

凝聚态物理学丛书

晶体位错理论 基础

(第二卷)

杨顺华 丁棣华 著



科学出版社

K906/15

凝聚态物理学丛书

晶体位错理论基础

(第二卷)

杨顺华 丁棟华 著

科学出版社

1998

内 容 简 介

位错理论起源于用弹性体中位错的行为来解释晶体的范性性质,尔后发展成为晶体缺陷理论的一个重要独立部分。现代位错理论已是金属力学性质微观理论的基础,位错与固体各种结构敏感的物理性质都有相当的联系,在理论上也取得了若干新进展。本书内容是位错理论的基础,分两卷出版,本书是第二卷,主要论述位错与点缺陷的相互作用,位错的攀移与滑移,晶界、相界的位错模型,位错与裂纹,位错与马氏体相变,向错理论基础以及新近发展起来的准晶体中的位错理论。书末还附有两个附录,即位错塞积群和平面弹性理论提要。

本书可作为大专院校金属物理、材料科学及固体理论方面的高年级学生和研究生的教学用书或参考书,也可供有关教师及从事金属及其他材料研究和开发的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

晶体位错理论基础(第二卷)/杨顺华 丁棣华 著. -北京:科学出版社,1998

(凝聚态物理学丛书)

ISBN 7-03-006102-0

I. 晶… I. ①杨… ②丁… II. 位错-基础理论 IV. 077

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 11982 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

北京科地亚印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998 年 3 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1998 年 3 月第一次印刷 印张:17 1/2

印数:1—1 500 字数:460 000

定价:35.00 元

《凝聚态物理学丛书》出版说明

以固体物理学为主干的凝聚态物理学，通过半个世纪以来的迅速发展，已经成为当今物理学中内容最丰富、应用最广泛、集中人力最多的分支学科。从历史的发展来看，凝聚态物理学无非是固体物理学的向外延拓。由于近年来固体物理学的基本概念和实验技术在许多非固体材料中的应用也卓有成效，所以人们乐于采用范围更加广泛的“凝聚态物理学”这一名称。

凝聚态物理学是研究凝聚态物质的微观结构、运动状态、物理性质及其相互关系的科学。诸如晶体学、金属物理学、半导体物理学、磁学、电介质物理学、低温物理学、高压物理学、发光学以及近期发展起来的表面物理学、非晶态物理学、液晶物理学、高分子物理学及低维固体物理学等都是属于它的分支学科，而且新的分支尚在不断进发。还有，凝聚态物理学的概念、方法和技术还在向相邻的学科渗透，有力地促进了材料科学、化学物理学、生物物理学和地球物理学等有关学科的发展。

研究凝聚态物质本身的性质和它在各种外界条件（如力、热、光、气、电、磁、各种微观粒子束的辐照乃至处于各种极端条件）下发生的变化，常常可以发现多种多样的物理现象和效应，揭示出新的规律，形成新的概念，彼此层出不穷，内容丰富多彩，这些既体现了多粒子体系的复杂性，又反映了物质结构概念上的统一性。所有这一切不仅对人们的智力提出了强有力的挑战，更重要的是，这些规律往往和生产实践有着密切的联系，在应用、开发上富有潜力，有可能开辟出新的技术领域，为新材料、元件、器件的研制和发展，提供牢固的物理基础。凝聚态物理学的发展，导致了一系列重要的技术突破和变革，对社会和科学技术的发展将发生深远的影响。

为了适应世界正在兴起的新技术革命的需要，促进凝聚态物理学的发展，并为这一领域的科技人员提供必要的参考书，我们特组织了这套《凝聚态物理学丛书》，希望它的出版将有助于推动我国凝聚态物理学的发展，为我国的四化建设做出贡献。

主 编：葛庭燧

副主编：冯 端

序 言

固体材料的力学微观研究始于本世纪 20 年代. 著名的学者有苏联的 Иоффе, 英国的 A. A. Griffith, 德国的 U. Dehlinger, F. Zwyrker 和 A. Goertz 等人. 到了 30 年代, 这门学科的研究趋向成熟, 匈牙利之 E. Orowan, 德国之 M. Polanyi, 英国之 G. I. Taylor 不期于 1934 年各自发表论文, 正确地描述晶体中微观缺陷的图象, 阐明它的物理概念. Taylor 文中设想这种缺陷在晶体中成为列阵时可计算晶体的加工硬化与实验相比较, 这是材料力学中将微观结构与宏观实测联系起来的初次尝试. Taylor 将这种缺陷命名为 dislocation. 1956 年, 由 J. W. Menter, P. B. Hirsch 在电子显微镜中观察到这种晶体中缺陷的形态结构与 Taylor 所设想的丝毫无异. 自此众议纷纭者咸为缄默. 位错学说得以成立, 在固体物理学中成为一个重要的领域^①.

初, 柯俊同志 1953 年从英国归来, 我去前门旅舍访问, 谈及 dislocation 事, 两人都觉得学说新成立, 应定个译名, 以利此学说在中国推广, 因而推敲此缺陷之由来和图象, 试译为位错, 以后逐渐为大家所认可. 然而迫于当时的形势, 学习和研究位错理论及实验工作还难于开展.

1960 年吴有训先生应伦敦皇家学会邀请访问英国归来, 吴先生告诉我们: “50 年代英国的物理学研究最大成就之一就是发展了位错理论和实验工作, 他们以此为自豪”. 当时国内的政治形势也有所转变. 于是 1960 年 8 月在长春举行全国性的晶体缺陷讨论会. 会议文集于 1962 年由科学出版社出版, 这就是现在所见的《晶体缺陷与金属强度》上、下两册. 当时距 Taylor

^① 较详细的历史过程见本书第一卷引论.

等三人首创位错学说已有 28 年之久了。

自然晶体或人造晶体的结构不可能十分完美，缺陷的存在是不可避免的。科学工作者的任务就是要研究它的结构、形态以及它的由来。位错是晶体中主要缺陷之一。它也存在于非晶态和连续介质中。缺陷之存在并非对物质都是有害的。半导体中需要掺进微量元素以成结，金属强化之一途即为加工增加位错。50 年代末有若干科学家主张制造完全没有位错的晶体以达到晶体的理想强度，结果事与愿违，徒劳无功而罢。我国有句成语“格物以致知”，意思是研究事物的目的在于明白它的道理，又说“万物皆备于我”，明白了事物的道理就要利用它为我所用。这难道不是今日科技工作者的职责么？！

自 60 年代以来，我国科技工作者很快地熟悉位错理论，进行基础研究的多所创见，应用固体材料工业中去帮助解决生产中问题的更是所在多有。国外位错专著亦有多种介绍到国内，有一些译成我国文字。至于以我国文字详细论述位错理论的仅见冯端教授等所著《金属物理》（第一版 1964，科学出版社）^① 中一大章。缺乏以自己研究心得普遍论述位错这一学科的书籍，读者引以为憾。北京钢铁学院教授杨顺华同志对于位错理论研究有年，且有教学经验，又对于固体物理各分支学科有广博深邃的了解。朋友们早已劝他写这本书。10 多年前方始执笔，现已成稿，全书分两卷出版，第一卷已于 1988 年出版，此为第二卷，并承蒙丁棣华教授参与该卷的撰写工作。至于作者对写作此书的意图，材料的取舍，在本书第一卷的《前言》中已详述的了，毋需在此重复。

这是我国科学工作者以自己的观点撰写的一部论述位错学说的专著，距长春第一次讨论会已约 30 多年，去位错学说创建之年已有半个多世纪。思之能无慨叹！

钱临照

① 修订版，《金属物理学》，第一卷（1987）第七章。

目 录

《凝聚态物理学丛书》出版说明	葛庭燧、冯端
序言	钱临照
第十二章 点缺陷及其与位错的平衡	(1)
§ 12.1 概述	(1)
§ 12.2 点缺陷的弹性模型	(3)
§ 12.3 点缺陷的运动	(9)
§ 12.4 热扭折与热割阶	(15)
§ 12.5 本征点缺陷与位错的平衡	(23)
§ 12.6 溶质原子的平衡	(28)
一般性参考文献	(35)
第十三章 位错的攀移	(37)
§ 13.1 扩散控制的攀移	(37)
§ 13.2 带割阶的位错的攀移	(45)
§ 13.3 扩展位错的攀移	(51)
§ 13.4 空位过饱和时的攀移	(59)
§ 13.5 空位聚集体的成核	(62)
§ 13.6 例 螺旋形位错线、层错四面体	(64)
一般性参考文献	(73)
第十四章 位错的滑移	(74)
§ 14.1 带扭折位错的滑移	(74)
§ 14.2 扭折对的成核和运动	(78)

§ 14.3	带割阶位错的滑移	(81)
§ 14.4	割阶扩展的影响	(92)
	一般性参考文献	(102)
第十五章	溶质原子效应	(103)
§ 15.1	与一个运动势阱相关的扩散	(103)
§ 15.2	位错对 Cottrell 气团的拖曳	(111)
§ 15.3	位错对 Snoek 气团的拖曳	(124)
§ 15.4	位错芯效应	(130)
§ 15.5	其它一些溶质原子效应	(138)
	一般性参考文献	(146)
第十六章	晶界结构	(148)
§ 16.1	述引	(148)
§ 16.2	Bilby-Frank 公式和 Frank 公式	(150)
§ 16.3	在限制条件下的可能晶界结构	(154)
§ 16.4	晶界附近的应力场与晶界能	(159)
§ 16.5	重位点阵与 O 点阵	(167)
§ 16.6	近重位晶界与次级位错	(175)
	一般性参考文献	(179)
第十七章	相界结构	(181)
§ 17.1	点阵转变概述	(181)
§ 17.2	界面位错·共格位错	(185)
§ 17.3	失配与失配位错	(192)
§ 17.4	马氏体相界	(201)
§ 17.5	失配位错的例	(211)
§ 17.6	失配位错的生成机制	(215)
	一般性参考文献	(222)
第十八章	位错源与形变孪生	(223)
§ 18.1	Frank-Read 源	(223)

§ 18.2	双交滑移机制·····	(226)
§ 18.3	滑移位错环的成核·····	(228)
§ 18.4	Bardeen-Herring 源 ·····	(230)
§ 18.5	关于位错源的几个补充问题·····	(233)
§ 18.6	形变孪生·····	(235)
§ 18.7	孪生位错和原子移动·····	(238)
§ 18.8	孪生的极轴机制·····	(241)
§ 18.9	孪晶晶界的一些现象·····	(251)
	一般性参考文献·····	(256)
第十九章	裂纹与位错·····	(257)
§ 19.1	绪论·····	(257)
§ 19.2	连续分布位错群与裂纹·····	(261)
§ 19.3	裂纹和位错的弹性场·····	(273)
§ 19.4	作用在弹性奇点上的力: Eshelby 定理 ·····	(286)
§ 19.5	裂纹发射位错·····	(295)
§ 19.6	位错屏蔽及其它补充问题·····	(303)
	一般性参考文献·····	(311)
第二十章	马氏体相变·····	(312)
§ 20.1	马氏体相界的运动·····	(312)
§ 20.2	热激活运动·····	(315)
§ 20.3	与缺陷的相互作用·····	(318)
§ 20.4	马氏体成核、经典成核·····	(330)
§ 20.5	成核能量学·····	(334)
§ 20.6	非经典成核·····	(343)
§ 20.7	成核动力学·····	(349)
§ 20.8	马氏体生长、热弹性行为·····	(353)
§ 20.9	非热弹性生长、小结·····	(360)
	一般性参考文献·····	(367)

第二十一章 国内若干工作进展	(368)
§ 21.1 晶体位错的离散弹性模型.....	(368)
§ 21.2 体心立方结构 $\{110\}$ $\langle 111 \rangle$ 和 $\{112\}$ $\langle 111 \rangle$ 棱锥及其投影展示图.....	(384)
§ 21.3 非线性连续介质中的位错.....	(394)
第二十二章 向错理论基础	(399)
§ 22.1 向错的定义及其基本特征.....	(399)
§ 22.2 向错的弹性场.....	(414)
§ 22.3 向错的弹性相互作用与作用在向错上的力	(434)
§ 22.4 向错的运动及其增殖机构.....	(443)
一般性参考文献.....	(451)
第二十三章 准晶体中的位错	(452)
§ 23.1 准晶位错的高维 Burgers 矢量	(452)
§ 23.2 准晶中引进位错的 Volterra 过程	(459)
§ 23.3 准晶的线弹性理论.....	(471)
§ 23.4 Green 函数法在准晶位错理论中的应用	(485)
§ 23.5 Eshelby 法和 Stroh 表述法的推广	(497)
§ 23.6 准晶位错 Burgers 矢量的实验鉴定	(510)
一般性参考文献.....	(521)
附录 A 位错塞积群	(523)
附录 B 平面弹性理论提要	(539)
后 记	(547)

第十二章 点缺陷及其与位错的平衡

晶体中的点缺陷是多种多样的，包括例如半导体中的异价杂质，离子晶体中的色心，以及金属中的点阵空位、自填隙原子及杂质原子等。有时也把它们称为原子缺陷。对于它们的讨论涉及的范围很广，已有若干专著进行过论述。在本章里，我们仅限于讨论对位错的行为有影响的那些类型的点缺陷及其性质。令人感兴趣的是：位错线上的扭折（kink）和割阶也可以并且必须作为（位错线上的）点缺陷来处理。它们的产生、运动和湮没是位错动力学的一部分。

本章前三节简述点缺陷的一般性质和行为，后三节讨论点缺陷与位错的平衡。总的目的是为论述位错动力学作准备。

§ 12.1 概述

点缺陷是晶体中的零维结构缺陷，它的影响范围（即“坏”区域），在三个方向上都是小的。它无须，也不可能用 Burgers 迴路和 Burgers 矢量的方案去定义或描述。在本书的第一章中曾说明：对于点缺陷，可以想像用一个小球面包围起来，然后把小球内的坏物质（区域）用好物质置换，如此就可以去掉这个点缺陷。这个理想的过程对于线缺陷（例如位错）是无效的，或者说是做不到的。点缺陷与线缺陷拓扑性质之不同即在于此。

点缺陷与位错的不同点之二是：前者中的几种可认为是“热缺陷”，而后者则不是热缺陷。按照 Haasen 提出的名词定义，位错属于所谓“显微结构”（microstructure），而点缺陷则否。就这点而言，位错与晶界属于同一大类，而点缺陷则不属此类。所谓“热”缺陷意思是指这类存在物可由热激活产生，在有限温度 T 之下，具有一定的浓度，并与晶体点阵系统处于热平衡。这种热平

平衡浓度可由如下的简单考虑推出。

点缺陷的出现对晶体有两方面的影响。其一是使晶体的内能增大，其二是增加晶体的混乱程度，从而使体系的熵增加。这对于自由能 $F=U-TS$ 是两个作用相反的贡献。由于 U 和 S 都决定于点缺陷的浓度，所以，在有限温度 T 之下，为了使自由能 F 为极小，就应该存在一定的点缺陷平衡浓度。现在作一个简单的推导。考虑某一种点缺陷，晶体中可供它占据的位置有 N 个，实际存在的点缺陷的数目为 n 个 ($n < N$)。因此，此种点缺陷的排列数（排列方式）为 $N! / (N-n)! n!$ 。由此引起的组态熵的增加为

$$S_c = k \ln \frac{N!}{(N-n)! n!} \\ \simeq k [N \ln N - (N-n) \ln (N-n) - n \ln n]. \quad (12.1)$$

自由能 F 应有

$$F = U - TS = n (U_f - TS_f) - TS_c. \quad (12.2)$$

上式中的 U_f 为一个该类点缺陷的生成能， S_f 为形成一个此类缺陷时改变其周围原子振动而引起的振动熵。令 $(\partial F / \partial n) = 0$ ，即可求出平衡态点缺陷浓度的一般表示式，即

$$c = \frac{n}{N-n} = \exp [- (U_f - TS_f) / kT] \\ = A \exp (- U_f / kT). \quad (12.3)$$

但位错密度不遵守这种形式的规律。位错密度决定于晶体的形成、形变历史等。晶粒间界也是如此。

点缺陷的运动是以扩散的方式进行的，这也是和位错很不相同。这里所谓的扩散指的是原子或点阵空位由一个位置向相邻的位置的跳跃或迁移，这种运动当然需要热能的协助，并且要克服一定的势垒，此势垒高度即所谓迁移激活能。宏观的扩散现象是以这种原子迁移运动为其微观的基础。本书下文中将要着重阐明位错的若干行为是受点缺陷扩散所控制的。

点缺陷也可以通过“非热”过程产生，这些非热产生的机理是十分重要的。这样产生的点缺陷称为非平衡点缺陷，有时直观

地称为“过饱和”点缺陷。产生非平衡点缺陷的方法很多，主要有如下三种，它们在实验上都得到证实。

(1) 淬火 由式 (12.3) 可见，当晶体温度升高时，平衡点缺陷的浓度显著增加。当晶体自高温缓慢冷却时，这些热缺陷会通过各种不同机制逐渐消失，例如消失于晶体的外表面、晶粒间界或位错处，从而使其浓度随时接近于相应温度的平衡浓度。但若从高温迅速冷却，即急冷或淬火降至相当低的温度时，则高温下热平衡的点缺陷中相当大一部分可能来不及消失，而保留（或“冻结”）在低温的晶体之中。这就成为在后一温度（终了温度）下的过饱和缺陷。这种点缺陷的浓度的决定因素较多，例如缺陷类型、生成能、扩散行为、晶体显微结构情况、以及冷却速度等。

(2) 辐照效应 高能粒子轰击固体材料时，与晶体原子发生一系列碰撞过程，从而产生大量点缺陷。一般地讲，高能粒子在固体中产生的辐照效应有三种：电离、蜕变和离位。离位指的是点阵原子离开其正常坐位，产生空位和间隙原子（即所谓 Frenkel 缺陷）：在金属中这是比较常见的重要辐照效应。首次碰撞时，当传递的能量超过某一阈值，则被撞原子离开其平衡位置，成为一个初级击出原子。后者还可能继之与其它点阵原子碰撞，产生次级击出原子。如此进行下去，形成一个级联过程，持续到所能转移的能量低于某一临界值时即终止。一般，该全过程所需时间仅为 10^{-11}s 量级。这样形成含大量点阵空位和间隙原子的一个较大的晶内区域。关于辐照效应和辐照损伤的细致讨论比较艰深，已有专著论述，本书就不予讨论。

(3) 范性形变 晶体范性形变过程中晶体位错发生运动，异号位错的湮没及位错割阶的受迫攀移都会使点阵空位或间隙原子形成。反过来，点缺陷对位错运动起控制作用。这是本书以下章节的主要论题。

§ 12.2 点缺陷的弹性模型

将晶体视为连续弹性介质，建立点缺陷的弹性模型，计算出

它在晶体中的弹性场，这对于讨论点缺陷的自由能及其与其它缺陷，例如位错的相互作用等是一种很有用的近似。这里分别介绍弹性错配球模型和弹性偶极子模型。

(1) 弹性错配球模型 晶体中的点阵空位、间隙原子及溶质原子都可以粗糙地看作一个具有一定弹性常数、半径为 r_B 的球体，并嵌入到介质中的一个空洞中。空洞是取去晶体点阵中的一个正常原子所留下来的空间，或是相对应的间隙位置，并假定此时空洞周围的原子尚未产生弛豫，该空洞为半径为 r_A 的球形。一般， $r_B = (1 + \delta) r_A$ ， $\delta > 0$ 或 $\delta < 0$ 。下面以代换式溶质原子为例推导出该点缺陷的弹性场。

设溶质原子是自由半径为 r_B 的球体，填入到未经弛豫的母体原子半径为 r_A 的球形空洞中去。经弛豫达到弹性平衡后，溶质原子的半径变为 $r_B^* = (1 + \varepsilon) r_A$ 。弹性平衡态下位移 u 满足 Navier 方程（见本书第一卷附录 § A. 2），在各向同性假设下，Navier 方程的形式为

$$(1 - 2\nu) \nabla^2 u + \nabla (\nabla \cdot u) = 0. \quad (12.4)$$

由于现在的问题具有球对称性，位移场 u 只与径向距离 r 有关，在球坐标系下，上方程可简化为

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} \right) = 0. \quad (12.5)$$

此方程的解有如下形式：

$$u_r = Cr + Dr^{-2}. \quad (12.6)$$

边界条件为

$$\begin{cases} r \rightarrow 0 \text{ 时}, u_r \rightarrow 0, \\ r \rightarrow \infty \text{ 时}, u_r \rightarrow 0. \end{cases} \quad (12.7)$$

为保证界面上位移连续，应取

$$\begin{cases} u_r = \varepsilon r, & r < r_A, \\ u_r = \frac{\varepsilon r_A^3}{r^2}, & r > r_A. \end{cases} \quad (12.8)$$

由此可推出母体中的应变和应力。

应变分量为

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = -2\epsilon r_A^3 \frac{1}{r^3}, \\ e_{\theta\theta} &= e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = \epsilon r_A^3 \frac{1}{r^3}, \\ e_{\theta\varphi} &= e_{\varphi\theta} = e_{r\theta} = 0. \end{aligned} \quad (12.9)$$

故此，母体的膨胀率为

$$e_A = e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{\theta\theta} = 0, \quad r > r_A. \quad (12.10)$$

应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{4\mu_A \epsilon r_A^3}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\mu_A \epsilon r_A^3}{r^3}, \\ \sigma_{\theta\varphi} &= \sigma_{\varphi\theta} = \sigma_{r\theta} = 0. \end{aligned} \quad (12.11)$$

以上各式中仅余下数 ϵ 待定.

接下来讨论 $r < r_A$ 的情况. 式 (12.8) 中的 u_r 在 $r < r_A$ 处之值是相对于填入的小球的原始状态而计算的. 实际上, 球体在填入前需将其半径由 $(1+\delta)r_A$ 压缩至 r_A . 因此, 位移应相对小球未形变的原始状态进行计算. 故此时的 u_r 应改写为

$$u_r = (\epsilon - \delta)r, \quad r < r_A. \quad (12.12)$$

于是小球内部有均匀应变

$$e_{rr} = e_{\theta\theta} = e_{\varphi\varphi} = \epsilon - \delta, \quad r < r_A. \quad (12.13)$$

小球的体膨胀率为

$$e_B = 3(\epsilon - \delta), \quad r < r_A. \quad (12.14)$$

小球内部应力是均匀的, 压强为

$$p = 3(\epsilon - \delta)/K_B, \quad r < r_A, \quad (12.15)$$

K_B 为小球的压缩系数, 即是大块材料的物质常数, 其近似的粗糙程度与开始时用方程 (12.4) 处理此问题的粗糙程度相当.

由于母体与填入的小球处于弹性平衡, 故要求界面上正应力连续, 即

$$-p = \sigma_{rr} \big|_{r \rightarrow r_A}. \quad (12.16)$$

由式 (12.11) 和式 (12.15) 可得

$$3(\delta - \epsilon) = 4\mu_B \epsilon K_B. \quad (12.17)$$

由上式可导出下面的关系式

$$f \equiv \frac{\epsilon}{\delta} = \frac{3}{3 + 4\mu_B K_B}. \quad (12.18)$$

由此可见, 仅当小球为不可压缩, 即 $K_B = 0$ 时, 才有 $\epsilon = \delta$, 一般, $|\epsilon| < |\delta|$.

最后估算一下体积的变化. 根据式 (12.10), 母体不产生体积变化, 故体积变化应来源于空洞体积之变化, 即

$$\Delta V^\infty = 4\pi \epsilon r_A^3 = 4\pi f \delta r_A^3 = f \Delta V_{AB}, \quad (12.19)$$

式中 ΔV_{AB} 是原子 B, A 体积之差. 这是母体介质为无限大时的结果. 但实际上晶体是有自由边界的, 因此需要估计它的影响. 为了简便, 设母体为一半径为 R 的大球, 溶质原子位于此球中心, $R \gg r_A, r_B$. 由于大球表面是自由表面, 所以, 必须满足正应力在 $r = R$ 处为零的边界条件. 或者说自由表面上感生一个镜像力, 在此镜像力作用下, 大球产生均匀膨胀. 根据式 (12.11), 可算出大球的膨胀率为

$$e_A = 4\mu_A K_A f \delta r_A^3 / R^3. \quad (12.20)$$

因而整个大球的体积增加为

$$\Delta V^i = \frac{16}{3} \pi \mu_A K_A f \delta r_A^3 = \frac{4\mu_A K_A}{3} \Delta V^\infty. \quad (12.21)$$

总的体积变化为

$$\Delta V = \Delta V^\infty + \Delta V^i = (f/f') \Delta V_{AB}, \quad (12.22)$$

式中

$$f' = \frac{3}{3 + 4\mu_A K_A}. \quad (12.23)$$

若 $K_A = K_B$, 则 $f = f'$, 于是 $\Delta V = \Delta V_{AB}$. 上面虽是对球体情况推出的结果, 但 Eshelby 证明了式 (12.22) 和式 (12.23) 对任意形状的晶体均成立^[7,8].

(2) 弹性偶极子模型 溶质原子的畸变可能不具有球对称性. 例如体心立方金属中的填隙原子 (如 α -Fe 中的 C 原子), 可以处于