者参考。

本书收集了约400个问题。这些问题涉及辨别概念理解的正误，揭示知识之间的内在联系，分析解题思路，灵活运用解题技巧等方面。所选的问题有一定的代表性和典型性，基本覆盖了目前工科院校使用的教材的全部内容。

本书不同于高等数学方面习题集，也不是复习资料。它着重对问题进行分析，指出在对概念的理解上常见的错误的症结所在，并给出正确的解答；对某些问题还给出反例。这种编写的形式，对我们来说是一次尝试。我们相信这种尝试对读者不无裨益，特别是对学习条件较差的学生，如电大、职工、业大、函大的学生和自学者将有所帮助。

《工科数学》常务编委、合肥工业大学副教授卢树铭同志对本书的编写给予了热情支持和帮助，并细致审阅了全部书稿。在此谨致谢意。

编　者

1985年12月

目　　录

1.函数、极限和连续性 …………………………………… 1

　1.1　函数…………………………………………………… 1

　1.2　极限…………………………………………………… 8

　1.3　函数的连续性………………………………………… 37

2.一元函数微分学 ………………………………………… 52

　2.1　导数与微分…………………………………………… 52

　2.2　微分中值定理………………………………………… 70

　2.3　导数的应用…………………………………………… 84

3.一元函数积分学 ………………………………………… 106

　3.1　不定积分……………………………………………… 106

　3.2　定积分及其应用……………………………………… 116

4.多元函数微分学 ………………………………………… 154

　4.1　多元函数的极限与连续……………………………… 154

　4.2　多元函数微分法……………………………………… 166

　4.3　偏导数的应用………………………………………… 198

5.重积分……………………………………………………… 216

　5.1　二重积分……………………………………………… 216

　5.2　三重积分……………………………………………… 230

6.曲线积分与曲面积分……………………………………… 249

　6.1　曲线积分……………………………………………… 249

　6.2　曲面积分……………………………………………… 265

7.常微分方程 ……………………………………………… 288

　7.1　一阶常微分方程的基本概念………………………… 288

7.2　一阶显式常微分方程的解法……………………………………………… 295
7.3　可降阶的高阶微分方程……………………………………………… 310
7.4　n阶常系数线性微分方程……………………………………………… 317
8.无穷级数 ……………………………………………………………… 334
8.1　数项级数……………………………………………………………… 334
8.2　幂级数………………………………………………………………… 352
8.3　傅立叶级数…………………………………………………………… 365
8.4　无穷级数求和………………………………………………………… 377

1．函数、极限和连续性

1.1 函　　数

问题1　为什么说函数的定义域和对应关系是确定函数的两个要素？是否还有第三个要素？

解　首先，只要定义域和对应关系确定了，则函数完全确定，因此定义域和对应关系是确定函数的两个要素，并不存在第三个要素。这是由于函数的其它因素都取决于这两个要素。例如函数的值域，当定义域确定时，按已知的对应关系，函数的值域也就完全确定了，等等。

其次，对于两个函数，若它们的定义域和对应关系相同，则这两个函数必然表示着同一个函数，例如函数

$$y=\frac{|x|}{x} \quad 和 \quad y=\frac{\sqrt{x^2}}{x},$$

它们的定义域都是$(-\infty,\ 0)$，$(0,\ +\infty)$，而对应关系为

$$y=\begin{cases}1，当 x>0；\\ -1，当 x<0。\end{cases}$$

所以两个函数实际上是同一函数。而函数

$$y=\frac{x}{x} \quad 和 \quad y=1$$

是两个不同的函数，因为前者比后者的定义域少一点$x=0$（虽然它们在$x\neq 0$时是相同的）。

在微积分中，如果两个函数相同，则对它们作某些运算的结

果也应一致。但常常使人们忽视的，是对两个貌似相同而实际不同的函数也错误地进行着结果等价的运算。这点我们将在以后的章节中举例加以解析。

问题 2 在实数范围内，是否存在如下几种情况的函数？

(1) 除了一点外，处处不连续；

(2) 连续点与间断点都有无穷多个；

(3) 处处间断。

试分别举例说明。

解 (1) 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 是有理数；} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数。} \end{cases}$$

这个函数在$x_0=0$处是连续的，因为对于任意给定的$\varepsilon>0$有

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|\leqslant|x|=|x-x_0|,$$

取$\varepsilon=\delta$时，当$|x-x_0|<\delta$，则$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立。

当$x\neq0$时该函数均不连续。因为对于有理数x_0的每一个邻域都含有无理数x，当$0<|x_0|$使

$$|f(x)-f(x_0)|=|x_0|>0;$$

对于无理数x_0的每一个邻域都含有有理数x（$x\neq0$），此时

$$|f(x)-f(x_0)|=|x_0|\neq0。$$

因此对于任意的$0<\varepsilon<|x_0|$，都不存在一个x_0的邻域，能使$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。于是对于所有的$x_0\neq0$，函数$f(x)$都是不连续的。

(2) 设函数

$$f(x)=x[x] \qquad (-\infty,\ +\infty),$$

其中$[x]$表示x取值的整数部分，例如$x=5.6$，则$[x]=5$，又$x=-1.2$，$[x]=-2$，等等。因为对于一切整数$k\neq0$有

$$\lim_{x\to k+0}f(x)=k\cdot k=k^2,$$

$$\lim_{x\to k-0} f(x)=k(k-1)=k^2-k。$$

所以函数$f(x)=x[x]$在点$x=k\neq0$处左右极限不相等，故这个函数在整个数轴上有无穷多个间断点，而在其它点处皆连续。

（3）设函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}[\lim_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^m],$$

显见，若$x=p/q$是有理数，p，q互素，$q>0$，则对一切$n>q+1$，$n!x=n!p/q$总是偶数，所以$\cos n!\pi x=+1$，此时有$\lim\limits_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^m=+1$，从而有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}[\lim_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^m]=+1。$$

若x是无理数，则对于任何n，$n!x$都不是整数，于是$|\cos n!\pi x|<1$，所以对于一切n，有 $\lim\limits_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^m=0$，从而有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}[\lim_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^m]=0。$$

这就证明了这个函数是处处不连续的。

实际上，直接定义函数

$$f(x)=\begin{cases}1，当x是有理数，\\0，当x是无理数。\end{cases}$$

由函数连续性定义知，这个函数处处不连续。

问题3 工科高等数学教材，关于复合函数的定义，多为“如果y是u的函数；$y=f(u)$；而u又是x的函数：$u=\varphi(x)$，且$\varphi(x)$的函数值的全部或部分在$f(u)$的定义域内，那末y通过u也是x的函数。我们就称后一个函数是由函数$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称复合函数，记作$y=f[\varphi(x)]$。其中u叫做中间变量”。

这里产生两个问题：第一，是否任何两个函数都能复合成一个复合函数，能或不能的原因是什么？第二，定义中“$\varphi(x)$的函

数值的全部或部分在$f(u)$的定义域内”的含义是什么，为什么一定要在定义中加上这个条件？

解 不是任何两个函数都能复合成一个复合函数。当自变量$x\in\mathscr{X}_0$的取值通过中间变量u使函数y有确定的值与之对应时，则可构成以$\mathscr{X}$为定义域的复合函数。例如

$$y=\ln u \qquad (0<u<+\infty),$$
$$u=x-1 \qquad (-\infty<x<+\infty),$$

当$x\in\mathscr{X}_0=(1,+\infty)$时，得到复合函数$y=f[\varphi(x)]=\ln(x-1)$。如果这样的$\mathscr{X}_0$不存在，就是说$x$的任何取值都不能通过变量$u$确定$y$，这时就无法复合成复合函数。例如

$$y=\arcsin u \qquad (-1\leqslant u\leqslant 1),$$
$$u=x^2+2 \qquad (-\infty<x<+\infty),$$

这里x的任何取值都使$|u|\geqslant 2$，超出了$[-1,1]$，于是$\mathscr{X}_0$是空集，所以复合函数便不存在。

其次，在定义中“$\varphi(x)$的函数值的全部或部分在$f(u)$的定义域内”这句话的含义是函数$u=\varphi(x)$的值域不能超出$y=f(u)$的定义域的范围，如果超出了，则应把超出部分对应的x取值去掉。如在$y=\ln u$，$u=x-1$的例中，当$x\leqslant 1$时有$u\leqslant 0$，因此$-\infty<u\leqslant 0$超出了$y=\ln u$的定义域的范围；去掉$x\leqslant 1$，剩下$x>1$时有$u>0$，恰好与$y=\ln u$的定义域一致，因此得到在$(1,+\infty)$上的复合函数$y=\ln(x-1)$。

表面看来，能否构成复合函数，只要看是否存在$\mathscr{X}_0$，即能否找出构成复合函数的定义域，而对应关系似乎看不出重要性了。这一点似乎是一般教材的一个疏忽。实际上，对应关系与定义域对于确定复合函数是同等重要的。这是因为在确定复合函数的过程中，仍是以这两个要素为依据，二者仍是相互制约的。例如，$y=\sqrt{u}$，当$u=x^2$时，构成了$(-\infty,+\infty)$上的复合函数$y=|x|$；当$u=x^3$时，构成了$(0,+\infty)$上的复合函数$y=\sqrt{x^3}$，

当$u=\sin x-2$时，就不能构成复合函数。这里函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$都起到了制约x_0的“大小”和是否存在的作用。

问题4　如果函数$f(x)$在某有穷区间内每一点都有定义（因此函数必取有穷的数值），能否由此推出函数一定有界？

解　这个问题的答案是否定的。例如函数

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在区间[0，1]内处处取有穷数值，但在x接近于零时，它可以取任意大的值。又如函数

$$f_2(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 为无理数},\\ q, & \text{当}x\text{为有理数(设为不可约分数}p/q,p,q\text{整数,}\\ & q>0),\end{cases}$$

在整个数轴上都有定义，但这个函数值处处有穷而处处局部无界。假若不然，设$f_2(x)$在点a的ε邻域$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内有界，这时对于无理数$f_2(x)=0$，对于有理数$f_2(x)=q$有界，从而相应的有理数$p/q$的分子$p$也应有界，显然在有穷的区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内这样的有理数只能有有限个，这就得到矛盾。从而知函数$f_2(x)$在a点的邻域内局部无界。

若函数$f(x)$在闭区间$[a,\ b]$内有定义并且连续，则它在$[a,\ b]$必定有界。这就是所谓的魏尔斯特拉斯第一定理。

问题5　对于函数$f(x)$如果存在$l\neq 0$，使

$$f(x+l)=f(x)$$

在其定义域内都成立，则称$f(x)$为周期函数，l是$f(x)$的周期。通常l是指最小正周期。现在产生这样一个问题：是不是所有周期函数都存在一个最小正周期？

解　作为周期函数定义规定了其周期是最小正周期。这对于

概念叙述与理论证明都是有好处的，但在符合周期函数定义的这一类函数中确实有不存在最小正周期的周期函数。例如函数

$$f(x)=C\text{（常数）}$$

可看作以任意实数为周期的周期函数。实事上对于任意的实数 $l>0$ 都有

$$f(x+l)=C=f(x)。$$

再例如函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,}\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,}\end{cases}$$

在整个数轴有定义，而且对于任意的有理数r，都有 $f(x+r)=f(x)$。因此任一有理数$r>0$都是$f(x)$的周期。所举两例中都找不到最小正周期。

问题6 严格单调函数都有反函数，反之存在反函数的函数是否必定为单调函数？

解 我们不能认为存在反函数的函数必定为单调函数。例如函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

在闭区间$[-1, 1]$上不是单调函数（图1-1），但存在着反函数

$$x=\varphi(y)=\begin{cases}1-y, & 1<y\leqslant 2,\\ y, & 0\leqslant y\leqslant 1。\end{cases}$$

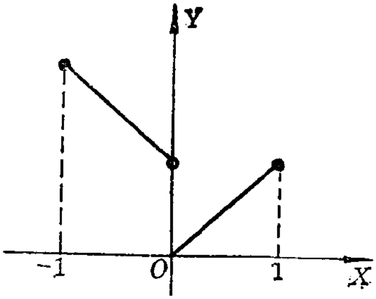

图1-1

由此可见，函数的严格单调性只是反函数存在的充分条件，而非必要条件。

如果函数在某闭区间上连续且存在反函数，则它在该闭区间上必定单调。事实上，可用反证法证明。设函数$y=f(x)$在$[a,$

$b]$上连续，且反函数为$x=\varphi(y)$。若$f(x)$不是单调函数，则在区间$[a, b]$内存在$x_1<x_2<x_3$，使

$$f(x_1)<f(x_2) \text{和} f(x_2)>f(x_3),$$

或

$$f(x_1)>f(x_2) \text{和} f(x_2)<f(x_3)。$$

就第一种情形而论，由$f(x)$的连续性知存在一个数C满足

$$f(x_1)<C<f(x_2) \text{和} f(x_2)>C>f(x_3),$$

由闭区间上连续函数的介值定理知，在闭区间$[x_1, x_2]$内至少存在一点x_0使$f(x_0)=C$，同理在闭区间$[x_2, x_3]$内至少存在一点x_0'使$f(x_0')=C$，从而在闭区间$[a, b]$内至少存在两点x_0，x_0'使

$$f(x_0')=f(x_0)。$$

这与反函数存在的假设条件相矛盾。

问题7 （1）设$f(x)$和$g(x)$分别可为任何偶函数或奇函数，试确定$f(x)+g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$和$f[g(x)]$的奇偶性；

（2）证明对于每个偶函数$f(x)$，都有无穷多个函数$g(x)$，使得$f(x)=g(|x|)$；

（3）证明定义在对称区间$(-l, l)$上的任意函数都可表示为一个奇函数与一个偶函数之和，而且这种表示方法是唯一的。

解 （1）不妨设$f(x)$和$g(x)$均为偶函数，此时则有

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x),$$

所以函数$f(x)+g(x)$为偶函数。又

$$G(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=G(x),$$

所以函数$f(x)\cdot g(x)$是偶函数。又

$$H(-x)=f[g(-x)]=f[g(x)]=H(x),$$

所以函数$f[g(x)]$是偶函数。

同理可得：

若$f(x)$和$g(x)$均为奇函数，则$f(x)+g(x)$为奇函数；$f(x.$

$\cdot g(x)$为偶函数；$f[g(x)]$为奇函数。

若$f(x)$和$g(x)$分别为一奇一偶函数，则$f(x)+g(x)$为非奇非偶函数；$f(x)\cdot g(x)$为奇函数；$f[g(x)]$为偶函数。

（2）我们如下定义函数$g(x)$，

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\geqslant 0, \\ \text{任意}, & x<0, \end{cases}$$

这样，实际上$g(x)$可取无穷多个函数，使得

$$g(|x|)=f(x)。$$

（3）设$f(x)$是定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数，显然

$$f_1(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

是奇函数，

$$f_2(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

是偶函数。将上两式相加，即得

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)。$$

这就证明了函数$f(x)$可表示为一个奇函数与一个偶函数之和。

再证这种表示方法是唯一的，设另有奇函数$g_1(x)$和偶函数$g_2(x)$，且有

$$f(x)=g_1(x)+g_2(x),$$

注意到

$$f(-x)=-g_1(x)+g_2(x),$$

由这两个等式可解得

$$g_1(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}, \qquad g_2(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}。$$

这就证明了表示方法的唯一性。

1.2 极　　限

问题1　由数列极限的ε-N定义引入的表格方式并由此说明ε

与N之间的关系。

解 一般的高等数学教材中，关于数列极限的ε-N定义是：如果对于任意给定的正数ε（不论它多么小），总存在正整数N，使得对于$n>N$时的一切x_n，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，那么就称常数a是数列x_n的极限，或者称数列x_n收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

或

$$x_n\to a \qquad (n\to\infty)。$$

初学者对于定义中的ε和N之间的关系常常存在一种神秘的感觉，现用下例的表格方式说明之。

设数列$\{(-1)^n\frac{1}{n}\}$。下图用数轴上的点表示数列的项。

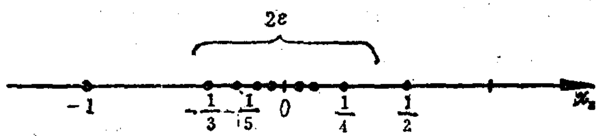

图1－2

我们知道两个数α和β之间的接近程度可以用这两个数的绝对值$|\alpha-\beta|$来表示，而数轴上点α和点β之间的距离就是$|\alpha-\beta|$。这个数列的通项

$$x_n=(-1)^n\frac{1}{n},\ 而\ |x_n-0|=\frac{1}{n},$$

说明当n越大时，x_n越接近于0，当$n\to\infty$时，x_n就无限地趋近0。如图1-2所示，这种接近程度可用0点的ε邻域表示。

再把问题考虑得细一点，可将数列$\{(-1)^n\frac{1}{n}\}$在0点的某ε邻域内随ε值的任意给定的变化情况列成表1-1。

通过以上粗略的几何直观和细致的数量分析，可以加深对数列极限定义的理解。这一点反映在如下两个方面。

第一，ε是预先任意给定的，它刻划了数列x_n与数a接近的程

表1-1

给定的值	0点的ε邻域包含数列的项	特点	用不等式表示
$\varepsilon=1$	$x_2,\ x_3,\ x_4,\ \cdots\cdots$	$n>1$	$\|x_n-0\|<1$
$\varepsilon=0.1$	$x_{11},x_{12},x_{13},\cdots\cdots$	$n>10$	$\|x_n-0\|<0.1$
$\varepsilon=0.01$	$x_{101},x_{102},x_{103},\cdots\cdots$	$n>100$	$\|x_n-0\|<0.01$
…	…… …… …… …	…	…
对于任意给定的$\varepsilon>0$	$x_{N+1},x_{N+2},x_{N+3},\cdots\cdots$	$n>N$	$\|x_n-0\|<\varepsilon$

度。一方面对于ε的具体值，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$表达了数列x_n与数a的有限接近程度；另一方面由于ε给定的任意性又把具体的有限接近转化为（不论ε怎样小时）无限接近。

第二，ε和N之间存在着一定的依赖关系。一般地说ε取得越小，N就应越大，N应大到什么程度，决定于不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立时对于数列项数n的取值。由于极限定义只要求了N的存在性，并不要求一定要找出最小的自然数N，所以ε和N之间的这种依赖关系还未构成函数关系。关键是N的存在性，如果N存在，对于$n>N$时的一切n都有$|x_n-a|<\varepsilon$成立。值得注意的是数列的前N项是否使这个不等式成立是无关紧要的，因为定义中只是对$n>N$的那些项提出要求，这也正反映出极限过程的无限性质。

问题2 某《题解》对“若数列$\{a_n\}$收敛于a，则数列$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$也收敛于$a$。”这样一道题的证法如下所述：

若数列$\{y_n\}$收敛于a，则必然对每个$\varepsilon>0$，存在一个n_ε，使得对于一切$n>n_\varepsilon$，有$|y_n-a|<\varepsilon$。

设$\{y_n\}$是给定的数列$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right\}$，于是有

$$\left|y_n-a\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-a\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-na\right)\right|$$

$$=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_k-a\right|。$$

按假设，数列$\{a_n\}$收敛于a，故对每一个$\varepsilon>0$，有一个n_ε,使得对于一切$n>n_\varepsilon$，有$|a_n-a|<\varepsilon/2$。因此对$n>n_\varepsilon$，有

$$\left|y_n-a\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_k-a\right|$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}\left|a_k-a\right|+\frac{1}{n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}\left|a_k-a\right|$$

$$<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}\left|a_k-a\right|+\frac{n-n_\varepsilon}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

$$<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}\left|a_k-a\right|+\frac{\varepsilon}{2}。$$

$\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}|a_k-a|=n'_\varepsilon$是一个与$n$无关的数，它不一定是整数。于是对一切$n>n'_\varepsilon$，有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}|a_k-a|=\frac{\varepsilon n'_\varepsilon}{2n}<\frac{\varepsilon}{2}。$$

从而，对于一切$n>\max\{n'_\varepsilon, n_\varepsilon\}$，有

$$|y_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

试寻求一种较简明的证法。

证 上述解法是从极限定义着手，使所求问题得到证明。但此法显得过于麻烦。事实上，若根据数列的特点，由施笃兹定理，令

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad z_n=n,$$

便有

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{z_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{z_n - z_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} a_n。$$

问题3 对于数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，若$x_n \geqslant y_n$，有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$。试问：若由$x_n > y_n$是否能得出结论$\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$？

解 回答是否定的。例如下面二数列

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}，\{y_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}，$$

显然，这里有$x_n > y_n$，但是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)。$$

问题4 关于函数的极限有如下一些命题：

（1） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则$f(x)$在$x_0$某一邻域内有界；

（2） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则$\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$；

（3） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$存在，

则$\lim\limits_{x\to x_0}[f_1(x) + f_2(x)]$存在；

（4） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$存在，

则$\lim\limits_{x\to x_0}[f_1(x)\cdot f_2(x)]$存在。

试问这些命题的逆命题是否成立？

解 上述四个命题的逆命题都是不成立的。现举例说明如下。

（1） $\sin(1/x)$在0点任一邻域有界，但$\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$不存在。

（2） 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1， & x\text{为无理数}， \\ -1， & x\text{为有理数}， \end{cases}$$