高中同步类型题规范解题题典2001

海淀名师

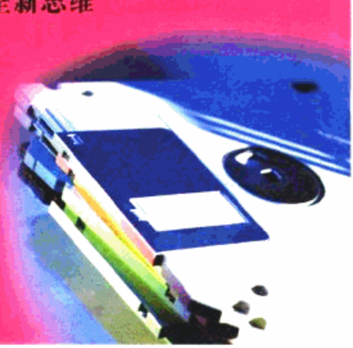
解题新思路

Haidianmingshi Jietixinsilu

苏静 主编

- 同步题解 实用过人
- 名题典范 一通百通
- 读题解题 全新思维

高三数学



中国和平出版社

高中同步类型题规范解题题典2001

海淀名师

解题新思路

苏静 主编

高三数学

中国和平出版社

高中同步类型题规范解题题典

海淀名师解题新思路

高三数学

主　编　苏　静

*

中国和平出版社出版发行

（北京市东城区和平里东街民旺甲19号　100013）

电话：84252781

北京泽明印刷有限责任公司印刷　新华书店经销

2001年6月第2版　2001年6月第3次印刷

开本：850×1168毫米　1/32　印张：20　字数：650千字

ISBN 7—80101—074—4/G·712　定价：19.80元

前　　言

编写目的

为了帮助广大中学生选择科学有效的思维方式和学习方法，走出学习的误区；教会中学生思考问题解决问题的方法，从而帮助中学生拓宽知识面，培养创新思维，从“学会”向“会学”转变，全面提高素质，以迎接新世纪的挑战。我们根据教育部最新颁布的教学大纲的要求，配合现行教材及培养学生解决问题的能力的需要，编写了这套《海淀名师解题新思路》丛书。

本书特点

本丛书与现行教材同步，全书从“题”的角度强化和训练学生对“知识点”的理解和掌握。从中揭示各知识点应用的范围和规律，并通过示范解题培养学生分析和解决问题的能力。

①不容置疑的权威性。本套丛书的编写者全是教学第一线的特高级教师，他们具有丰富的教学经验与最新最巧的解题思路。

②新颖实用。选题新颖、难易适度，循序渐进，梯度适当，便于各年级学生跟踪学习。

③重分析、重规范。通过分析和介绍“方法”揭示规律，通过“规范解”让学生清楚怎样解题才能得高分。

④题型全、新，容量大，各类题型分配比例合理，便于学生全面系统地掌握所学知识。

⑤重效减负。所使用的例题和习题皆是名题、典型题，针对性强，有助于学生排除题海困扰达到减轻负担、事半功倍的效果。

丛书栏目

本丛书根据学科不同，设计了不同的题型。所设栏目包括【解析】【解题思路】【规范解】【答案】【得分点精析】【解题关键】【错解剖析】，体现了本丛书的实用性和示范性。

真诚愿望

本丛书内容充实实用，若读者能从中得到一点启示，快速提高学习成绩，这是我们的最大心愿。此外，由于编写时间仓促，水平有限，难免出现不足之处，恳请读者给予指正，使之日臻完善。

目　　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

§1.1　集合

考试要求

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念.了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合.

基础知识

1. 集合的一般概念

(1)集合的定义:具有某种特定属性的对象的全体叫集合,集合中的对象叫集合的元素.

(2)集合元素的三个特征:

①确定性,构成一个集合的元素必须是具体的,明确的.

②互异性,集合中的元素应是彼此不同的.

③无序性,用列举法表示时与元素的顺序无关.

(3)集合的表示方法

①列举法,适用少量元素

②描述法,$\{x|x$ 具有性质 $P\}$

例如:下列集合分别是:

$A=\{x|x^2-1=0\}=\{-1,1\}$

$B=\{x|x^2-1>0\}=\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$

$C=\{x|y=\sqrt{x^2-1}\}=\{x|x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1\}$(相当于求函数的定义域)

$D=\{y|y=\sqrt{x^2-1}\}=\{y|y\geqslant0\}$(相当于函数的值域)

$E=\{(x,y)|y=x^2-1\}=\{(x,y)|(x,y)$是函数 $y=x^2-1$ 的图象上的所有点$\}$

以上集合揭示的实质是分清集合中的元素是什么.

③图示法:文氏图法

④区间法:$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}=[1,2]$.

2. 子集,真子集,交集,并集,补集,空集,全集

①子集:对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)

性质:ⅰ)$A\subseteq A$　ⅱ)$\varnothing\subseteq A$　ⅲ)若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$

②真子集:如果 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 叫作集合 B 的真子集.记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$)

性质:ⅰ)若 $A\subset B$,$B\subseteq C$,则 $A\subset C$　ⅱ)若 $A\neq\varnothing$,则$\varnothing\subset A$

③空集:不含任何元素的集合叫空集,记作$\varnothing$

性质:ⅰ)$\varnothing\subseteq\varnothing$　但　$\varnothing\not\subset\varnothing$

ⅱ)$\varnothing$是任何非空集合的子集和真子集.

④全集:用 I 表示,具有相对性.

⑤交集:$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$,即集合 A 与集合 B 的公共部分.

性质:ⅰ)$A\cap A=A$　ⅱ)$A\cap\varnothing=\varnothing$

ⅲ)$A\cap B=B\cap A$　ⅳ)$A\cap B=A$,则 $A\subseteq B$

⑥并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$,即属于 A 和 B 中的所有元素组成的集合.

※相同元素只写一个.

性质:ⅰ)$A\cup A=A$　ⅱ)$A\cup\varnothing=A$

ⅲ)$A\cup B=B\cup A$　ⅳ)$A\cup B=A$,则 $B\subseteq A$

⑦补集:$\overline{A}=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$(I 是全集,$A\subseteq I$)

即在全集中不属于子集 A 的元素所组成的集合.

性质:ⅰ)$\overline{\overline{A}}=A$　ⅱ)$\overline{A}\cup A=I$　ⅲ)$\overline{A}\cap A=\varnothing$

ⅳ)$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

3. 集合中的三种关系:

①从属关系:“指元素和集合的关系”,用“$\in$ $\notin$”.

②包含关系:“指集合对集合的关系”,用“$\subseteq\subset\supseteq\supset$”.

③相等关系:$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$.

4. 注意

①n 个元素的集合的子集的个数是 2^n 个，

真子集的个数 2^n-1 个，非空子集的个数 2^n-1 个，非空真子集的个数 2^n-2 个.

②a，$\{a\}$，$\varnothing$，$\{\varnothing\}$，$\{1,2\}$，$\{(1,2)\}$，$\{(1,1)\}$的区别

③如图 1－1 所示

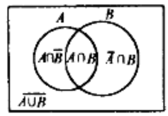


图 1－1

④N、Z、Q、R、C、R^+、$\overline{R^+}$、R^-

⑤$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

习题精选 A 组

一、选择题

1. 集合 $M=\{x\mid x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4},K\in Z\}$，$N=\{x\mid x=\frac{1}{4}k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$，则 (　　)

A. $M=N$　　B. $M\supset N$　　C. $M\subset N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

精析：M 中的元素 $x=\frac{2k+1}{4}\pi$，N 中的元素 $x=\frac{k+2}{4}\pi$，而 $2k+1$ 可取任意的奇数，$k+2$ 可取任意的整数，所以 $M\subset N$，这是用直接法解选择题.

答案：C

2. 集合 $A=\{x\mid x\neq 1,x\in R\}\cup\{y\mid y\neq 2,y\in R\}$

集合 $B=\{x\mid x<1$ 或 $1<x<2$ 或 $x>2\}$，则 A 与 B 之间的关系是 (　　)

A. $A=B$　　B. $A\subset B$　　C. $B\subset A$　　D. 无法确定

精析：因为集合 $A=R$，集合 $B=\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2\}$

答案：C

3. 已知全集为 I，M、N 是 I 的两个非空子集，若$\overline{M}\supseteq N$，则必有 (　　)

A. $M\subseteq\overline{N}$　　B. $M\cap N\neq\varnothing$

C. $\overline{M}=\overline{N}$　　D. $M=N$

精析：如图 1－2 用文氏图做，M 是大圆外的元素，$\overline{N}$是小圆外的元素.

答案：A

4. 若集合 $A=\{x\mid x=m+\frac{1}{6},m\in Z\}$

$B=\{x\mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in Z\}$

$C=\{x\mid x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in Z\}$,则 A、B、C 关系为 ( )

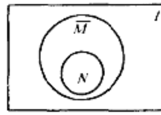


图 1-2

A. $A=B\subset C$　　B. $A\subset B=C$　　C. $A\subset B\subset C$　　D. $B\subset C\subset A$

精析:A 中的元素为 $x=\frac{1}{6}(3\cdot 2m+1)$,$B$ 中的元素 $x=\frac{1}{6}[3\cdot(n-1)+1]$,$C$ 中的元素 $x=\frac{1}{6}(3\cdot p+1)$,而 $2m$ 是任意偶数,$n-1$ 与 p 都是任意整数.

答案:B

5. 设 M、P 是两个非空集合,定义 M 与 P 的差集为 $M-P=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin P\}$,则 $M-(M-P)$等于 ( )

A. P　　B. $M\cap P$　　C. $M\cup P$　　D. M

精析:这是一道新定义的集合运算问题,关键是把 $M-P$ 用我们熟悉的交、并、补运算来表示.根据定义:"$x\in$ M 且 $x\notin P$"等价于"$x\in M\cap\overline{P}$".为此,可设全集为 I,则 $M-P=M\cap\overline{P}$,于是有:

$M-(M-P)=M-(M\cap\overline{P})=M\cap(\overline{M\cap\overline{P}})=M\cap(\overline{M}\cup P)=M\cap P$

答案:B.

说明:这是一道信息迁移题,属于应用性问题."$M-P$"是考生在中学不曾学过的一种运算,主要考查阅读理解能力和抽象字母的运算能力.

此题利用韦恩图,解法会更简单.

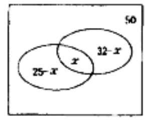
6. 某中学高一甲班有学生 50 人,参加数学小组的有 25 人,参加物理小组的有 32 人,求既参加数学小组,又参加物理小组的人数的最大值与最小值分别为: ( )

A. 25,0　　B. 25,7　　C. 21,7　　D. 0,50

精析:如图 1-3 所示,画出文氏图,列出不等式,可得最大、最小值.

设既参加数学小组,又参加物理小组的有 x 人,如图 1-3 所示.仅参加数学小组的有$(25-x)$人,仅参加物理小组的有$(32-x)$人.因此,至少参加一个组的有 $25-x+x+32-x=57-x$ 人,故

$$\begin{cases}25-x\geqslant 0\\32-x\geqslant 0\Leftrightarrow 7\leqslant x\leqslant 25.\\57-x\leqslant 50\end{cases}$$



∴两个组都参加的人数最大值为 25，最小值为 7.

图 1-3

答案：B

7. 从自然数 1～20 中任取两个数相加的和组成的数列共有多少个子集 (　　)

A. 2^{20}　　B. 2^{37}　　C. 2^{40}　　D. 2^{38}

精析：共有 37 个数：3,4,5……,39. 故选 C.

二、填空题

1. 满足条件 $\{1,2\}\subset A\subseteq\{1,2,3,4,5,6\}$ 的集合 A 的个数为________

精析：此题相当于求集合 $\{3,4,5,6\}$ 的非空子集，共有 $2^4-1=15$ 个

答案：15

2. 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，则 $\overline{M}\cup\overline{N}=$________

精析：$M=\{(x,y)\mid y=x+1,x\neq 2\}$

$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1,x\in\mathbf{R}\}$

$\therefore \overline{M}\cup\overline{N}=\{(x,y)\mid x=2,y=3\}=\{(2,3)\}$

答案：$\{(2,3)\}$

3. 设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$\overline{A}\cap B=\{3,7\}$

$A\cap\overline{B}=\{2,8\}$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

则 $A=$________，$B=$________，$\overline{A}\cap\overline{B}=$________.

精析：如图 1-4 所示，画出文氏图，故

$A=\{2,8,1\}$　$B=\{1,3,7\}$　$\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,5,6\}$

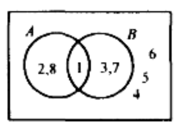


图 1-4

答案：$\{2,8,1\}$，$\{1,3,7\}$，$\{4,5,6\}$

4. 若 $I=\mathbf{R}$，$M=\{x\mid(x+2)(3-x)>0\}$，$N=\{x\mid \frac{x-1}{x+1}>2\}$，则 $\overline{M}\cap N=$________.

精析：$M=(-2,3)$　　$N=(-3,-1)$

$\therefore \overline{M}\cap N=(-3,-2]$

答案:$(-3,-2]$

三、解答题

1. 已知:集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$,$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$,$a_i\in$ Z,($i=1,2,3,4,5$).设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ 且 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$,$a_1+a_4=10$,又 $A\cup B$ 元素之和为 224.

求:(1)a_1,a_4;(2)$a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2$;(3)$a_5$;(4)$A$

解:(1)$\because$ $A\cap B=\{a_1,a_4\}$ 且 $a_1+a_4=10$,

则两个完全平方数之和为 10,这两个数为 1、9.

又 $a_1<a_4$,$\therefore a_1=1$,$a_4=9$

(2)$\because$ $A\cup B$ 元素和为 224,即 $a_2+a_3+a_5+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=224$.

而 $a_2^1+a_4^2=82$ 代入上式,得:$a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2=142$.

(3)$\because a_4<a_5$,$\therefore a_5>9$

设 $a_5=11$,则 $a_2+a_3+a_2^2+a_3^2=10$,这是不可能的.$\therefore a_5=10$.

(4)综上所求,$A=\{1,3,4,9,10\}$

精析:这道题很精彩,对深入理解集合中元素的互异性、确定性,熟练集合的交、并运算,培养逻辑推理能力,很有帮助.

2. 设 $A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$,$B=\{x\mid x^2+4x+p<0\}$,若 $B\subseteq A$,求实数 p 的取值范围.

精析:由已知 $B\subseteq A$,可化为两种情况:$B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$.

解:先将 A 化简得 $A=\{x\mid x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)\}$.

(1)若 $B=\varnothing$,显然 $B\subseteq A$,此时,$4^2-4p\leqslant 0$,由此得 $p\geqslant 4$.

(2)若 $B\neq\varnothing$,则 $4^2-4p>0$,由此得 $p<4$,

$$B=\{x\mid x\in -2-\sqrt{4-p}<-2+\sqrt{4-p}\}.$$

$\because$ $B\subseteq A$,

$\therefore -2+\sqrt{4-p}\leqslant -1$ 或 $-2-\sqrt{4-p}\geqslant 2$.

解得 $3\leqslant p<4$.

综合(1)(2)得 $p\geqslant 3$.

说明:本题中,常常忽略 $B=\varnothing$ 这种情况.若结合数轴则不易出差错,并注意"等号"的取舍.

"数形结合"的思想,贯穿函数的始终,要养成见"数"想"形",见"形"想"数"的习惯.

3. 集合 $A=\{(x,y)\mid y=ax+1\}$ $B=\{(x,y)\mid y=|x|\}$，且 $A\cap B$ 是单元素集合，求 a 的取值范围.

精析：如图 1－5 所示，$A\cap B$ 是单元素集合，可考虑方程组 $\begin{cases} y=ax+1 \\ y=|x| \end{cases}$ 只有一个解，即 $|x|=ax+1$ 有且只有一个解，易知 $a=\pm1$，本题也可考虑数形结合，易得直线 $y=ax+1$ 的斜率 $a=\pm1$ 时 A、B 在直角坐标系的图形只有一个交点.

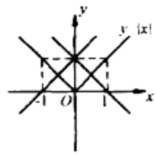


图 1－5

习题精选 B组

一、选择题：

1. 已知集合 $M=\{1,2,a^3-a\}$，$N=\{0,a+1,3-a^2\}$，且 $M\cap N=\{0,1\}$，则实数 a 的解集是 ( )

A. $\{0\}$ B. $\{0,1\}$ C. $\{1\}$ D. $\varnothing$

精析：$\because M\cap N=\{0,1\}$，即 $a^3-a=0$，$\therefore a=0$ 或 $a=\pm1$，分别代入 N 中知 $a=\pm1$ 不合题意，$\therefore a=0$.

答案：A

2. 集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=1\}$，对 M 中的任何一个元素 (x,y)，在法则 f 的作用下与 $(2^x,2^y)$ 对应，则在 f 作用下，M 中元素象的集合是 ( )

A. $\{(x,y)\mid x+y=2,x>0,y>0\}$ B. $\{(x,y)\mid xy=1,x>0,y>0\}$

C. $\{(x,y)\mid xy=2,x<0,y<0\}$ D. $\{(x,y)\mid xy=2,x>0,y>0\}$

精析：设 M 中的元素 (x,y) 在 f 作用下的象是 (a,b)，则 $a=2^x$，$b=2^y$，所以 $a\cdot b=2^x\cdot2^y=2^{x+y}=2$，又 $a=2^x>0$，$b=2^y>0$，因此 M 中任何一个元素 (x,y) 的象的集合是 $\{(a,b)\mid ab=2,a>0,b>0\}$，即 $\{(x,y)\mid xy=2,x>0,y>0\}$.

答案：D

3. 设两个集合 $M=\{x\mid x=4k,k\in Z\}$，$p=\{x\mid x=12m+8n,m、n\in Z\}$，那么下列关系中正确的是 ( )

A. $M\subset P$ B. $M\supset P$ C. $M=P$ D. $M\cap P=\varnothing$

精析：设 $x_1\in P$，且 $x_1=12m_1+8n_1$，$m_1n_1\in Z$，则 $x_1=4(3m_1+2n_1)$ $\because 3m_1+2n_1\in Z$ $\therefore x_1\in M$. $\therefore P\subseteq M$，又设 $x_2\in M$ 且 $x_2=4k_1$，$k_1\in Z$. 当 $k_1=2n(n\in Z)$ $x_2=4\times(2n)=8n+12\times0$ $\therefore x_2\in P$. 当 $k_1=2n+1$

$(n\in Z)$ $x_2=4(2n+1)=8n+4=8(n-1)+12\times 0$, $\because n-1\in Z$ $\therefore x_2\in P$

$\therefore M\subseteq P$ 故 $M=P$

答案:C

4. 同时满足(1)$m\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,(2)若 $a\in m$ 则 $6-a\in m$ 的非空集合 m 有 ( )

A.16 个　　B.15 个　　C.7 个　　D.6 个

精析:由于 $a\in m$,则 $6-a\in m$ 知,1 和 5,2 和 4 必同时属于 m,故将 5 个数分三部分(1,5),(2,4),(3),$C_3^1+C_3^2+C_3^3=2^3-1=7$

答案:C

5. 设集合 $M=\{x|x=3m+1,m\in Z\}$ $N=\{y|y=3n+2,n\in Z\}$,若 $x_0\in M$,$y_0\in N$,则 x_0y_0 与集合 M、N 的关系是 ( )

A. $x_0y_0\in M$　　B. $x_0y_0\in N$　　C. $x_0y_0\notin M$　　D. $x_0y_0\notin N$

精析:设 $x_0=3m_0+1,m_0\in Z,y_0=3n_0+2,n_0\in Z$

$x_0y_0=(3m_0+1)(3n_0+2)=9m_0n_0+3n_0+6m_0+2=3(3m_0n_0+n_0+2m_0)+2$

$\because 3m_0n_0+n_0+2m_0\in Z$, $\therefore x_0y_0\in N$

答案:B

6. 集合 P 中有 8 个元素,集合 Q 中也有 8 个元素,全集 I 有 18 个元素,$P\cap Q\neq\varnothing$,$\overline{P\cup Q}$有 x 个元素,那么 x 的取值范围为 ( )

A. $2\leqslant x\leqslant 10(x\in N)$　　B. $3\leqslant x\leqslant 10(x\in N)$

C. $10\leqslant x\leqslant 12(x\in N)$　　D. $10\leqslant x\leqslant 16(x\in N)$

精析:设 $P\cap Q$ 的元素个数为 y,则 $1\leqslant y\leqslant 8,y\in N$,当 $y=1$ 时,$P\cup Q$ 元素个数为 $8+8-1=15$,故 $x=18-15=3$,当 $y=8$ 时,$P\cup Q$ 元素为 8 个,$\therefore x=18-8=10$ 个,$\therefore 3\leqslant x\leqslant 10$.

答案:B

二、填空题

1. 设 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$,$B=\{x|x>a\}$,$A\cap B=\varnothing$,则 $a\in$ ______.

精析:$A=\{x|-2<x<3\}$,要 $A\cap B=\varnothing$,必须 $a\geqslant 3$.

答案:$\{a|a\geqslant 3\}$

2. 如图 1-6 所示,I 是全集,A、B 是两个子集,阴影部分表示的集合是 ______.

精析：A、B 两个集合外部为$\overline{A\cup B}$，A、B 的公共部分为 $A\cap B$.

图 1－6

答案：$(A\cap B)\cup(\overline{A\cup B})$

3. $x,y\in\mathbf{R}$，$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,y)\mid \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1,a>0,b>0\}$，当 $A\cap B$ 只有一个元素时，a,b 的关系式是______.

精析：由 $A\cap B$ 只有一个交点知，圆 $x^2+y^2=1$ 与直线$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ 相切，则 $1=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，即 $ab=\sqrt{a^2+b^2}$

答案：$ab=\sqrt{a^2+b^2}$

4. 已知集合 $A=\{x,xy,\lg xy\}$，集合 $B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，则 $x=$ ________，$y=$ ________.

精析：$\because x\neq 0,y\neq 0$，$\therefore \lg xy=0$，$xy=1$. 若 $xy=y$，则有 $y=1$，$x=1$，A 中有相同元素 $x=xy=1$，不符合要求，因此 $xy=|x|$，即 $|x|=1$，$x=-1$，$y=-1$.

答案：-1，-1

5. 设含有 10 个元素的集合的全部子集为 S，其中由 3 个元素组成的子集为 T，$n(S)$，$n(T)$分别表示 S、T 中元素的个数，那么$\frac{n(T)}{n(S)}=$ ________.

精析：$n(S)=C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3+C_{10}^4+C_{10}^5+C_{10}^6+C_{10}^7+C_{10}^8+C_{10}^9+C_{10}^{10}=2^{10}$，而 $n(T)=C_{10}^3=120$，$\frac{n(T)}{n(S)}=\frac{120}{1024}=\frac{15}{128}$.

答案：$\frac{15}{128}$

6. 有 a、b、c 三本新书，至少读过其中一本的有 18 人，读过 a 的 9 人，b 的 8 人，c 的 11 人，同时读过 a、b 的 5 人，读过 b、c 的 3 人，读过 c、a 的 4 人，那么 a、b、c 全部读过的有________人.

精析：设 $A=\{$读过 a 的人$\}$，$B=\{$读过 b 的人$\}$，$C=\{$读过 c 的人$\}$，$A\cap B=\{$同时读过 a、b 的人$\}$，$B\cap C=\{$同时读过 b、c 的人$\}$，$A\cap C=\{$同时读过 a、c 的人$\}$，$A\cap B\cap C=\{$同时读过 a、b、c 的人$\}$，$A\cup B\cup C=\{a$、b、c 中至少读过一本书的人$\}$，由韦恩图可知 $n\{A\cup B\cup C\}=n(A)+n(B)+n$

$(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

$n(A\cap B\cap C)=18-(9+8+11)+(5+3+4)=2.$

答案:2

三、解答题

1. $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x\mid 2x^2-ax+2=0\}$, $A\cup B=A$,求 a 的取值构成的集合.

精析:$\because A\cup B=A$ $\therefore B\subseteq A$,当 $B=\varnothing$ 时 $a^2-8<0$, $\therefore -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$, $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$ 当 $1\in B$ 时,将 $x=1$ 代入 B 中方程得 $a=4$,此时 $B=\{1\}$,当 $2\in B$ 时,将 $x=2$ 代入 B 中方程得 $a=5$,此时 $B=\{\frac{1}{2},2\}\not\subseteq A$ $a=5$ 舍去, $\therefore a=4$ 或 $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$.

2. 设方程 $x^2-ax+b=0$ 的两根为 α、β,方程 $x^2-bx+c=0$ 的两根为 v、δ,又 α、β、v、δ 互不相等,设 $M=\{\alpha,\beta,v,\delta\}$, $S=\{x\mid x=u+v,u\in M,v\in M$ 且 $u\neq v\}$, $P=\{x\mid x=uv,u\in M,v\in M$ 且 $u\neq v\}$,又 $S=\{5,7,8,9,10,12\}$, $P=\{6,10,14,15,21,35\}$,求 a、b、c 的值.

精析:$S=\{\alpha+\beta,\alpha+v,\alpha+\delta,\beta+v,\beta+\delta,v+\delta\}$, $P=\{\alpha\beta,\alpha v,\alpha\delta,\beta v,\beta\delta,v\delta\}$, $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$, $v+\delta=b$, $v\delta=c$.

$\therefore 3(\alpha+\beta+\delta+v)=3(a+b)=5+7+8+9+10+12=51$ $\therefore a+b=17$,又 $\because(\alpha\beta v\delta)^3=(bc)^3=6\times10\times14\times15\times21\times35=210^3$, $bc=210$, $S\cap P=\{10\}$,又 $\because b$ 是 S、P 的公共元素, $\therefore b=10$, $a=7$, $c=21$.

3. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+px+q=0\}$, $B=\{x\mid qx^2+px+1=0\}$,同时满足①$A\cap B\neq\varnothing$,②$A\cap\overline{B}=\{-2\}$, $(p,q\neq0)$,求 p、q 的值.

精析:设 $x_0\in A$,则有 $x_0^2+px_0+q=0$,两端同除去 x_0^2,得 $1+p\frac{1}{x_0}+q\cdot\frac{1}{x_0^2}=0$,则知 $\frac{1}{x_0}\in B$, $\therefore$ 集合 A, B 中元素互为倒数.由 $A\cap B\neq\varnothing$,一定有 $x_0\in A$,使得 $\frac{1}{x_0}\in B$ 且 $x_0=\frac{1}{x_0}$ $\therefore x_0=\pm1$

又 $A\cap\overline{B}=\{-2\}$, $\therefore -2\in A$, $\therefore A=\{1,-2\}$ 或 $\{-1,-2\}$

由此得 $B=\{1,-\frac{1}{2}\}$ 或 $B=\{-1,-\frac{1}{2}\}$.

根据韦达定理:$\begin{cases}1+(-2)=-p\\1\times(-2)=q\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1+(-2)=-p\\(-1)\times(-2)=q\end{cases}$

得$\begin{cases}p=1\\q=-2\end{cases}$ 或$\begin{cases}p=3\\q=2\end{cases}$

§1.2 映射与函数

考试要求

1. 了解映射的概念,能根据定义判断所给对应是否是映射,会求映射中所指定的象或原象.

2. 理解函数的概念,掌握函数的三种表示方法.

基础知识

1. 映射的概念

一般地,设 A,B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f:A\to B$.

2. 象及原象的概念

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射,那么,和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象,a 叫 b 的原象.

3. 函数的概念

(1)对应定义:如果在某变化过程中有两个变量 x,y,并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值,按照某个对应法则,y 都有唯一确定的值和它对应,那么 y 就是 x 的函数,x 叫作自变量,x 的取值范围叫做函数的定义域,和 x 的值对应的 y 的值叫做函数值,函数值的集合叫做函数值域.

①函数的三要素是定义域、值域和对应法则,其中对应法则是核心,当定义域和对应法则确定时,函数也唯一确定了.

②若函数在定义域的不同子集上对应法则不同,可用几个式子来表示函数,这种形式的函数叫分段函数.

③若 y 是 u 的函数,u 又是 x 的函数,即 $y=f(u)$,$u=g(x)$,$x\in D$,$u\in M$,那么 y 关于 x 的函数 $y=f[g(x)]$,$x\in D$ 叫做 f 和 g 的复合函数,u 叫做中间变量,u 的取值范围是函数 $g(x)$ 的值域.