“模糊数学与工程新进展”国际系列丛书

模糊值及其在模糊推理中的应用

陈启浩 著

北京师范大学出版社

Fuzzy Values and Their Applications to Fuzzy Reasoning

模糊值及其在模糊推理中的应用

陈启浩 著

北京师范大学出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

模糊值及其在模糊推理中的应用/陈启浩著．—北京：北京师范大学出版社，2000.8
(模糊数学与工程新进展国际系列丛书)
ISBN 7-303-05346-8

Ⅰ．模…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．模糊数学-基本知识
Ⅳ．0159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 05255 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875)
出版人：常汝吉
北京师范大学印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本：890mm×1 240mm　1/32　印张：8　字数：203 千字
2000 年 8 月第 1 版　2000 年 8 月第 1 次印刷
印数：1～500　定价：9.00 元

序

陈　启浩氏曾是千叶大学外国人研究者，在日期间对模糊控制等应用领域的模糊理论，特别对模糊值作了较深入系统的研究，受到我国学者的关注。《模糊值及其在模糊推理中的应用》(Fuzzy Values and Their Applications to Fuzzy Reasoning) 一书总结了陈氏在日本的研究工作，今能正式出版，谨表衷心祝贺。

模糊值是闭区间［0，1］上的模糊数，在模糊逻辑、模糊推理、模糊控制等方面起着重要的作用。对模糊值理论的研究定将促进其在有关领域的应用。期望以本书出版为契机，在模糊值理论与应用方面的研究有更大的进展。

日本与中国都是模糊研究开始较早的国家，而且两国模糊界学者往来较多。陈氏在日期间除致力于学术研究外，还较广泛地与我国模糊界学者交流，建立了友好情谊。同时，从陈氏身上也看到了中国学者为繁荣自己国家的科学事业而不懈努力的品德。愿借此机会谨祝中国日益昌盛！

日本·千叶大学教授

柳原二郎

1999 年 5 月

4

国际系列丛书《模糊数学与工程新进展》
国际主编　阮达（Da Ruan）
国内主编　黄崇福（Huang Chongfu）

前 言

自 1965 年美国 California 大学 L. A. Zadeh 教授提出模糊集论以来，在世界各国模糊学者的共同努力下，模糊理论及其应用研究取得了长足的进步。

模糊数是特殊的模糊集，由于它的各种特性，引起模糊工作者的兴趣，并被用于理论研究及模糊控制、模糊信息分析等应用领域。但是，至今人们对模糊数性质、运算等的研究还是远非充分的。

我们知道，经过简单的坐标变换可以把实数轴上的有界闭区间变成区间 [0, 1]，因此研究 [0, 1] 上的模糊数（简称模糊值）是具有典型意义的，对它的较深入的研究必将进一步揭示模糊数的性质。当然，模糊值并不能简单地理解为特殊的模糊数，它们之间在代数、分析性质等方面存在着明显的差异；而且，由于模糊集隶属函数的语言值、模糊推理中的语言真值往往用模糊值表示，使得它在模糊逻辑、模糊推理中占有一定的地位。著者近年来，特别在日本进修期间，以模糊集理论为基础，以模糊集的截集为工具，对模糊值的性质、运算等作了一些探讨。本书就是以这些研究工作为基础撰写而成的。

全书共分十章。第 1 章简单介绍与模糊值有关的模糊集知识，如模糊集的运算、模糊关系及模糊推理（包括 Zadeh 的直接法与 Baldwin 的间接法）等。[①] 第 2 章介绍区间值（[0, 1] 上的闭区

① 见参考文献 [1] ～ [10].

间）的运算、区间值模糊集及区间值模糊推理。① 以上两章是全书的基础。第 3 章叙述模糊值的定义与基本性质。② 第 4 章叙述模糊值的运算与偏序关系。③ 由于这里的运算是基于模糊值的截集提出的，因此种类较广，操作较易。第 5 章叙述模糊值间的距离与模糊距离概念，给出衡量或比较模糊值之间差异的一种手段。④ 第 6 章则是在模糊值间距离基础上，讨论三类模糊值空间的一些拓朴性质，如完备性、连通性、列紧性及可分性。⑤ 第 7 章叙述模糊值模糊集的性质与运算，提出它的两类截集，并由此引入偏序关系。⑥ 第 8 章则是在模糊值与模糊值模糊集理论基础上，考虑模糊值模糊推理，探讨模糊命题的真值为模糊值时的模糊推理问题。⑦ 第 9 章与第 10 章则是模糊值在模糊推理中的两个应用。⑧ 前者将模糊值应用于模糊控制的适合度函数，扩大了它的适用范围；后者将模糊值应用于kóczy 模糊推理法，使这一方法得到改善。

在本书问世之际，我衷心地感谢北京邮电大学各级领导对我的研究工作的关心与支持，深深地感谢日本千叶大学柳原二郎教授（我在日进修时的指导教授）、吉田英信教授，帝京平成大学川濑　真教授，千叶工业大学铃木久吉教授及九段建筑研究所中岗荣三先生对我在日研究期间的多方帮助，并对“模糊数学与工程新进展”国际丛书专家委员会的Da Ruan 教授、井上　洋教授与黄崇福博士的推荐与鼓励及北京师范大学出版社的有关同志的支

① 见参考文献［11］、［12］.
② 见参考文献［6］，［13］，［14］.
③ 见参考文献［15］.
④ 见参考文献［16］，［21］，［23］.
⑤ 见参考文献［17］～［22］.
⑥ 见参考文献［22］，［24］.
⑦ 见参考文献［24］.
⑧ 见参考文献［25］～［29］.

持表示深切的谢意。

由于作者水平有限，书中疏漏和错误在所难免，谨望同仁与读者指正。

陈启浩

1999年5月识于北京

目　　录

常用记号 …………………………………………… (1)

第 1 章　模糊集 ………………………………… (3)

1.1　模糊集的定义 ……………………………… (3)

1.2　模糊集的运算 ……………………………… (6)

1.3　模糊集的截集（Ⅰ） ……………………… (11)

1.4　模糊关系 …………………………………… (16)

1.5　模糊推理 …………………………………… (20)

第 2 章　区间值 ………………………………… (31)

2.1　区间值的定义 ……………………………… (31)

2.2　区间值的运算 ……………………………… (32)

2.3　区间值的偏序关系 ………………………… (39)

2.4　区间值的 t-模及蕴含映射 ……………… (41)

2.5　区间值模糊集 ……………………………… (42)

2.6　区间值模糊推理 …………………………… (45)

第 3 章　模糊值及其基本性质 ………………… (57)

3.1　模糊集的截集（Ⅱ） ……………………… (57)

3.2　模糊值的定义 ……………………………… (58)

3.3　模糊值的基本性质 ………………………… (60)

第 4 章　模糊值的运算与偏序关系 …………… (75)

4.1 引理 …………………………………………………… (75)
4.2 模糊值的运算 ………………………………………… (77)
4.3 模糊值的偏序关系 …………………………………… (86)
4.4 模糊值族的上确界与下确界（Ⅰ） ………………… (87)
第5章 模糊值间的距离与模糊距离 ……………… (97)
5.1 模糊值间的距离 ……………………………………… (97)
5.2 模糊值间的模糊距离 ………………………………… (121)
5.3 模糊值运算的连续性 ………………………………… (129)
5.4 模糊值族的上确界与下确界（Ⅱ） ………………… (138)
第6章 模糊值距离空间的拓扑性质 ……………… (149)
6.1 （$\mathscr{M}$ [0, 1], d_1）的拓扑性质 ………………… (149)
6.2 （$\mathscr{M}$ [0, 1], d_2）的拓扑性质 ………………… (157)
6.3 （$\mathscr{M}$ [0, 1], d_3）的拓扑性质 ………………… (171)
第7章 模糊值模糊集 ……………………………… (175)
7.1 模糊值模糊集的定义 ………………………………… (175)
7.2 模糊值模糊集的运算 ………………………………… (177)
7.3 模糊值模糊集的两类截集 …………………………… (180)
7.4 模糊值模糊集的偏序关系 …………………………… (186)
第8章 模糊值模糊推理 …………………………… (191)
8.1 模糊值 t-模 ………………………………………… (191)
8.2 模糊值蕴含映射 ……………………………………… (196)
8.3 模糊值模糊推理概念 ………………………………… (198)
8.4 模糊值模糊推理方法一 ……………………………… (199)

8.5 模糊值模糊推理方法二 …………………………（201）
8.6 方法一与方法二之间的关系 ……………………（203）
第9章 模糊值与模糊控制中的适合度函数………（209）
9.1 适合度函数的定义 ………………………………（209）
9.2 适合度函数的性质 ………………………………（214）
9.3 常用的适合度函数的计算 ………………………（218）
第10章 模糊值与Kóczy模糊推理法 ……………（225）
10.1 Kóczy模糊推理法及其改进………………………（225）
10.2 Kóczy模糊推理法的结论为三角形模糊值的条件
……………………………………………………（231）
参考文献 ………………………………………………（238）
名词索引 ………………………………………………（241）

常 用 记 号

$\varnothing$	空集
$\in$	属于
$=$	等于
$\triangleq$	定义为
$\Rightarrow$	蕴含或推出
$\Leftrightarrow$	等价或充分必要
$\forall x$	每个 x
$\exists x$	存在 x
$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{R}$	实数集
Λ	指标集
$\cup$	并
$\cap$	交
^{c}	补
$\times$	叉积或笛卡儿积
$\vee$	逻辑和或取大
$\wedge$	逻辑积或取小
$\neg$	否定
$\dotplus$	代数和
$\oplus$	限界和
$\odot$	限界积
$\circ\ (*)$	复合

$\leqslant_1(\leqslant_2, \lessgtr_1, \lessgtr_2)$	偏序关系
$\sup(\sup_1, \sup_2)$	上确界
$\inf(\inf_1, \inf_2)$	下确界
$[A]_\alpha(A_\alpha, A_{\tilde{\alpha}})$	截集
$\tau_A(\tau_{A'A})$	语言真值
$\{\bar{a}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$	区间值列
$\{\bar{a}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$	区间值族
$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$	模糊值列
$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$	模糊值族
$\mathscr{I}[0,1]$	区间值全体
$\mathscr{M}[0,1](\mathscr{C}\mathscr{M}[0,1], \mathscr{M}^{\theta_1\theta_2}[0,1])$	模糊值全体($\mathscr{M}[0,1]$的子集)
$\mathscr{P}(X)$	X 上的子集全体
$\mathscr{F}_1(X)$	X 上的模糊集全体
$\mathscr{F}_2(X)$	X 上的 2 型模糊集全体
$\mathscr{F}_2^{(i)}(X)$	X 上的区间值模糊集全体
$\mathscr{F}_2^{(m)}(X)$	X 上的模糊值模糊集全体
$d(d_1, d_2, d_3)$	距离
h	Hausdorff 距离
$\tilde{d}(\tilde{d}_0)$	模糊距离
$T(T^{(i)}, T^{(m)})$	t-模
$I(I^{(i)}, I^{(m)})$	蕴含函数或蕴含映射

第 1 章　模　糊　集

模糊值是闭区间[0,1]上的特殊模糊集.因此,本章叙述与模糊值有关的模糊集的基本概念和理论,如模糊集的运算、模糊关系、模糊推理等,作为全书的基础.

1.1　模糊集的定义

“某班级身高 1.75 m 以上学生的全体”是集合论里曾讨论过的集合,其特征是,该班级的每个学生属于这个集合,或者不属于这个集合,两者必居其一,而且只居其一.记这个集合为 M,则它的特征函数 $C_M:X\to\{0,1\}$(这里 X 是该班级学生的全体)是由下式确定的函数:

$$C_M(x)=\begin{cases}1, & x\in M,\\ 0, & x\notin M.\end{cases}$$

显然,$C_M(x)$表示 X 的元素 x 属于集合 M 的程度,因此 M 可以用 $C_M(x)$表征.

现实生活中也常常考虑“某班级高个子学生的全体”这样的“集合”.显然,对于每个学生属于这个“集合”的程度不是只是 0 或 1,而可以取闭区间[0,1]上的任意值.类似于上述的集合 M,这个“集合”可以用函数

$$\mu:X\to[0,1]$$

表征.于是得模糊集的定义.

定义 1.1.1 设 X 是全集(或论域),则称函数

$$\mu: X \to [0,1]$$

为 X 上的一个模糊集,记为 A;称 μ 为 A 的隶属函数,$\mu(x)$ 表示 x $(x\in X)$"属于"A 的程度.

今后,用 $\mathscr{F}_1(X)$ 表示 X 上的模糊集的全体. □

显然,隶属函数值仅取 0 或 1 的 X 上的模糊集即为 X 的子集. 通常用 $\mathscr{P}(X)$ 表示 X 的子集的全体. 显然,

$$\mathscr{P}(X) \subset \mathscr{F}_1(X).$$

根据定义 1.1.1,μ 与由其表征的模糊集 A 可以不加区别,因此今后将 A 的隶属函数 μ 也记为 A.

例 1.1.1 设 $X=(0,\infty)$(单位:m),

$$A(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 1.70,\\ 10(x-1.70), & 1.70<x\leqslant 1.80,\\ 1, & x>1.80.\end{cases}$$

如果将 x 看作人的身高,那么 A 给出了"高个子"这个模糊集的一种表示. 根据这种表示,身高 1.75 m 的人"属于""高个子"的程度是 $A(1.75)=0.5$,身高 1.80 m 的人"属于""高个子"的程度是 $A(1.80)=1$. □

全集 X 及空集 $\varnothing$ 是 X 上的两个特殊模糊集,它们的隶属函数分别为

$$X(x)=1,\quad \varnothing(x)=0\quad (\forall\ x\in X).$$

一般,模糊集是用它的隶属函数表示的,但是以下两种表示法也是常用的.

(1) 当 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 或 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots\}$ 时,X 上的模糊集 A 表示为

$$A=\sum_i A(x_i)/x_i,$$

这里,Σ、/ 不具有求和、相除的意义,同时,在表达式中往往省略

$A(x_i)=0$ 的项 $A(x_i)/x_i$.

(2) 当 $X=I$(实数轴上的区间)时,X 上的模糊集 A 表示为

$$A=\int_I A(x)/x,$$

这里,$\int$ 不具有求积分的意义.

例 1.1.2 (1) 设 $X=\{x_1,\cdots,x_5\}$ 上的模糊集 A 的隶属函数为

$$A(x)=\begin{cases}0, & x=x_1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=x_2,\\ \dfrac{1}{3}, & x=x_3,\\ 0, & x=x_4,\\ \dfrac{1}{4}, & x=x_5,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}A &=0/x_1+\frac{1}{2}/x_2+\frac{1}{3}/x_3+0/x_4+\frac{1}{4}/x_5\\ &=\frac{1}{2}/x_2+\frac{1}{3}/x_3+\frac{1}{4}/x_5.\end{aligned}$$

(2) 设 $Y=[0,1]$上的模糊集 B 的隶属函数为

$$B(y)=y^2,$$

则

$$B=\int_{[0,1]} y^2/y.$$

□

1.2 模糊集的运算

首先，给出$\mathscr{F}_1(X)$上的包含、相等的定义.

定义 1.2.1 设$A,B\in\mathscr{F}_1(X)$.

(1) 如果$A(x)\leqslant B(x)(\forall\ x\in X)$，则称$A$包含于$B$，或者$B$包含$A$，记为$A\subseteq B$.

(2) 如果$A(x)=B(x)(\forall\ x\in X)$，则称$A$与$B$相等，记为$A=B$. □

显然，"$\subseteq$"具有自反性(即对任意$A\in\mathscr{F}_1(X)$，$A\subseteq A$)、反对称性(即对任意$A,B\in\mathscr{F}_1(X)$，当$A\subseteq B$且$B\subseteq A$时，$A=B$)及传递性(即对任意$A,B,C\in\mathscr{F}_1(X)$，当$A\subseteq B$且$B\subseteq C$时，$A\subseteq C$).因此$\subseteq$是$\mathscr{F}_1(X)$的偏序关系，$\langle\mathscr{F}_1(Z),\subseteq\rangle$是偏序集.

其次，给出$\mathscr{F}_1(X)$上的并、交、补运算的定义.

定义 1.2.2 设$A,B\in\mathscr{F}_1(X)$.

(1) 称如下那样定义的X上的模糊集$A\cup B$为A,B的并：

$$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)\quad(\forall\ x\in X).$$

(2) 称如下那样定义的X上的模糊集$A\cap B$为A,B的交：

$$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)\quad(\forall\ x\in X).$$

(3) 称如下那样定义的X上的模糊集A^c为A的补：

$$A^c(x)=1-A(x)\quad(\forall\ x\in X).$$ □

例 1.2.1 设$[0,1]$上的模糊集A,B的隶属函数分别为

$$A(x)=1-2\left|x-\frac{1}{2}\right|,\qquad B(x)=x.$$

求$A\cup B,A\cap B,A^c$.

解
$$\begin{aligned}(A\cup B)(x)&=A(x)\vee B(x)\\&=\left(1-2\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)\vee x\end{aligned}$$