E. PARZEN

MODERN PROBABILITY THEORY AND ITS APPLICATIONS

現代機率學

汪永祺 譯

現代機率學

Modern Probability Theory and Its Applications

巴爾森 著
E. Parzen

汪永祺 譯

幼獅譯叢

六十三年三月再版
六十一年三月出版
幼獅文化事業公司出版
中華民國 臺北市
幼獅編譯中心主編

總經銷：幼獅書店
臺北市漢中街五十一號
臺北市延平南路七十一號
印刷廠：協進印書館
每冊定價新臺幣 #150

譯 者 的 話

「現代機率學」是美國史坦福大學統計學系教授巴爾森著的。原書的初版是一九六〇年發行，至今十年，祇重刊過八次，並未再版。從這個記錄來看，這本書該算得是够成熟的著作了。作者研究生涯太忙，無法重訂；但原著立意常新，也還不致落伍。其實，科學上是祇有「合用」與「不合用」的區分，根本談不到「新」和「舊」的；我所以譯出這本書，便本着這種想法。

作者在原序裏曾經寫明了書的緣起和體制，譯者沒有理由再說一遍；所以，我祇寫一點譯書時的甘苦，抒發一些自己的淺見，片段地向讀者報導。

據我自己的體認，現有中文數學教材的文字似乎與口述有點距離，唸起來不能引起直接的想像。所以，我大膽地改用了一種陳述方式，盡量地把文字都變成「話」。

機率論內的陳述是很冗長而錯縱的，對一件事的說明，甚至會使人半途忘記。為了把話講清楚，我在不得已的情況下，難免用了一些很長的句子，但標點的使用已經是極為審愼的了。我的原則是不用頓點而多用半支點，並且儘能用一句來陳述一件事。

機率論和統計學的書籍編法似乎稍有不同，書中常常提到不少人名；我習於給外國人起中式姓名，這時就遭逢考驗了。這本書裏對外

國作者的姓名是分三途處理的：鼎鼎大名的宗師一律簡稱某氏，如卜氏（Poisson），馬氏（Markov）等；有些人起個中式姓名，有些人祇好用英文原名了。

原書裏本來編有很好的參考系統，對章節，示例，習題，圖表，公式，和索引都安排得很科學。由於出版時間的倉促，這些事在中文本裏都未能全部保持：示例，挿表，和公式大致採用原書的編法，習題改成不編節號，章節更改成了中式的，索引祇好從缺。原書裏列有單數習題的解，中文本裏也未編入。這些都是我應當表示歉意的，敬請讀者原諒。

末了，我要寫個謝啓：謝謝友人侯家駒教授的推薦和幼獅編譯中心張身華主任的承諾出版。我想，這種水準不算低銷路不算好的書是祇有眞正的出版家纔肯出版的，也祇有存心爲國家科學前途着想的出版家纔肯不計工本地出版的；知音之感已使我心頭充滿溫暖，我覺得自己幾年來的傻勁還沒有白費。書的編排不能算是盡善盡美，但已經是我所刊行的幾本書中最出色的了（我對出書一向不肯敷衍）；這種成就是幼獅編譯中心歐麗芳小姐促成的，我也要在這兒向她道謝。

汪 永 祺

六十年一月

序

近年來許多科學家和工程師都對機率發生了興趣，便注意到機率的數學理論。要問一件儀器是不是好用，便自然改問它好用的機率是多少；要研究太空中某些物體的位置，自然便問它們在一定區域內的機率是多少，不再問它們是不是在那一指定區域內了。這麼一說，機率論實在是所有科學家，工程師，數學家，統計學家，和數學教師應當在大學本科內學習的。

一本機率論基本教材要能滿足兩種條件：

第一，機率本身就是很有趣的，值得把它的美引導給學生們欣賞。就這件事來說，在許多不同領域的書籍裏都能找出一些機率意念的解釋；看來機率論似乎是一批雜耍兒，缺少一套統一的方法。但從另方面說，機率觀念又自有意義，並不祇靠應用來解釋。所以，機率觀念與實現象間是可以做形式上類比的；現象各各不同，但原理却是一樣。舉個例子來說，影響某種年齡男人壽命和影響電泡壽命的種種因素並不相同，但這兩種數量却可以應用相同的數學觀念。

第二，機率論又是許多科學（如統計學，統計物理學，工業工程，通訊工程，遺傳學，統計心理學，計量經濟學等）的基礎，可以在這些科學內得到應用。所以，在機率論基本課程裏應當教會學生求解機率問題的技巧；這却不能仗倚直覺機智。在這本書裏，便要教會

學生用數學推理的方式，有條理地構成機率問題。這種敎法的第一步先想要到一個樣品記述值的集，而樣品記述值的集却是定義在要探討的逢機現象樣品記述空間上的。本着同樣的精神，逢機變數和同它時並出的種種令人迷惘的意念也就由數值性逢機現象引導出來了。

這本書是寫給旨趣與基礎各各不同的學生當作敎本用的，目的是使未學過高等數學的讀者，能在不作嚴格證明的條件下，瞭解現代機率概念。

書內的前六章可以用作大學二三年級一學季 (quarter) 基本機率論的敎材，祇要讀過大學一年級微積分就够了。如果學生的數學程度好一點，可以接讀第七和八章。要是學生的微積分基礎不差，這前八章書大約可以用三十九小時講完；不過，每章的最後一節都得略去。書內有許多節都是可以獨立讀的，也不致接不上。

第九和十章比較深些，要介紹機率極限定理和特徵函數；包含大數定律和趨中性定理的嚴格證明。

學習機率論時，讀者無疑地是在探尋一種前所未有的思考途徑，是需要用許多有趣的問題來說明和測驗領悟程度的；所以，書內便列入了一百六十個例子，一百二十個理論題，和四百八十個習題。習題都分兩類，列在每一節的後面。理論題是定理的引申，需要作正式的證明；一般習題祇是和實際逢機現象有關的數值運算和種種機率論應用的例示。書的後面還列有單數習題的答案，雙數題却另放在一本小册子裏。

書內符號的選用有兩項準則，必需使人一看就懂，而且要能用英文讀出來。所以，符號 $FX(x)$ 就定義爲「逢機變數X的分布函數在實數x處的值。」書內的術語倒是和近年來一般機率論學者所使用的一樣。

一本教科書的作者差不多受過所有從事這門科學的學者們的好處，要感謝也無從謝起。在這兒，我特別要謝謝本書第一章第八節內提到的幾位學者。

我在史坦福大學的同事鮑克 (A. Bowker) 和柯林 (S. Karlin) 兩位教授都曾給我長期的鼓勵，同時又給我安排了一種啓發性的研究環境，都值得特別感謝。因爲，這些事都和我瞭解機率和統計理論有點關係。

在別的同事和朋友中，我要謝謝常作有價值建議的蔡倫(Marvin Zelen) 先生。

我在史坦福大學的學生們也對這本書有所貢獻，我也需要謝謝他(她) 們；特別是道爾頓 (E. Dalton)，伊維賽 (D. Yluisaker)，鮑士威 (M. Boswell) ，和韋廉士 (P. Williams) 四位。

此外，我還要謝謝史坦福大學應用數學及統計研究館各位同人的協助，莫康夫人(Mary Alice McComb)，費爾德夫人(Isode Field)的打字，和濮萊茵夫人 (Betty Jo Prine) 的繪圖。

巴爾森

加州史坦福大學

一九六〇年一月

目 錄

第　一　章

機率論與逢機現象數學模式的研究

這一章書是用來討論機率論本質(nature of probability theory)的。第一節便指出了所謂逢機性 (random) 現象的存在。第二節接着提出本書內所採取的研究態度，也就是說：機率論就是逢機現象的數學模式的研究 (study of mathematical models of random phenomena)。構成數學模式的語法和符號都留在第三到第七節討論。

第一節　機率論是用來研究逢機現象的

近來，各種科學領域都日漸用到機率論的觀念，所涉門類既廣且多；遺傳學家預測某種人類特徵的相對頻度 (relative frequency)，電信工程師計算電話通話密度 (density)，工業工程師管制產品的品質標準，通訊和自動化工程師研究雜音 (noise) 存在時的信號傳送，物理學家研究電路中的熱雜音和液體或氣體媒質內粒子的勃朗運動，

都會用到它。機率論的應用是如此之廣，它所研究的究竟是甚麼？要回答這個問題，得先研究前述幾種現象的性質；具有某一遺傳特徵的個體的數目，某兩城間指定某天某時內的電話通話次數，某一定生產程序所出產品的不合品質標準品件數，某條指定公路上每天的車禍次數，凡此種種都是可以應用下述定義的逢機現象。

逢機（或機遇 chance）現象是一種經驗中的現象，它的特性是：在一組已定狀況下，異次觀測不常得出相同結果（outcome）（所以沒有決定規律性），但異次觀測的結果却有統計規律性（statistical regularity）。這也就是說，在一串獨立出現的現象的觀測中，得出的不同可能結果的相對頻度在 0 和 1 兩數之間。

和逢機現象有關的觀念還有逢機事件（random event）和逢機事件的機率（probability of random event）。進行長期性逢機觀測而能使所觀測現象出現的相對頻度在觀測值數目增至無限時趨於一個穩定的極限值，這種事件便叫做逢機事件；相對頻度的極限值便叫做逢機事件的機率。

現在用一個典型的逢機事件進一步說明逢機現象的意義，不妨就用汽車車禍做例子。一次車禍的發生是因許多因素而決定的，略爲改變一個因素就很可能避免了它；駕駛人起步提早或後延了十秒鐘，中途停車買了一包香煙，過十字路口時減速躲開一隻貓，種種類似的變化都可能使他逃過此刼；方向盤微微一動更可以使局面完全改觀了。任何一位駕駛人上了公路，是否捲入車禍是不可預測的。但如把某一天內該條公路上的全部（或其中很多個）駕駛人都觀測一番，車禍的成數（proportion）是大致可以得出的。如果這個成數每天相同，一位駕駛人在這條公路上行駛的事便是一種逢機現象，而他碰上車禍的事便是一件逢機事件。

由一袋球內取出一個，也是一種逢機現象。設袋內有六個球，四個是白的，而兩個是紅的；除顏色不同外，六個球無法分別。現在由袋內取出一個球並記下它的顏色，試問這個球究竟是甚麼顏色？這個問題顯然是沒有答案的，所以要用試驗；取出的一個球有時是紅的有時是白的，因此，試驗的結果無法預測。

上面的試驗眞是不可預測的嗎？這却又不盡然。試將袋內六個球攪匀後取出一個並記下顏色，再將取出的球歸還袋內並攪匀再取一個，重複這種做法至600次。這600次取球的事每次都算是一個獨立的試作(independent trial)，合起來便是表 1A。由表內數字來看，每100 個試作所成的段 (block) 以及全部 600 個試作的集 (set) 內的試驗中白球成數都近等於 $^2/_3$。這樣看來，成數 $^2/_3$ 對這個試驗好像有特殊意義，長期試作中取得白球成數 $^2/_3$ 是相當合理的。就相信這種想像，這種袋內取球試驗的結果便是一種逢機現象了。

表 1A

由四個白球兩個紅球的袋內取出一個組成

一個試驗的 600 個試作中白球的個數

試作編號	白球數	累計編號	取得白球成數
1–100	69	1–100	0.690
101–200	70	1–200	0.695
201–300	59	1–300	0.660
301–400	63	1–400	0.653
401–500	76	1–500	0.674
501–600	64	1–600	0.668

說得更廣泛一點，如果在長串試作中袋內取球試驗都能產生一個固定的白球成數，那末自然便會得到 (i) 這種袋內取球的事是一種逢

機現象和（ii）取得白球的事便是一個逢機事件。

有了逢機現象的知識，不妨再看一個示例。設有300個學生同時是一間祇能容納200人的學校的入學許可候補人，爲求公平起見可就得用一種逢機措置來選擇了。逢機選擇法的一種是集合300人並請他們在袋內取球；袋內就裝着四個白球和兩個紅球，抓到白球的准許入學。這樣一來，在取球之前某個指定學生的中選與否是無法先知的；但如相信取球試驗具有統計規律性，根據表1A內白球出現機率爲 $^2/_3$ 的試驗，取得白球而中選的學生數便總會在200名左右；數目200其實便是（i）試驗的試作次數和（ii）試驗出現白球事件之機率的乘積。詳細分析一下，取得白球的學生數在186到214間的機率便相當地大。

應用機率理論居然能用相同的數學程序解決差別相當大的問題，這種事實的說明也是本書寫作目的之一；這件事也可以用示例來說明。有些大學常常發現，實際註册的學生數祇是准許入學人數的一部分；爲了解決這種困難，應當多准許一些入學名額來保障註册時不致缺額。某所大學發現註册者祇佔准許名額的 $^2/_3$，這所大學准許入學的某名學生註册入學的機率便也不妨說是 $^2/_3$。要是該大學打算保證有200人註册，它就不妨准許300人入學。

習　題

1. 試就下列各類專家的工作各舉一個逢機現象的例子：
(i)物理學家，(ii)遺傳學家，(iii)交通管制工程師，(iv)品質管制工程師，(V)通訊工程師，(vi)經濟學家，(vii)心理學家，(viii)社會學家，(ix)流行病學家，(x)醫學家，(xi)教育家，(xii)電視節目的主持人。

2. 根據美國統計提要（The Statistical Abstracts of the United States, 1957, p.57）的報導，美國若干年來所生小孩中每 1,000 個女孩的男孩數略如下表：

年　度	每 1,000 女孩的男孩出生數
1935	1,053
1940	1,054
1945	1,055
1950	1,054
1951	1,052
1952	1,051
1953	1,053
1954	1,051
1955	1,051

你想，一個新生孩子是男孩的事件是不是逢機事件？如果是，它的機率是多大？試申述理由。

3. **討論題：**遇着一位未受過訓練的人，你怎樣解釋下面的一段陳述：保險公司並不是在和顧客打賭，因為它雖然不能知道每一千人或每一萬人或每一百萬人中某人會發生甚麼變故，但却充分精確地知道前述各羣人會發生該種變故的程度。

第二節　機率論就是逢機現象的數學模式的研究

有人認為，機率論的本質大概和物理，化學，生物等研究自然的科學相類。物理，化學，和生物都可以定義為可觀測現象的研究；要研究的便是物理，化學，和生物現象。仿照這種說法，機率論也可以