高等学校教学参考书

高等数学讲义

上 册

樊映川等编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

高等数学讲义

上册

樊映川等编

人民教育出版社

本书是第二版．其第一版是根据高等教育部1954年颁布的高等工业学校高等数学教学大纲而编写的．本版则参照 1962 年高等工业学校高等数学课程编审委员会审订的现行《高等数学（基础部分）教学大纲(试行草案)》作了修订．

全书分上、下两册．上册包括解析几何，函数与极限，一元函数的微分学和积分学．

先后参加本书编写与修订工作的，有樊映川、张国隆、陆振邦、侯希忠、方淑姝、王福楹、王福保、王嘉善、陈雄南等。

简装本说明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少，本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少 20%。希鉴谅。

高等数学讲义
上 册

樊映川等编

人民教育出版社（北京沙滩后街）
上海商务印刷厂印装
新华书店上海发行所发行
各地新华书店经售

统一书号 13012·067 开本 787×1092 1/32 印张 13 8/16
字数 347,000 印数 1,350,001—1,850,000 定价(5) ¥ 1.04
1958 年 3 月第 1 版 1964 年 7 月第 2 版
1978 年 7 月上海第 32 次印刷

第二版序言

本书原是根据1954年高等教育部頒发的高等工业学校高等数学教学大綱編写的，在内容的深广度以及章节次序方面，与1962年高等工业学校高等数学課程教材編审委員会审訂的現行«高等数学(基础部分)教学大綱(試行草案)»不完全相符，为了教学上的方便，在这次出版前作了部分的修訂：

(1) 在教材内容的深广度以及章节次序方面，力求做到基本符合現行教学大綱；凡超出大綱要求的内容，概用小字排印.

(2) 根据兄弟院校与我們自己几年来在教学实踐中的經驗，发現原书的某些缺点和某些使学生理解起来比較困难的地方，这次尽可能加以修改或重写。

(3) 在这一版本中，平面曲綫的参数方程单独成为一章；中值定理及导数的应用修改較多，并分成两章；曲綫积分及曲面积分，微分方程两章几乎全部重写，并把微分方程移到最后一章。

編者

一九六四年四月

上册目次

第二篇 数学分析

绪　　论

在高等工业学校各专业的教学计划中，高等数学（包括解析几何、微积分与微分方程）是一门基础理论课，它的目的是为学习物理、力学以及专业课程打好数学基础．在开始学习高等数学的时候，首先对数学研究的对象及其特点，它与生产实践的关系，它对自然科学、工程技术的作用等问题，有一个初步的了解是必要的．这不仅能帮助我们对数学有一个正确的认识，而且也有助于今后的学习．下面我们就来谈谈这些问题．

一　数学研究的对象及其特点

数学研究的对象是什么？我们先来看一看过去学过的算术、代数、几何、三角等所谓初等数学：算术与代数研究的是数量关系；几何研究的是几何图形或者说是空间形式；三角则既研究数量关系，也研究空间形式．事实上，不仅初等数学是以空间形式与数量关系为研究对象，任何数学分科，包括我们即将学习的高等数学，也仍然是以这二者为对象．所以说，数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学．

数学研究的对象决定了它的两个基本特点：高度的抽象性和应用的广泛性．数学的抽象性表现在它暂时抛弃事物的具体内容，而单纯从量的关系来考察．例如，二头牛和三头牛放在一起，共合五头牛；二把锄头和三把锄头放在一起，共合五把锄头等等．我们把“牛”、“锄头”等等事物的具体内容撇开，单纯从量的关系上考察，就得出一种抽象的数量关系：$2+3=5$．现实世界中许多更为复杂的数量关系，就表现为更抽象的形式．但这种抽象形式，只是表面上掩盖了它的实际来源，其内容却是非常现实的．我们千万不要被这种表面的抽象形式所迷惑而

否认它的现实意义．任何科学都有很多的应用，但数学的应用却特别广泛．数学上的某一个数量关系，往往不仅适用于某一个具体问题，而是适用于很多的具体问题．例如，上面所说的数量关系：$2+3=5$，就不仅适用于二头牛和三头牛；二把锄头和三把锄头；也适用于二辆车子和三辆车子；二亩地和三亩地；等等．又如函数关系 $y=ax^2$，它可以描述圆的面积 y 与半径 x 的关系（当 $a=\pi$ 时）；也可以描述自由落体落下的距离 y 与时间 x 的关系 $\left(当\ a=\dfrac{1}{2}g\ 时\right)$ 等等．各种不同性质的问题所以会具有相同的数学形式，即相同的数量关系，那是因为量的关系不只是存在于某一种特定的物质形态或其特定的运动形式中，而是普遍地存在于各种物质形态和各种运动形式中．数学，正是因为它是从现实世界中抽象出来的，正确地反映了客观世界联系形式的一部分，所以它才能被应用，才能指导实践．

二　数学和生产实践的关系

数学的发展归根到底依赖于人类生产实践．正如恩格斯所说："**和其他一切科学一样，数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的．**"例如，自从人类需要比较事物的多少，计算劳动果实，随之而来的就产生了数的概念和简单的量的关系；由于量地的需要，就产生了几何学；由于力学的需要，在十七世纪就诞生了微积分学等等．由此可见：生产实践是数学知识的泉源．生产的发展给数学提供日益丰富的研究材料，开辟日益广阔的研究领域，促进了数学新理论新方法的建立．那种认为数学的发展纯粹是个别天才数学家的自由创造，而和生产实践无关的观点是毫无根据的．微积分学产生的例子可以更好地说明这一点．尽管在古代，在计算曲线所围绕的面积时已有了类似现在的积分概念，但微积分学不能诞生在古代，而还是诞生在十七世纪．这是因为古代各国生产力很低，还

没有具备为研究运动状态所必需的数学——微积分学的诞生的条件. 那时即使有个别数学家有一点想法, 也不能超越历史条件的限制. 到了十五世纪以后的欧洲,资本主义逐渐发展,由于航海、采矿、修筑运河等的需要,必须研究各种力学,这一切都需要崭新的数学工具来表达运动规律, 从而微积分学的诞生就成为必需的了. 也有人说: 古代数学的诞生虽然是起源于人类生产实践,但现代数学则不然. 这种"现代数学例外论"也是没有根据的. 事实上, 尽管自从十九世纪以来, 数学日益取得更加抽象的形式, 但生产实践始终是数学发展的基本推动力量. 现代数学中许多发展得最迅速、影响最大的新学科如微分方程论、概率论和数理统计、计算数学、规划论和信息论等都是由生产实践的需要所引起的.

生产实践不仅直接推动数学的发展, 而且也通过推动自然科学的发展而间接地推动数学的发展. 例如微积分学就是由于力学的需要而产生的. 反过来,数学的发展又促进了自然科学的前进,促进社会生产的发展.

生产实践的需要不仅促使数学理论的发展;同时,数学理论反映客观现实的真实性, 也要受实践的考验. 所以说: 实践是科学真实性的准绳. 列宁教导我们:"**生活、实践的观点,应该是认识论的首先的和基本的观点.**"

最后, 顺便指出一下: 我们说数学的发展归根到底依赖于生产实践, 这并不是说数学发展的每一步骤都是由于生产实践的推动. 在历史发展的一定阶段,数学知识已经有了丰富的积累,于是在大量材料的基础上,有了概括建立新理论的必要和可能;同时在积累的大量知识的基础上,在理论概括的过程中,产生了一些理论本身的矛盾. 这些也引起数学新理论的建立. 例如复数就不是象我们说过的整数那样从现实世界中提取出来的, 而是由于推广代数方程解的概念而创造的一种新的概念,后来由这种概念发展成解析函数理论, 成为研究流体力学、弹

性力学的有力工具．儒科夫斯基关于飞机的机翼的理论，就是利用这种理论得出的．又如罗巴切夫斯基几何学或称非欧几何学是从几何学体系的内部产生的，即从欧氏几何平行公设是否可以从其他公理公设推出来这样一个纯理论的问题建立起来的．后来也终于成为说明很多自然现象的数学工具．

由此可见，当谈到数学发展归根到底依赖于人类生产实践时，如果以为数学发展的每一步骤都是在生产实践提出了要求之后才是可能的，那就未免把人类认识的发展过程过于简单化了．但如果因而否认数学的发展依赖于生产实践，那就陷入错误的唯心主义观点．当我们把认识的一个特定阶段孤立地加以考察时，似乎是从理论到理论，或先有理论而后把它用到实际中去；但从认识发展的总过程来看，却总是按照实践——理论——实践的这个马克思主义的认识论公式前进的．

三 高等数学的对象、方法和它对自然科学的作用

一直到十七世纪以前，人类关于数学的知识基本上停留在所谓初等数学的阶段；那时人们只考虑了现实世界中最简单的量的关系，而且主要只考虑了常量与固定的图形．这是因为当时人们对于客观世界的认识还是不深刻的，还不善于从世界的变化中观察它，为了把握某种事物，只能暂时把它看成不变的．

随着生产力的发展，自然科学也跟着一道发展．到十六世纪，由于航海、采矿、修筑运河等生产实践的需要，使得力学的各个分支发展起来，对于运动的研究成了当时自然科学的中心问题．对运动的研究，对各种变化过程和各种变化着的量之间的依赖关系的研究，引起了许多新的数学上的问题．这些问题和已往的数学问题有着原则性的区别．要解决它们，初等数学已不够用了，需要创立全新的概念和方法．这就促使数学在这些年代里有了一个飞跃的发展——从初等数学到高等数学．

标志着数学飞跃发展的是十七世纪初法国数学家笛卡儿把变量引进了数学，并创立了坐标概念. 于是在数学中不再限制于考虑常量和固定的图形，进而考虑变的量和图形. 数学对象的这种重大扩展就决定了变量数学即高等数学的新时代. 随后，微积分法也就在那时产生，而总的说来它们是由牛顿和莱布尼兹初步总结起来的.

初等数学与高等数学的基本区别不仅是在研究的对象——前者主要是常量与固定的图形，而后者是变量和图形的变化，而且还在方法上也有根本性的区别. 初等数学的方法一般说来是静止的、孤立的，而高等数学则是动的、联系的，因而也是辩证的. 世界本来是在永恒的变化中，所以只有从世界的变化中去认识它，才能对它获得更深刻的了解.

对于自然科学与工程技术来说，数学是其理论研究的重要工具，而且起着越来越重要的作用. 尤其是在现代物理，关于微观世界的研究中，如果没有现代数学，就不可能前进. 谈到工程技术，不但尖端技术离不开数学，就是各种工程设计也不能离开数学. 恩格斯在《反杜林论》一书中曾说：“……**要确立辩证的同时又是唯物主义的自然观，需要具备数学和自然科学的知识.**”因此，要掌握近代技术科学，高等数学是必须具备的基础理论知识.

第一篇　解析几何

第一章　行列式及綫性方程組

§1.1　二阶行列式和二元綫性方程組

考察两个二元綫性方程所組成的方程組:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2.\end{cases} \tag{1}$$

为求方程組(1)的解, 先以 b_2 遍乘第一个方程, b_1 遍乘第二个方程, 然后再由第一个方程减去第二个方程, 如此便消去 y, 得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \tag{2}$$

用同样方法消去 x, 得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1. \tag{3}$$

若代数式 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, 用它除(2)和(3)的两端, 得

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{4}$$

为了使公式(4)便于記忆, 我們在下面引入二阶行列式的概念.

設已知四个数排成正方表

$$\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{pmatrix},$$

則数 $A_1B_2-A_2B_1$ 称为对应于这个表的二阶行列式. 这个二阶行列式用記号

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$$

表示, 因此有定义

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1. \tag{5}$$

数 A_1、A_2、B_1、B_2 叫做这个行列式的**元素**，横排叫做**行**，竪排叫做**列**.

例如 $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot3-(-4)\cdot5=14.$

从定义(5)易知

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \text{ 及 } \begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

这就是：二阶行列式的行改为同号数的列，列改为同号数的行，它的值不变；但两列(或两行)对調，則要改变符号.

显然，利用行列式便可将方程組(1)的解(4)表示为：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

分母中的行列式是由方程組(1)的系数所組成的，这行列式就称为方程組(1)的**系数行列式**. 我們用 Δ 表示这个行列式，并用 Δ_x 及 Δ_y 表示公式(6)的分子中的两个行列式，則

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad (\Delta\neq0).$$

值得注意：将方程組(1)的常数項(在各方程右側的)代換行列式 Δ 中未知数 x 的系数便得 Δ_x；代換行列式 Δ 中未知数 y 的系数便得 Δ_y.

其次，我們来討論方程組(1)的系数行列式等于零的情形：仍利用記号 Δ、Δ_x 及 Δ_y，則(2)和(3)可写为

$$\Delta\cdot x=\Delta_x, \quad \Delta\cdot y=\Delta_y. \tag{7}$$

当 $\Delta=0$，但 Δ_x、Δ_y 中至少有一个不等于零时，則显而易見，x 和 y 无論取甚么数值总不能使(7)中的两个等式同时成立. 因此方程組(1)是沒有解的.

另外一种情形是：Δ、Δ_x 及 Δ_y 都等于零. 这时因

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\quad c_1b_2-c_2b_1=0,\quad a_1c_2-a_2c_1=0,$$

故

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

这表明，方程組(1)中的一个方程可由另一方程乘上一适当的常数得到. 因此要解方程組(1)，实际只要解其中一个方程就够了. 这时方程組(1)有无限多組解.

綜合以上討論可得結論如下：

1° 若 $\Delta\neq0$，則方程組(1)有唯一确定的解：

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

2° 若 $\Delta=0$，但 Δ_x 及 Δ_y 中至少有一个不等于零，則方程組(1)沒有解.

3° 若 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，方程組(1)有无限多組解.

例 1. 解方程組

$$\begin{cases}2x+3y-8=0,\\ x-2y+3=0.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-7\neq0,$$ 故方程組有唯一确定解.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}8 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-7,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14,$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-14}{-7}=2.$$

例 2. 解方程組

$$\begin{cases}3x+y=1,\\ 6x+2y=5.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}=6-6=0,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-3\neq0.$$

方程組无解. 如果把第一个方程乘 2 且与第二个方程比較，便知这两个方程是不相容的.

例 3. 解方程組

$$\begin{cases}x-2y=3,\\ 2x-4y-6=0.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 6 & -4\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=0.$$

方程組有无限多組解. 事实上, 把第一个方程乘 2 便得第二个方程, 这方程組实际可看成一个方程

$$x-2y=3.$$

取 y 为任意值而 $x=2y+3$, 便得方程組的无限多組解.

§ 1.2 三阶行列式

用二阶行列式来解二元綫性方程組的方法, 可以加以推广. 一般地, 利用 n 阶行列式可以解 n 元綫性方程組. 但是对于这种一般情形, 我們不准备討論. 我們只限于討論如何利用三阶行列式来解三元綫性方程組. 为此, 先說明三阶行列式这个概念.

設已知九个数排成正方表

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix},$$

則数 $a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$ 称为对应于这个表的三阶行列式。这个三阶行列式用記号

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

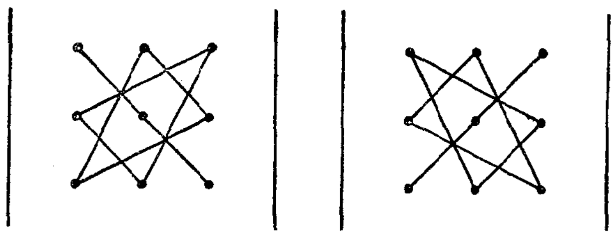
表示, 因此有定义

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$

与二阶行列式一样，数 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3、c_1、c_2、c_3 叫做这行列式的元素，横排叫做行，竖排叫做列.

根据上述定义，我們发現下面的三阶行列式的計算法則(通常叫它做**对角綫法則**)：

从三阶行列式左上角到右下角的对角綫叫做**主对角綫**，从右上角到左下角的对角綫叫做**第二对角綫**. 我們注意到：在三阶行列式的定义中，有三項的符号是正的，有三項的符号是負的；符号是正的三項中，有一項是位在主对角綫上三个元素的乘积，其他两項中的每一項都是位在主对角綫的一条平行綫上的两个元素与对角上的元素的乘积. 利用第二对角綫可以类似地得出符号是負的三項的組成規律. 这样我們就得到計算三阶行列式的对角綫法則. 現在我們把計算法則用下面的两个图表示出来：



左图指出計算三阶行列式的正項規則；右图指出計算負項規則.

例 計算行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

利用对角綫法則得

$$\Delta=1\cdot3\cdot2+2\cdot4\cdot2+(-1)\cdot5\cdot3-1\cdot5\cdot4-(-1)\cdot2\cdot2-2\cdot3\cdot3=$$
$$=6+16-15-20+4-18=-27.$$