全国高等教育自学考试辅导用书

高等数学

自学与考试

（机械类专业）

贾建华　编著

考试内容精要

仿眞模拟试题

南开大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学自学与考试．机械类/贾建华编著．-天津：南开大学出版社，2000.1
全国高等教育自学考试辅导用书
ISBN 7-310-01341-7

Ⅰ.高... Ⅱ.贾... Ⅲ.高等数学-高等教育 自学考试 教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 50249 号

出版发行 南开大学出版社
地址：天津市南开区卫津路 94 号
邮编：300071 电话：(022)23508542
出版人 张世甲
承　印 天津宝坻第四印刷厂印刷
经　销 全国各地新华书店
版　次 2000 年 1 月第 1 版
印　次 2000 年 1 月第 1 次印刷
开　本 850mm×1168mm 1/32
印　张 12
字　数 299 千字
印　数 1 - 5000
定　价 15.00 元

前　　言

高等数学作为一门必修课，不仅需要掌握它的基本理论，而且还要掌握它的基本方法和基本技能. 笔者编写这本《高等数学自学与考试》一书，主观上就是希望能对学习高等数学的读者在加强解题能力和解题技巧方面有所帮助. 本书是以全国高等教育自学考试指导委员会机械类专业委员会编写的《高等教育自学考试机电类专业专科高等数学自学考试大纲》为参考，以其指定教材——陆庆乐、马知恩编写的《高等数学》为基础编写而成的. 在选材过程中，笔者总结了多年从事高等教育自学考试教学工作的经验，并参考了大量全国高等数学（工、专）自学考试试题及有关资料，从中选用了一些较好的、有启发性的典型例题. 在解题方法上不仅是为了得到题目的答案而解题，而是力图做到由浅入深，从典型到一般地提炼出一套解题的方法和技巧，达到举一反三、触类旁通的目的. 考虑到读者的思维方法及能力的差异，有些例题给出了多种解题方法. 这些解题方法有些是较直观和容易想到的，有些则是带有一定启发性和技巧性的方法. 其目的是为了使读者不仅学会解题方法，而且通过解题，在思维方法上有所启示和收获.

为了加强读者独立解题能力，本书每章都配备了一定数量的各种类型的习题，希望读者能独立地加以练习. 另外，为了方便读者检验解题的正确性，书后还配有习题答案，供读者参考.

书中三角函数符号按国标（GB3102）给出（正切 $\tan x$，余切 $\cot x$，反正切 $\arctan x$，反余切 $\operatorname{arccot} x$），请读者注意.

在编写过程中，白继祖、李正明、何志宏几位老师对本书的撰写多次进行探讨研究，并对初稿认真审阅，提出许多宝贵意

见；李淑冰、高敏芬、左义欣、王克芬、贾晖等同志对材料的选编、稿件誊写、画图给予了大量帮助，在此一并表示感谢.

由于编写时间仓促，书中缺点错误在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

1999 年 8 月

第一章 函 数

一、内容提要

1．绝对值的基本性质

(1) $|a|\geqslant 0$，$|a|=|-a|$，$|a|=\sqrt{a^2}$；

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$；

(3) $|a|\leqslant b \iff -b\leqslant a\leqslant b$；

$|a-b|\leqslant r \iff b-r\leqslant a\leqslant b+r$；

(4) $|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$；

(5) $\big||a|-|b|\big|\leqslant|a-b|$；

(6) $|ab|=|a|\cdot|b|$；

(7) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

2．邻域

称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$为 x_0 的 δ 邻域；开区间$(x_0-\delta,x_0)$、$(x_0,x_0+\delta)$分别称为点 x_0 的左邻域、右邻域；称$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$为点 x_0 的去心邻域.

邻域也可以用不等式来表示：

满足不等式 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 即 $|x-x_0|<\delta$ 的所有 x 构成的数集称为x_0 的 δ 邻域；

满足不等式 $x_0-\delta<x<x_0$ 即 $0<x_0-x<\delta$ 的所有 x 构成的数集称为x_0 的左邻域；

满足不等式 $x_0<x<x_0+\delta$ 即 $0<x-x_0<\delta$ 的所有 x 构成

的数集称为x_0的右邻域；

满足不等式 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 且 $x\neq x_0$ 即满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的所有x构成的数集称为x_0的去心邻域.

设x_0为一已知点，包括x_0的任意一个开区间(a,b)称为x_0的邻区. x_0的δ邻域也称为x_0的δ邻区.

3. 函数的概念

(1) 函数的定义

设有两个变量x与y，当变量x在给定的某个变域X中取任意一个值时，另一个变量y就按某一确定的法则有一个确定值与x的这个值相对应，则称变量y为变量x的函数，记为

$$y=f(x)$$

其中x称为自变量，y称为因变量，X称为函数的定义域. 函数$f(x)$在x_0处的值记为$f(x_0)$. 全体函数值所构成的数集称为函数的值域.

设$y=f(x)$的定义域为X，X为几个互不相交的数集之并，x在不同的数集时，$f(x)$的表达式也不同，这种函数称为分段函数.

(2) 函数定义域的确定法

如果函数是由解析法表示的，且未赋予实际意义，则其定义域就是使函数表达式有意义的自变量所有可能取值的集合；对于赋予实际意义的函数，其定义域由问题的实际意义确定.

(3) 两个函数的相同与不同

如果两个函数有相同的对应关系，并且有相同的定义域，则称这两个函数是相同的，否则就是不同的.

(4) 函数的增量

对于函数$y=f(x)$，当自变量从x_0变到x_1时，相应地，函数从y_0变到y_1. 称x_1-x_0为自变量x的增量，记为Δx；称y_1-y_0为函数的增量，记为Δy. 即

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

4. 函数的基本特性

(1) 单调性

设函数 $y=f(x)$于区间 I 有定义,如果对任意的 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 单调增;如果对任意的 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 单调减.

单调增函数或单调减函数统称为单调函数,区间 I 称为单调区间.

(2) 有界性

如果存在两个实数 A 和 B,对一切 $x \in I$,总有 $A \leqslant f(x) \leqslant B$,则称函数 $f(x)$在 I 是有界的,否则就称 $f(x)$是无界的.

函数的有界性也可以定义如下:

如果存在常数 $M>0$,使对任意的 $x \in I$,总有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$在 I 是有界的.

(3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域关于原点对称,如果对属于定义域的任何 x 值,总有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为偶函数;如果总有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称.

两个偶(奇)函数之和仍为偶(奇)函数;两个偶函数或两个奇函数之积仍为偶函数;奇函数与偶函数之积为奇函数.

(4) 周期性

对于函数 $y=f(x)$,如果存在一正数 ω,对属于定义域的任意 x,总有 $f(x \pm \omega)=f(x)$成立,则称 $f(x)$为周期函数.如果一个函数存在最小的正周期 T,则称 T 为这个函数的周期.

5. 复合函数与反函数

(1) 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 U,函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 X,值域为 D,如果 $D\cap U\neq\phi$,则称 $y=f(\varphi(x))$为函数$y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数.其中 x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量,其定义域为 $I=\{x\mid\varphi(x)\in U,x\in X\}$.

(2) 反函数

设 $y=f(x)$是定义在 X 上的函数,其值域为 Y,如果对每个 $y\in Y$,都有唯一的一个 $x\in X$,满足 $y=f(x)$,则 x 为定义在 Y 上以 y 为自变量的函数,这个函数用 $x=\varphi(y)$或 $x=f^{-1}(y)$表示,并称其为函数 $y=f(x)$的反函数,$x=\varphi(y)$的定义域为 Y.

显然函数 $y=f(x)\quad x\in X$ 与其反函数$x=\varphi(y)\quad y\in Y$ 的图形是相同的.如果将 $x=\varphi(y)\quad y\in Y$ 表示为$y=\varphi(x)\quad x\in Y$,即反函数的自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,则函数 $y=f(x)$与 $y=\varphi(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

6. 初等函数

(1) 基本初等函数

(ⅰ) 幂函数　$y=x^{\alpha}$(α 为任何实数)

无论 α 为何值,x^{α} 在$(0,+\infty)$内总有定义,而且其图形都经过点(1,1).

当 α 为非负整数时,定义域为$(-\infty,+\infty)$;当 α 为负整数时,定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;当 α 为正有理数$\frac{q}{p}$时,若 p 为偶函数,则定义域为$[0,+\infty)$,若 p 为奇数,则定义域为$(-\infty,+\infty)$;当 α 为负有理数$\frac{q}{p}$时,若 p 为偶数,则定义域为$(0,+\infty)$,若 p 为奇数,则定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

当 α 为偶数时,x^{α} 为偶函数;当 α 为奇数时,x^{α} 为奇函数.

当 $\alpha>0$ 时,x^{α} 在$[0,+\infty)$是单调增的;当 $\alpha<0$ 时,x^{α} 是单

调减的.

(ⅱ) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,其图形经过点$(0,1)$.当$a>1$时,a^x为单调增的,当$0<a<1$时,a^x为单调减的.

(ⅲ) 对数函数 $y=\log_a x\quad(a>0,a\neq1)$

对数函数是指数函数的反函数,其定义域为$(0,+\infty)$,图形经过点$(1,0)$.当$a>1$时,$\log_a x$为单调增的,当$0<a<1$时,$\log_a x$为单调减的.

(ⅳ) 三角函数

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\tan x,$$
$$y=\cot x,\quad y=\sec x,\quad y=\csc x.$$

$y=\sin x$与$y=\cos x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,都是以2π为周期的周期函数,且$|\sin x|\leqslant1$,$|\cos x|\leqslant1$.$y=\sin x$为奇函数,$y=\cos x$为偶函数.$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调增,$y=\cos x$在$[0,\pi]$上单调减.

$y=\tan x$的定义域为$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,以$\pi$为周期,且为奇函数.

$y=\cot x$的定义域为$x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,以$\pi$为周期,且为奇函数.

$y=\sec x$的定义域与$\tan x$相同,$y=\csc x$的定义域与$\cot x$相同.$\sec x$与$\csc x$都是以2π为周期的周期函数.

(ⅴ) 反三角函数

$$y=\arcsin x,\qquad y=\arccos x$$
$$y=\arctan x,\qquad y=\operatorname{arccot} x$$

$y=\arcsin x$是$y=\sin x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数,其定义域为$[-1,1]$;$y=\arccos x$是$y=\cos x$在区间$[0,\pi]$上的反函数,其

定义域为$[-1,1]$；$y=\arctan x$ 是 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的反函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$；$y=\mathrm{arccot}\,x$ 是$y=\cot x$ 在$(0,\pi)$内的反函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2)初等函数

由基本初等函数经有限次四则运算和复合而成的函数称为初等函数.

二、典型例题分析

1. 单项选择题

(1) 开区间(0,2)是______.

① 2 的邻区　　② 0 的邻区

③ 以 1 为中心，1 为半径的邻区

④ 以 1 为中心，2 为半径的邻区

解　由点 x_0 的 δ 邻区(邻域)的定义知，当 $x_0=1,\delta=1$ 时，$(x_0-\delta,x_0+\delta)=(0,2)$，故开区间(0,2)是以 1 为中心、1 为半径的邻区.因此答案为③.

(2) $y=\frac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$的定义域为____.

① $(0,1)$　　② $(0,1)\cup(1,4)$

③ $(0,4)$　　④ $(0,1)\cup(1,4]$

解　由于$\frac{x-1}{\ln x}$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，$\sqrt{16-x^2}$的定义域为$[-4,4]$，而 $y=\frac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域为 $\frac{x-1}{\ln x}$ 及 $\sqrt{16-x^2}$的定义域之交，故其定义域为$(0,1)\cup(1,4]$.答案为④.

(3) 设 $f(x)$的定义域是$[0,4]$，则 $f(x^2)$的定义域是______.

① $[-16,16]$　　② $[-2,2]$

③ [0,16]　　　　　④ [0,2]

解　显然 $f(x^2)$是一个复合函数.一般地,复合函数$f(\varphi(x))$的定义域确定方法如下:

设 $y=f(u)$的定义域为 U,$u=\varphi(x)$的定义域为 X,则复合函数 $y=f(\varphi(x))$的定义域为数集

$$\{x \mid \varphi(x)\in U, x\in X\}$$

对于本题,由于 $f(x)$的定义域为$[0,4]$,故由 $0\leqslant x^2\leqslant 4$ 得 $-2\leqslant x\leqslant 2$,于是 $f(x^2)$的定义域为$[-2,2]$.答案为②.

(4) 已知 $f(x+1)=x^2$,则 $f(x)=$ ______.

① x^2　　　　② $(x+1)^2$

③ $(x-1)^2$　　④ x^2-1

解　为了确定函数 $f(x)$,我们先考虑更一般的情况:设 $f(\varphi(x))=g(x)$,其中 $\varphi(x)$存在反函数,设 $t=\varphi(x)$,其反函数为 $x=\psi(t)$,则由

$$f(t)=f(\varphi(x))=g(x)=g(\psi(t))$$

得

$$f(x)=g(\psi(x))$$

对于本题,令 $x+1=t$,则 $x=t-1$,故

$$f(t)=f(x+1)=x^2=(t-1)^2$$

于是

$$f(x)=(x-1)^2$$

答案为③.

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ x^2, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=5x-4$,则 $f[g(0)]=$ ______.

① 0　　② -4　　③ -16　　④ 16

解　由于 $g(0)=0-4=-4<0$,故

$$f[g(0)]=f(-4)=(-4)^2=16$$

因此答案为④.

(6) 当函数 $y=f(x)$的自变量 x 的增量 $\Delta x>0$ 时,相应的函

数的增量 Δy ______.

① 一定大于 0　　　② 一定小于 0

③ 一定不大于 0　　④ 不一定大于 0

解　由于 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$,故 Δy 的符号不仅与 Δx 有关,而且还与 $f(x)$的性质有关.当 $\Delta x > 0$ 时,如果 $f(x)$是单调增,则 $\Delta y > 0$;如果 $f(x)$是单调减,则 $\Delta y < 0$;如果 $f(x)$不是单调函数,则还有可能使 $\Delta y = 0$.如 $y = x^2$,取 $x = 0, \Delta x = 1$,则 $\Delta y = 1 - 0 = 1 > 0$;但若取 $x = -1, \Delta x = 1$,则 $\Delta y = 0 - 1 = -1 < 0$.再如取 $x = -1, \Delta x = 2$,则 $\Delta y = 1 - 1 = 0$.虽然以上三例都是取 $\Delta x > 0$,但 Δy 的符号分别有大于 0、小于 0 及等于 0.因此 Δy 的符号不能确定.答案为④.

(7) 下列各对函数中,表示同一函数的是______.

① $y_1 = \dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$　　　$y_2 = x + 3$

② $y_1 = \sqrt{(x+1)(x-1)}$　　　$y_2 = \sqrt{x+1}\,\sqrt{x-1}$

③ $y_1 = \sqrt{(2x-1)^2}$　　　$y_2 = |2x-1|$

④ $y_1 = \lg(x+2)^2$　　　$y_2 = 2\lg(x+2)$

解　由于$\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$的定义域为 $x \neq 1$,$x+3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,故$\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$与 $5x+3$ 两函数的定义域不同,因此不是同一函数;由于$\sqrt{(x+1)(x-1)}$的定义域为$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$,$\sqrt{x+1}\,\sqrt{x-1}$的定义域为$[1, +\infty)$,两函数的定义域不同,故不是同一函数;又由于 $\lg(x+2)^2$ 的定义域为$(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$,而 $2\lg(x+2)$的定义域为$(-2, +\infty)$,两函数的定义域也不同,故也不是同一函数;由绝对值的性质知,函数 $\sqrt{(2x-1)^2} = \sqrt{|2x-1|^2} = |2x-1|$,故$\sqrt{(2x-1)^2}$与$|2x-1|$不仅有相同的定义域,而且有相同的对应关系,因此是同一函数.

故答案为③.

(8) 设 $f(x)$于$(-\infty,+\infty)$有定义,下列函数中必为奇函数的是______.

① $y=-|f(x)|$ ② $y=xf(x^2)$

③ $y=-f(-x)$ ④ $y=f(x)+f(-x)$

解 由于 $f(x^2)$为偶函数,x 为奇函数,而奇函数与偶函数的乘积为奇函数,故答案为②.

(9) $y=5\sin(\pi x)$的最小正周期是______.

① 10 ② 2 ③ 10π ④ 2π

解 由于函数 $\sin x$ 的最小正周期为 2π,故当 $a>0$ 时

$$\sin(ax)=\sin(ax+2\pi)=\sin\left[a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)\right]$$

故函数 $\sin(ax)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{a}$,于是函数 $y=5\sin(\pi x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{\pi}=2$,故答案为②.

对于更一般的情况,设 $y=a\sin(bx+c)$,a,b,c 为常数,$a\neq 0,b>0$,则

$$a\sin(bx+c)=a\sin(bx+c+2\pi)=a\sin\left[b\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)+c\right]$$

故 $a\sin(bx+c)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{b}$.

同理可证,当 $a\neq 0,b>0$ 时,函数 $y=a\cos(bx+c)$的最小正周期也为$\frac{2\pi}{b}$.

(10) 设 $f(x)=\ln\frac{a-x}{a+x}(a>0)$,下列各式中正确的是______.

① $f(x)=-f(-x)$ ② $f(x)=f(-x)$

③ $f(x+1)=f(x)$ ④ $f(x+1)=-f(x-1)$

解 由于 $f(-x)=\ln\frac{a-(-x)}{a+(-x)}=\ln\frac{a+x}{a-x}=-\ln\frac{a-x}{a+x}=-f(x)$,故答案为①.

(11) 设 $f(u)$是奇函数,$u=g(x)$也是奇函数,且当 x 在与原点对称的区间内取值时,相应的 u 值使 $f(u)$有意义,那么复合函数 $f[g(x)]$是______.

① 奇函数　　② 偶函数

③ 既不是奇函数,又不是偶函数

④ 无意义

解 由于 $u=g(x)$是奇函数,故 $g(-x)=-g(x)$.又由于 $f(u)$是奇函数,故 $f(-u)=-f(u)$.于是

$$f[g(-x)]=f[-g(x)]=-f[g(x)]$$

因此复合函数 $f[g(x)]$是奇函数,答案为①.

(12) 设 $f(x)=\ln x+1, g(x)=\sqrt{x}+1$,则 $f(g(x))=$______.

① $\ln(\sqrt{x}+1)+1$　　② $\ln\sqrt{x}+2$

③ $\sqrt{\ln(x+1)}+1$　　④ $\ln\sqrt{x}+1$

解 由于 $f(x)=\ln x+1, g(x)=\sqrt{x}+1$,故

$$f(g(x))=\ln(\sqrt{x}+1)+1$$

于是答案为①.

(13) 设 $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}$,则其反函数是______.

① $y=2^{x-1}$　　② $y=2^{2x-1}$

③ $y=4x-1$　　④ $y=4^{2x-1}$

解 由于 $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}=\log_4 2\sqrt{x}$,故

$$2\sqrt{x}=4^y \qquad x=4^{2y-1}$$

于是 $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}$ 的反函数是 $y=4^{2x-1}$,答案为④.

(14) 设 $f(x)=\frac{1-3x}{x-2}$与 $g(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称,

则 $g(x)=$______.

① $\dfrac{1+2x}{x+3}$　　② $\dfrac{1-3x}{x-2}$

③ $\dfrac{x+3}{1+2x}$　　④ $\dfrac{x-2}{1-3x}$

解　由于 $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$ 与 $g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，故 $y=\dfrac{1-3x}{x-2}$ 与 $y=g(x)$ 互为反函数，由 $y=\dfrac{1-3x}{x-2}$ 得 $x=\dfrac{1+2y}{y+3}$，故 $y=\dfrac{1-3x}{x-2}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1+2x}{x+3}$，于是 $g(x)=\dfrac{1+2x}{x+3}$. 因此答案为①.

2. 计算题

(1) 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，求其反函数.

解　由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 得

$$e^y=x+\sqrt{x^2-1}$$

又
$$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})=\ln\frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\ln\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=-\ln(x-\sqrt{x^2-1})$$

故又有
$$e^{-y}=x-\sqrt{x^2-1}$$

由方程组 $\begin{cases} e^y=x+\sqrt{x^2-1} \\ e^{-y}=x-\sqrt{x^2-1} \end{cases}$ 解得

$$x=\frac{1}{2}(e^y+e^{-y})$$

故所求的反函数为 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

(2) 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，试求 $f[f(x)]$ 及 $f\{f[f(x)]\}$.

解　由 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ 得

$$f[f(x)]=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}$$

3. 证明题

(1) 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,证明 $f(x)$为奇函数.

证 因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$
$$=\ln\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

故 $f(x)$为奇函数.

(2) 设 $f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数,

$$F(x)=f(x)+f(-x),G(x)=f(x)-f(-x)$$

证明 $F(x)$为偶函数,$G(x)$为奇函数.

证 因为

$$F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$$
$$G(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-G(x)$$

故 $F(x)$为偶函数,$G(x)$为奇函数.

(3) 设 $y=f(x)$为奇函数且其反函数存在,证明其反函数也为奇函数.

证 设 $y=f(x)$的反函数为 $x=\varphi(y)$,由于 $y=f(x)$为奇函数,故

$$f(-x)=-f(x)=-y$$

因此
$$-x=\varphi(-y)$$

又由 $x=\varphi(y)$得

$$-x=-\varphi(y)$$

故 $$\varphi(-y)=-\varphi(y)$$

于是 $x=\varphi(y)$是奇函数.

(4) 设 $f(x)=\dfrac{x\cos x}{1+x^2}$,证明 $f(x)$于$(-\infty,+\infty)$有界.

证 显然 $f(x)$于$(-\infty,+\infty)$有定义,且对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$|f(x)|=\left|\frac{x\cos x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{1+x^2}$$

$$=\frac{2|x|}{2(1+x^2)}\leqslant\frac{1}{2}$$

故 $f(x)$于$(-\infty,+\infty)$有界.

习 题 一

1. 填空题

(1) 用区间表示满足不等式$|x|>|x-2|$所有 x 的集合是(　　　).

(2) 与不等式$\left|5-\dfrac{1}{x}\right|<1$ 等价的区间是(　　　).

(3) 将 $f(x)=2-|x-2|$表示为分段函数时,$f(x)=($　　　$)$.

(4) 函数 $y=\ln(\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x})$的定义域是(　　　).

(5) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{|x|+x}$的定义域是(　　　).

(6) 函数 $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$的定义域是(　　　).

(7) 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, & |x|\leqslant 3\\ x^2-9, & 3<|x|<4\end{cases}$的定义域是(　　　).

(8) 函数 $y=\arctan x$ 的主值范围是(　　　).