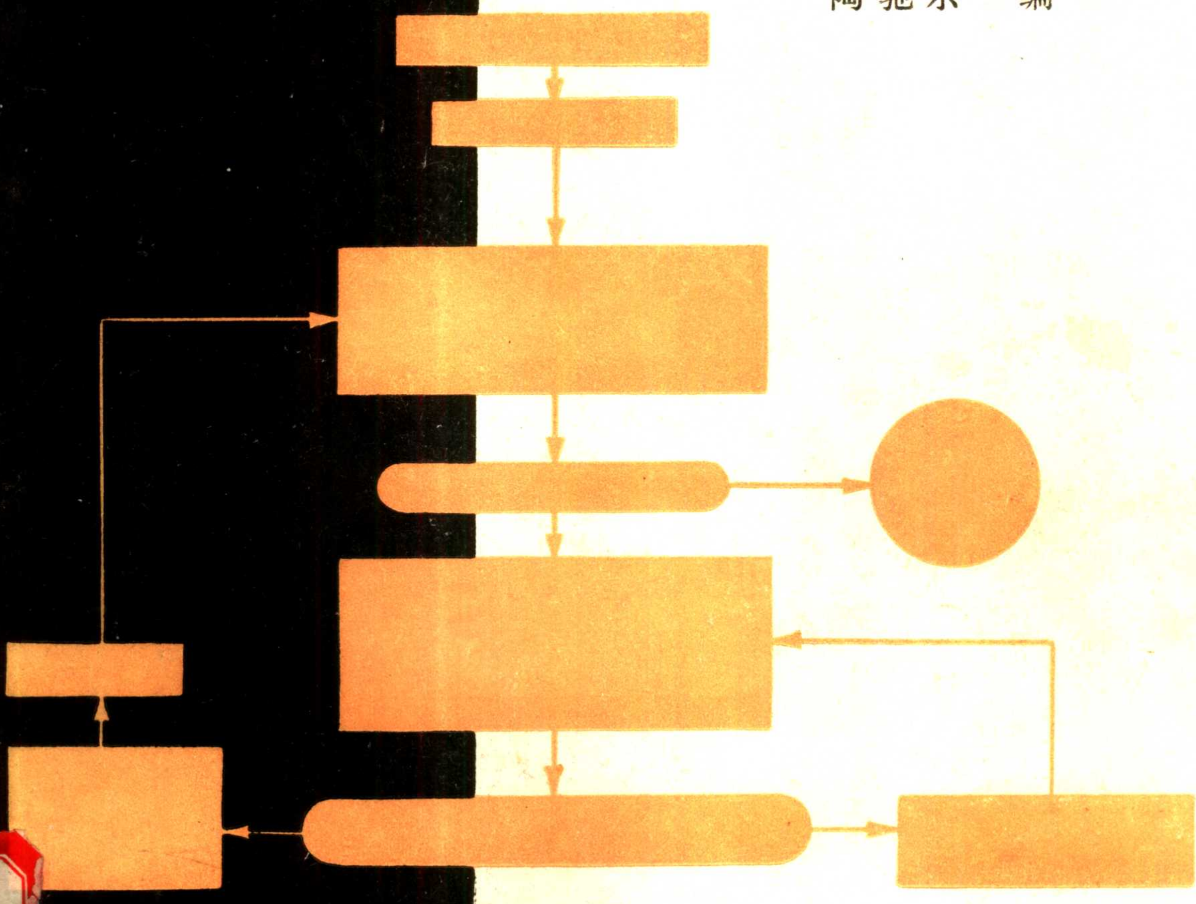
高等学校教学用书

机械优化设计基础

陶驰东 编



中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

机械优化设计基础

陶驰东 编

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书阐述优化设计的基本理论和机械设计常用的优化方法。注意从实用的角度说明优化方法的选用原则，以及实际应用中需要处理的一些问题，并且进行了较充分的理论分析。提供了各种优化方法的计算程序框图，对较重要的优化方法还提供了程序的关键片段，读者能够根据程序框图学习编写计算程序的技巧。最后一章介绍了矿山机械设计中几个较复杂的应用实例。

本书适合作机械设计和制造类专业研究生和大学生的基础教材，也可供机械工程技术人员学习和参考。

责任编辑　安乃隽
技术设计　杜锦芝
责任校对　周俊平

高等学校教学用书
机械优化设计基础
陶 驰 东 编

中国矿业大学出版社 出版 发行
江苏省新华书店经销　中国矿业大学印刷厂印刷
开本787×1092毫米1/16　印张12.25　字数294千字
1989年10月第一版　1989年10月第一次印刷
印数1—2000册

ISBN 7-81021-220-6

TD·54　　定价：2.50元

前　　言

在某些条件的制约下找到最满意的解决方案，这就是最优化技术。这种技术随着电子计算机的推广应用而发展起来。各种科学技术中普遍存在最优化问题，因此最优化技术的应用领域十分广泛，并已取得显著的成效。在机械产品的设计和应用中，同样显示出优化方法的重要作用。生产发展的需要，促使工程技术人员对学习和掌握优化设计方法的兴趣日益浓厚，优化设计已经是机械设计与制造专业高年级学生和研究生的必修课程。

本书系统讲述机械设计中常用的优化方法及其理论。是在编者多年讲稿的基础上，为机械设计与制造专业本科生和研究生编写的教材，也可供工程技术和科研人员学习参考。为使具有高等数学和线性代数基础知识的读者能够看懂学会，本书力求深入浅出、通畅易懂。

本书选取的优化方法是机械优化设计中使用效果较好的几种，以及为了讲解这些方法而需要了解的其他方法。书中论述了各种方法的寻优策略、计算方法、优点和缺点，重要的方法并给出计算程序框图和关键的程序片段。经过循序渐进的学习，读者可以学会利用计算框图编写计算程序，或看懂和使用现成的程序。

本书注重实用性，着意讲清使用中应该注意的问题。同时力求从理论上讲清道理，又避免繁琐的论证和推导。第八章收进的几个实例，进一步介绍了零部件和整机优化设计的方法。

本书难免存在不足和错误，请读者批评和指正。

编　者

1988年11月

主要符号说明

A——$n\times n$阶实对称矩阵

$A^{(k)}$——$\vec{X}^{(k)}$处的变尺度矩阵

a_{ij}——$F(\vec{X})$在$\vec{X}^{(k)}$处对x_i和x_j的二阶偏导数

b_i——$F(\vec{X})$在$\vec{X}^{(k)}$处对x_i的一阶偏导数

$E^{(k)}$——$\vec{X}^{(k)}$处的校正矩阵

E^n——n维欧氏(Euclidean)空间

$E(\vec{X}^{(k)})$——$\vec{X}^{(k)}$处起作用约束函数下标的集合

$\vec{e}_i$——第i个分量为1的单位向量

$F(\vec{X})$——目标函数

$f_j(\vec{X})$——第j个分目标函数

$G[g_u(\vec{X})]$——不等式约束函数的泛函

$g_u(\vec{X})$——第u个不等式约束函数

$\vec{g}^{(k)}$——$F(\vec{X})$在$\vec{X}^{(k)}$处的梯度，是$\overrightarrow{\nabla F}(\vec{X}^{(k)})$的简写

$H[h_v(\vec{X})]$——等式约束函数的泛函

$H^{(k)}$——$F(\vec{X})$在$\vec{X}^{(k)}$处的海赛(Hessian)矩阵，是$H(\vec{X}^{(k)})$或$\nabla^2F(\vec{X}^{(k)})$的简写

$h_v[h_v(\vec{X})]$——第v个等式约束函数

I——$n\times n$阶单位矩阵

J——$F(\vec{X})$的雅可比(Jacobian)矩阵

k——迭代序号

L——拉格朗日(Lagrangian)函数

max——求极大值或极大化

min——求极小值或极小化

p——点列收敛阶

q——点列收敛比

r——惩罚因子

r_i——伪随机数

$\vec{S}^{(k)}$——$\vec{X}^{(k)}$处的设计修改方向或搜索方向

S_k——$X^{(k)}$处严格满足的约束函数下标的集合

$s_i^{(k)}$——$\vec{S}^{(k)}$的第i个分量

T_k——$\vec{X}^{(k)}$处不严格满足和违反的约束函数下标的集合

s.t.——是“Subject to”的简写，即“受约束于”

$\vec{X}^{(k)}$——列向量，称设计向量

$\vec{X}^{(k,1)}$——惩罚因子$r^{(k)}$下的一阶外推点

$\vec{X}^{(k,2)}$——惩罚因子$r^{(k)}$下的二阶外推点

$\vec{X}^*$——优化点

x_i——第i个设计变量，其取值区间的下限是$x_i^{(l)}$、上限是$x_i^{(u)}$

D——可行域

α——步长因子，一维搜索得最优步长因子$\alpha^{(k)}$

α_j、β_j——$f_j(\vec{X})$的下边界值和上边界值

λ、μ——拉格朗日乘子

ω——加权因子

$\nabla F(\vec{X}^{(k)})$——$F(\vec{X})$在$\vec{X}^{(k)}$处的梯度

$\nabla^2 F(\vec{X}^{(k)})$——$F(\vec{X})$在$\vec{X}^{(k)}$处的二阶偏导数矩阵

$\|\cdot\|$——向量的欧氏(Euclidean)范数

det(Q)——矩阵Q的行列式

目 录

第一章 优化设计概述 ……………… (1)
第一节 优化设计的涵意 ……………… (1)
第二节 设计变量、设计向量和设计空间 ……………… (1)
第三节 目标函数 ……………… (3)
第四节 约束条件 ……………… (5)
第五节 机械优化设计数学模型举例 ……………… (5)
第六节 优化设计问题的分类 ……………… (9)
第七节 优化方法在机械设计中的应用 ……………… (10)
习题
第二章 数学规划基础 ……………… (13)
第一节 正定实二次型 ……………… (13)
第二节 函数的等值线和梯度 ……………… (13)
第三节 可行域和起作用的约束 ……………… (17)
第四节 函数的近似表示 ……………… (18)
第五节 凸函数和凸规划 ……………… (19)
第六节 无约束极值的必要充分条件 ……………… (23)
第七节 约束极值的必要条件 ……………… (26)
第八节 约束极值的充分条件 ……………… (32)
第九节 鞍点问题 ……………… (33)
第十节 迭代数值算法 ……………… (34)
习题
第三章 一维搜索方法 ……………… (39)
第一节 一维搜索的概念 ……………… (39)
第二节 区间估计 ……………… (40)
第三节 黄金分割法(0.618法) ……………… (43)
第四节 其他收缩区间的一维搜索方法 ……………… (47)
第五节 二次插值法 ……………… (49)
第六节 利用导数的一维搜索方法 ……………… (53)
第七节 一维搜索方法的选用 ……………… (58)
习题
第四章 无约束最优化的直接搜索法 ……………… (61)
第一节 座标轮换法 ……………… (62)
第二节 模式搜索法 ……………… (66)
第三节 方向加速法(Powell法) ……………… (70)

第四节 单纯形法 …………………………………………………………………… (85)
习题
第五章 无约束最优化的求导法 ……………………………………………… (95)
第一节 梯度法 …………………………………………………………………… (95)
第二节 牛顿法 …………………………………………………………………… (97)
第三节 共轭梯度法(F-R法) …………………………………………………… (100)
第四节 变尺度法(DFP法) ……………………………………………………… (107)
第五节 常用无约束优化方法的比较 …………………………………………… (114)
习题
第六章 约束最优化方法 ……………………………………………………… (117)
第一节 网格法 …………………………………………………………………… (117)
第二节 随机方向法 ……………………………………………………………… (118)
第三节 复合形法 ………………………………………………………………… (122)
第四节 可行方向法 ……………………………………………………………… (126)
第五节 线性规划单纯形法 ……………………………………………………… (131)
第六节 惩罚函数法 ……………………………………………………………… (137)
第七节 乘子法(P-H-R法) ……………………………………………………… (148)
第八节 约束最优化方法的选用 ………………………………………………… (150)
习题
第七章 应用优化方法的有关问题 …………………………………………… (152)
第一节 尺度变换 ………………………………………………………………… (152)
第二节 数表和图线的利用 ……………………………………………………… (154)
第三节 选用优化方法 …………………………………………………………… (155)
第四节 离散变量设计问题的优化方法 ………………………………………… (155)
第五节 使用现有程序 …………………………………………………………… (158)
第六节 分析计算结果 …………………………………………………………… (159)
第八章 机械优化设计实例 …………………………………………………… (162)
第一节 圆柱螺旋弹簧优化设计 ………………………………………………… (162)
第二节 连杆机构优化设计 ……………………………………………………… (168)
第三节 复摆腭式破碎机优化设计 ……………………………………………… (172)
第四节 齿轮减速器优化设计 …………………………………………………… (175)
第五节 概率筛参数优化设计 …………………………………………………… (183)
参考文献

第一章　优 化 设 计 概 述

以尽可能少的费用、高的效率和好的质量实现工程目标，是工程技术人员的根本任务。最优化是生产实践的基本要求，而且随着科学技术的发展而不断深化。

第一节　优化设计的涵意

一般所谓的最优化，是用数学方法寻找最优结果的方法和过程。虽然一切科学的方法都能取得某种优化效果，但不是任何一种方法（比如通过了解用户要求或实验改进产品质量）都能纳入最优化的范畴。远在研究微积分之前，人们就开始研究最优化方法；在科学技术的发展长河中有过许多著名的最优化问题（如最小二乘问题）。但是，只是最近二十多年，由于运筹学理论的发展和电子计算机的广泛应用，最优化方法才被大规模地用于解决复杂的工程问题，渗透到科学、技术、经济和管理的许多领域，成为分析、设计、综合和决策的一种重要方法。

最优化的内容广泛，主要分为优化设计、优化控制和优化管理三类问题。它们虽有联系，但却显著不同。优化控制是与时间有关的问题，称为动态最优化，寻求的是最佳的时间函数；优化设计是与时间无关的问题，称为静态最优化，寻求的是最佳参数匹配。因此，它们的数学模型和求解方法大不相同。优化管理也有自己的特点和方法。

优化设计是用数学规划法，根据一定要求从大量方案中寻求最佳设计方案。为此，先要建立设计问题的数学模型，选用适当的优化方法，编写和调试程序，最后用电子计算机进行运算，求得最优解。这个过程不需要利用实物或物理模型进行实验，因而能够以较低的费用、较快的速度完成较高质量的设计。当然，优化设计的结果最终还要经受生产和实验的检验。可见优化设计较之传统设计具有很多优点。用优化方法进行较复杂的设计，效果则更显著。

第二节　设计变量、设计向量和设计空间

建立数学模型，用数学表达式描述要处理的问题，是优化设计的基础。由于某种原因暂时不能建模的问题，不能进行优化设计。

在优化设计过程中调整和优选的参数，称为设计变量。数学模型就是以设计变量作自变量的方程组。设计变量相互独立，并能影响设计结果。设计变量可以是几何参数（如长度、截面积、体积、直径和角度等）、物理参数（如位移、速度、加速度、力、力矩和质量等）和工程参数（如挠度、传动比、阻尼比、频率比、模数和齿数等）。这几种参数可以同时出现在一个数学模型中，它们的量纲和量级可能完全不同。

可以由设计变量导出的量不能选作设计变量，以保证设计变量的相互独立性。如果需

要这些导出量在适当的范围内取值，则可作为约束条件来考虑。材料的弹性模量、许用应力等特征值和构件的允许挠度等准则值一般不选作设计变量。在一个设计中可以选用的材料是有限的，而每种材料的性能又是不能随意调整的，故表示材料性能的量可按常量赋值。如果需要把优选材料作为设计的一个优化目标，则可分别按可以选用的几种材料的特征值进行计算，再根据计算的结果选用最优的材料。准则值一般放在约束条件中考虑。赋入不同的准则值进行优化设计，比较几次计算的结果，或者通过对计算结果的灵敏度分析，就可以弄清楚准则值变化对设计结果的影响。

机械设计中常会遇到整型变量(如齿轮齿数、行星齿轮个数等)和离散型变量(如齿轮模数、弹簧钢丝直径、板材厚度等)。一般情况下，可先把整型和离散型变量看作连续变量，进行优化设计，然后再把计算所得的初步最优解，圆整成规定数列中最接近的整数或离散数作为最优解。但是，这样得到的可能不是真正的最优解。因此，最好用特殊的方法来处理。我国第一个约束非线性混合离散变量优化设计方法软件包MOD已通过签定，正待推广应用。它把整型变量看成是离散变量的特例，同时又可处理连续变量；对于离散变量，仅取有工程实际意义的离散值，故计算结果符合工程规范的要求，且计算效率一般比用连续变量的优化设计方法高。[1]*和本书第七章第四节简单介绍了混合离散变量设计问题的优化方法。

对于有n个设计变量的问题，一组n个设计变量的值就是一个设计方案。优化设计中用n维列向量表示设计方案，称为设计向量：

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_i\ \cdots\ x_n]^T$$

$n=1$时，设计轴上的任一点都是一个方案，坐标原点至该点的连线方向则表示一个设计向量。$n=2$时设计平面中的任一点，和$n=3$时设计空间中的任一点，也是一个方案，坐标原点至该点的连线方向也表示一个设计向量。$n>3$的情况依此类推。可见，以n个独立变量坐标轴构成的空间，包含了全部可能的设计方案或设计向量，故称为设计空间。它是n维实空间R^n。如果任意两个向量有内积运算，则它是一个n维欧氏空间E^n。符号$\vec{X}\in E^n$意为$\vec{X}$属于E^n，表示向量$\vec{X}$的各个分量$x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$都是实变量。设计变量数$n$称为优化设计的维数或自由度。机械优化设计的维数一般大于3，故对应的设计空间是超越空间。超越空间中的函数不能用图象表示出来。

设计空间维数越大，可以选择的方案也越多，但数学模型也越复杂，求解亦越困难。一般认为n小于10为小型设计问题，$n>50$为大型设计问题，中型设计问题的维数为10～50。绝大多数机械优化设计是中小型问题。为了保证设计的正确，一定要把对设计结果有显著影响且能调整的参变量确定为设计变量，不应将其遗漏。同时，为了减少计算的困难，应

* [ ] 内为书末所附参考文献的编号

该忽略那些对设计影响不大的因素，以减少问题的维数。

因为任何一个设计方案都是设计空间中的一点，并可表示为从坐标原点到该点的一个设计向量，优化设计常从一个设计向量作定向的设计变动而获得新的设计向量。相邻两个设计向量的关系是：

$$\overrightarrow{X}^{(k+1)}=\overrightarrow{X}^{(k)}+\alpha\overrightarrow{S}^{(k)}$$

式中 $\overrightarrow{X}^{(k)}$、$\overrightarrow{X}^{(k+1)}$——前、后相邻的设计向量；

$\overrightarrow{S}^{(k)}$——从$\overrightarrow{X}^{(k)}$修改设计的方向，用单位向量表示；

α——步长因子，是决定设计修改幅度的标量。

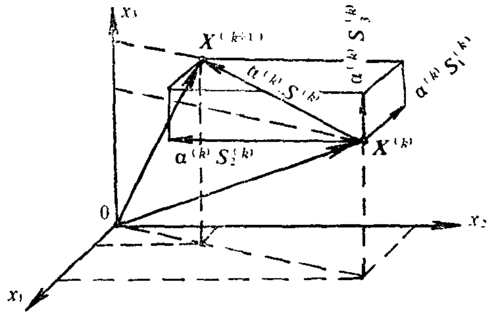


图1-1　相邻设计向量的几何关系

图 1-1 以三维设计问题为例，说明相邻设计向量的几何关系。

分别用列矩阵表示向量$\overrightarrow{X}^{(k)}$、$\overrightarrow{S}^{(k)}$和$\overrightarrow{X}^{(k+1)}$，则上面这个优化设计中经常使用的迭代公式可写成：

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_i^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} s_1^{(k)} \\ s_2^{(k)} \\ \vdots \\ s_i^{(k)} \\ \vdots \\ s_n^{(k)} \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

式中 $s_i^{(k)}$——设计修改方向$\overrightarrow{S}^{(k)}$沿x_i坐标轴方向的分向量，$i=1, 2, \cdots, n$。

从此式不难理解，优化设计中采用向量矩阵，可以把多维的计算转化成简单重复的一维运算。利用循环语句很容易编出进行这种运算的计算机程序。

第三节　目 标 函 数

从大量设计方案中寻找最优化方案，显然需要一个评价标准。目标函数就是评价的标准，故又称评价函数。它一般是设计变量的显函数，记作$F(\overrightarrow{X})$；但也可以是由设计变量决定的指标。在动态系统的优化设计中，常用这样的指标作为评价标准。

最优化就是要使目标函数的值极大化(max)或极小化(min)，但 $\max F(\overrightarrow{X})$ 等价于 $\min -F(\overrightarrow{X})$。为了统一算法和简化程序，优化设计中一般讨论极小化的情况。

预期解决的问题看得准，优化设计才能取得好效果。所以，建立正确的目标函数，是优化设计的重要环节。实际要求的多样性和矛盾性，需要深入细致地分析具体情况，才

能正确建立目标函数。比如，重量最轻的设计方案，如果要求采用质量更优的材料或费用更高的制造工艺，就不一定是最经济的设计方案。

为了简化目标函数，可以简约目标函数中的公共常系数。比如，目标函数原是某个零件的重量，材料的重率可以简约。如果这是个以直径和长度为设计变量的圆柱状零件，$\frac{\pi}{4}$也可以简约。所以，目标函数只是一个评价标准，不一定具有明确的物理意义。

实际工程问题可能要求同时实现多个优化目标。多目标的优化设计问题，目标函数复杂，求解过程复杂，而且不同的优化目标还可能互相矛盾。需要正确认识和处理各个优化目标之间的关系，才能正确解决问题。通常需要把多目标问题转化成单目标优化设计问题求解。

多目标问题是优化设计中研究得还不够充分的一个方面。下面是目前常用的一些方法：

1．主要目标法

根据最重要的优化目标建立目标函数，其它优化目标作为约束条件来考虑；

2．分步优化法

按重要程度将各优化目标排队，顺序进行优化。每次只优化一个分目标函数，求得其最优值，作为后续优化过程的附加约束条件。即在后续优化过程中，限制已经优化的目标函数的值不得超过已求得的最优值。分步优化法不仅计算量大，且可能因为后续优化过程无法进行而中断计算，不得不放宽附加约束条件，求取折衷的优化设计方案。

3．统一目标法

用加权求和的方法将各分目标函数综合成统一目标函数

$$F(\overrightarrow{X})=\sum_{j=1}^{q}\omega_j f_j(\overrightarrow{X})$$

式中 $f_j(\overrightarrow{X})$、ω_j——第j个分目标函数及其加权因子。

加权因子是非负小数，应根据各优化目标的重要程度确定。全部加权因子的总和一般为1。如果各分目标函数的量级和量纲差异很大，应先进行规格化处理，使它们的值都在0～1之间。若已知各分目标函数值的变化范围是

$$\alpha_j \leqslant f_j(\overrightarrow{X}) \leqslant \beta_j \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ q$$

用正弦函数进行规格化转换，令

$$f_j'(\overrightarrow{X})=\frac{1}{2}\left[\sin\left(x_j-\frac{\pi}{2}\right)+1\right]$$

式中

$$x_j=\frac{f_j'(\overrightarrow{X})-\alpha_j}{\beta_j-\alpha_j}\cdot\pi$$

则$f_j(\overrightarrow{X})$的值在α_j～β_j之间变化时，x_j在0～π之间变化，$f_j'(\overrightarrow{X})$在0～1之间变化。线性函数、二次函数、指数函数等简单低级函数，都可用于规格化转换。

正确选择加权因子也很重要，选择的方法又很多。这里介绍容限法。定义各分目标函数的容限为

$$\Delta f_j=\frac{1}{2}\left(\beta_j-\alpha_j\right) \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ q$$

取加权因子 $\omega_j = 1/(\Delta f_j)^2 \qquad j = 1, 2, \cdots, q$

多目标优化设计问题还可用其它方法处理。有兴趣的读者可以参考专门文献。

第四节 约束条件

实际工程问题的优化过程一般不可能不受任何条件的限制。设计变量的值必须满足某些条件的限制，才是可能实现的（可行的）设计。表示这些限制条件的等式或不等式函数，称为约束条件或约束函数。

直接限制设计变量取值范围的约束条件，称为边界约束或辅助约束，通常是显约束。如设计变量x_i取值的上下极限是$x_i^{(u)}$和$x_i^{(l)}$，则相应的边界约束为

$$g_1(\vec{X}) = x_i^{(l)} - x_i \leqslant 0$$

$$g_2(\vec{X}) = x_i - x_i^{(u)} \leqslant 0$$

反映某种性能要求或规范要求的约束条件，称为性态约束或性能约束，通常是隐约束，对设计变量的取值有间接的制约作用。如行星齿轮传动的装配条件、邻接条件、传动比条件等对分配齿数的制约作用，曲柄存在条件对选择曲柄摇杆机构杆件长度的制约作用等，都在优化设计中构成相应的性态约束条件。约束条件可以根据力学、机械学、几何学等推导出来，或者用设计规范的计算公式表示。

在机械优化设计中，约束条件多用数学不等式表示，称为不等式约束条件，即

$$g(\vec{X}) \geqslant 0 \quad 或 \quad g(\vec{X}) \leqslant 0$$

因为 $g(\vec{X}) \geqslant 0$ 等价于 $-g(\vec{X}) \leqslant 0$

为了避免理论分析的混乱和计算错误，在同一著作中不等式约束的形式应该前后一致。

除了不等式约束条件，还会遇到用数学等式表示的约束条件，称为等式约束条件，即

$$h(\vec{X}) = 0$$

等式约束条件对设计变量的约束较严格。一个等式约束条件等价于两个不等式约束条件，即

$$h(\vec{X}) = 0 \quad 等价于 \quad g(\vec{X}) \leqslant 0 \quad 和 \quad -g(\vec{X}) \leqslant 0$$

另一方面，不等式约束条件

$$g(\vec{X}) \leqslant 0 \quad 等价于 \quad g(\vec{X}) + \eta^2 = 0$$

即引入松弛变量η可以把不等式约束条件转化成等式约束条件。

利用代数消元法，有一个等式约束条件就可以消去一个设计变量。但当约束条件或目标函数较复杂时，消元很困难。对于n维设计问题，含有的等式约束条件应少于n，否则就没有设计自由度，无法进行优化设计。

约束条件越多，计算越复杂，可以选择的设计方案也越少。所以，删去无关紧要的约束条件可以减少计算量，提高计算效率。但若漏掉重要的约束条件就会导致设计的错误。

第五节 机械优化设计数学模型举例

为了便于展开讨论，举例说明机械优化设计的数学模型。

例一 千斤顶活塞杆的优化设计问题（图1-2）。若已知液压缸内径$D = 80\text{mm}$，工作

压强$p=0.25$MPa；活塞杆长度$l=700$mm，是用许用应力$[\sigma]=5.2$MPa和壁厚5mm的无缝钢管制作的，试求活塞杆的外径d，使其重量最轻。

由于l与d的比值大于10，活塞行程较长，故应按压杆设计活塞杆。由压杆临界载荷公式（欧拉公式）知

$$P_{Cr}=\frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}$$

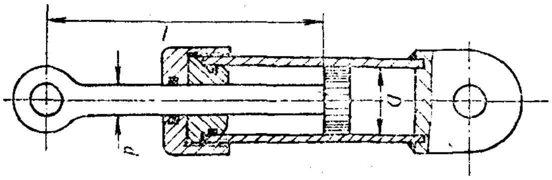


图1-2 液压斤千顶活塞杆尺寸

式中 P_{Cr}——压杆产生屈服的临界载荷，N；

E——材料的弹性模量，钢材取2.1×10^{11}Pa；

J——压杆横截面的惯性矩，$J=\frac{\pi}{64}d^4(1-\alpha^4)$，m^4；

l——压杆长度，m；

μ——端部条件常数。一端固定、一端自由的压杆取$\mu=2$；两端铰支$\mu=1.0$；一端固定、一端铰支$\mu=0.7$；两端固定$\mu=0.5$；

α——壁厚系数，$\alpha=\frac{d-0.01}{d}=1-\frac{0.01}{d}$；

d——活塞杆直径，m。

如果外载超过临界载荷P_{Cr}，活塞杆将因纵向弯曲而失效。此外，还应考虑简单压缩产生的屈服，即保证压应力σ小于许用应力$[\sigma]$。这个例题只有一个设计变量d。因为活塞杆的断面积

$$F=\frac{\pi}{4}[d^2-(d-0.01)^2]=\frac{\pi}{4}\cdot0.02(d-0.005)\quad \text{m}^2$$

轴向载荷

$$P=\frac{\pi}{4}D^2\cdot p=1256\quad \text{N}$$

压应力

$$\sigma=\frac{P}{F}=\frac{8.10^{-2}}{d-0.005}\quad \text{MPa}$$

若取端部条件常数$\mu=1.0$，则活塞杆的临界载荷

$$P_{Cr}=0.2076\cdot10^8 d^4\left[1-\left(1-\frac{0.01}{d}\right)^4\right]$$

此题的数学模型应为：

$$\min F(\vec{X})=x,\ x=d$$

$$s.t.\quad g_1(\vec{X})=\frac{\beta\cdot8\cdot10^{-2}}{x-0.005}-[\sigma]\leqslant0$$

$$g_2(\vec{X})=\gamma\cdot1256-0.2076.10^8\cdot x^4\left[1-\left(1-\frac{0.01}{x}\right)^4\right]\leqslant0$$

$$g_3(\vec{X})=d-0.08\leqslant0$$

式中取$\beta=1.5$，$\gamma=2.0$，是考虑加工等因素影响的安全裕量系数。s.t.与min互相呼应，表示在不违反约束条件的前提下对目标函数进行极小化。

此题很简单，用材料力学的方法也很容易找到满足强度和刚度要求的解。但用优化方法处理这个数学模型，却可找到满足强度和刚度要求且重量最轻的活塞杆直径。

例二　齿轮传动系统传动比的优化分配问题（图1-3）。某设备的调速电动机带动一总传动比为i的微型齿轮减速器，试按转动惯量最小、传动精度最高和结构最紧凑的要求确定各级齿轮的传动比。

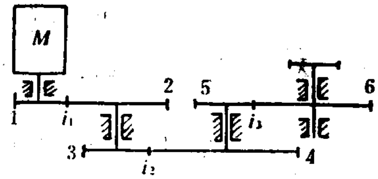


图1-3　微型齿轮减速器传动系统

齿轮传动系统传动比的分配一般会影响各级齿轮的强度匹配和传动质量。本题讨论的减速器，由于其特殊的使用条件，对优化设计提出了一些特殊的要求，强度和传动质量（指重合度、滑动比系数等）却不必着重考虑。

今取前两级齿轮传动比i_1和i_2作为设计变量，则第三级齿轮的传动比

$$i_3=\frac{i}{i_1\cdot i_2}$$

假设各级传动副的小齿轮齿数相同。为了使各级齿轮副的强度相近，各级齿轮副的模数m正比于小齿轮所在轴转矩T的立方根。因小齿轮的分度圆直径d和齿宽b正比于模数，故

$$\frac{m_j}{m_1}=\frac{d_j}{d_1}=\frac{b_j}{b_1}=\left(\frac{T_j}{T_1}\right)^{\frac{1}{3}}=(i_{1j})^{\frac{1}{3}}$$

式中　i_{1j}——第1级与第j级传动副小齿轮之间的传动比；下标1和j表示是第1级和第j级（$j=2$或3）传动副的小齿轮。

如果轴和轴承的转动惯量可以和轴上齿轮的转动惯量一起考虑，又因各齿轮的转动惯量正比于$b_i\cdot d_i^4$，则整个传动系统折算到电动机轴上的等效转动惯量为：

$$J_1[1+i_1^2+(i_1)^{-\frac{1}{3}}\cdot(1+i_2^2)+(i_1\cdot i_2)^{-\frac{1}{3}}\cdot(1+i_3^2)]$$

式中　J_1——齿轮1的转动惯量。

各级传动比对整个系统转动惯量的影响可用无量纲数Z表示：

$$Z=1+i_1^2+(i_1)^{-\frac{1}{3}}\cdot(1+i_2^2)+(i_1\cdot i_2)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(1+\frac{i^2}{i_1^2\cdot i_2^2}\right)$$

由于各级齿轮副的尺寸比较接近，可假设它们的传动误差相等。把这些误差折算到第1级的主动轴上即得整个系统的传动误差，且用无量纲数Δ表示，则有

$$\Delta=i_1+i_1\cdot i_2+i$$

基于前面关于齿数和模数的假设，并设轴和轴承的体积正比于轴上齿轮的体积。因各齿轮的体积正比于$b_i\cdot d_i^2$，即可根据齿轮1的体积推算出整个传动系统的体积，也用无量纲数V表示，则有

$$V=1+i_1^2+i_1\cdot(1+i_2^2)+i_1\cdot i_2\cdot\left(1+\frac{i^2}{i_1^2\cdot i_2^2}\right)$$

可用线性加权求和法综合考虑上面讨论的三方面因素，得出评价设计质量的函数

$$F(\overrightarrow{X})=\omega_i Z+\omega_2\cdot\Delta+\omega_3\cdot V$$

式中 ω_1、ω_2、ω_3——Z、Δ和V的加权因子。

这个例题的数学模型为：

$$\min F(\overrightarrow{X})=\omega_1\cdot Z+\omega_2\cdot\Delta+\omega_3 V$$

式中 $\overrightarrow{X}=[x_1,\ x_2]^T=[i_1,\ i_2]^T$

$$Z=1+x_1^2+(x_1)^{-\frac{1}{3}}\cdot(1+x_2^2)+(x_1\cdot x_2)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(1+\frac{i^2}{x_1^2\cdot x_2^2}\right)$$

$$\Delta=x_1+x_1\cdot x_2+i$$

$$V=1+x_1^2+x_1\cdot(1+x_2^2)+x_1\cdot x_2\cdot\left(1+\frac{i^2}{x_1^2\cdot x_2^2}\right)$$

$$\text{s.t.}\quad g_1(\overrightarrow{X})=1-x_1\leqslant 0$$

$$g_2(\overrightarrow{X})=1-x_2\leqslant 0$$

$$g_3(\overrightarrow{X})=1-i/(x_1\cdot x_2)\leqslant 0$$

$$g_4(\overrightarrow{X})=(x_1)^{\frac{2}{3}}-x_2+(x_2)^{\frac{1}{3}}-1\leqslant 0$$

前面三个约束条件保证各级齿轮副都是减速的。最后一个约束条件保证齿轮2和5不相碰，可以根据前面关于模数和齿数的假设推导出来。

例三 减震器优化设计问题(图1-4)。若减震器附加质量与机器主质量之比$\mu=\frac{m_2}{m_1}$，机器的主质量m_1，弹簧刚度k_1和载荷已知，试设计减震器的弹簧刚度k_1、k_2和阻尼系数c，使主质量的最大位移与其静位移之比最小。

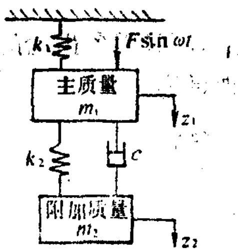


图1-4 减震器力学模型

作为两自由度振动系统，有许多书籍分析了它的动态特性。根据系统参数计算主质量m_1和附加质量m_2的最大位移$Z_{1\max}$和$Z_{2\max}$都不很困难。此题的数学模型是

$$\min F(\xi,\ \kappa,\ \zeta)=\frac{Z_{1\max}}{x_{s1}}$$

$$\text{s.t.}\quad g_1(\xi,\ \kappa,\ \zeta)=\left|\frac{Z_{2\max}-Z_{1\max}}{Z_{1\max}}\right|-\theta_{\max}\leqslant 0$$

$$g_2(\xi)=\xi_{\min}-\xi\leqslant 0$$

$$g_3(\xi)=\xi-\xi_{\max}\leqslant 0$$

式中 $Z_{1\max}$、$Z_{2\max}$都是ξ、κ和ζ的函数；

$\xi=C/C_c$——阻尼比；

$C_c=2m_2\Omega_n$——临界阻尼；

C——减震器阻尼系数；

$\Omega_n=(k_1/m_1)^{\frac{1}{2}}$——机器的非耦合固有频率；

$\kappa=\omega_n/\Omega_n$——机器与减震器非耦合固有频率之比；

$\omega_n=(k_2/m_2)^{\frac{1}{2}}$——减震器的非耦合固有频率；

$\zeta=\omega/\Omega_n$——激励频率与机器非耦合固有频率之比；

ξ_{min}、ξ_{max}——阻尼比的下极限和上极限；

θ_{max}——'振动范围'极限值；

$x_{st}=F/k_1$——由力F产生的主质量m_1的静位移。

这虽是个不很复杂的优化设计问题，但是用一般的高等数学方法不能求解。

第六节　优化设计问题的分类

优化设计所包含的主要步骤一般是：

(1) 确定所研究问题的范围；

(2) 建立反映实际情况的数学模型；

(3) 选用适当的优化方法；

(4) 编写计算机程序并进行计算；

(5) 分析计算结果。

前节中我们列举了优化设计数学模型的一些例子。优化设计问题数学模型的一般形式是

$$\min F(\vec{X}),\ \vec{X}=[x_1,\ x_2\cdots,\ x_n]^T\in E^n$$

$$\text{s.t.}\ gu_v(\vec{X})\leqslant 0,\ u=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

$$hv(\vec{X})=0,\ v=1,\ 2\cdots,\ p<n$$

$$x_i^{(u)}\geqslant x_i\geqslant x_i^{(l)},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

目标函数$F(\vec{X})$是由n个设计变量表示的优化设计对象的特性指标，是实函数。优化设计过程就是要找出使$F(\vec{X})$值最小的设计变量值。几个变量的一种组合构成一个设计方案或设计向量$\vec{X}$，它是n维欧氏向量空间(称为设计空间)E^n中的一个向量，坐标原点是它的始点，它的终点是点$(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$。为了表达的方便，可用该向量的终点(称为设计点)代表一个设计方案或设计变量向量$\vec{X}$。

这个极小化过程一般是在某些约束条件的限制下进行的。这里的s.t.就是'受约束于'的意思。全部满足约束条件的$\vec{X}$才是可能被采用的设计方案；不满足任何一个约束条件的设计方案则是不可行的，不应该采用。

根据数学模型的结构特点，优化设计问题可分为下列主要类型：

当$m=p=0$，且$x_i^{(u)}=-x_i^{(l)}=\infty$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$时，任何约束条件都不存在，是无约束优化设计问题。与此相反，只要存在任何一个约束条件，就是约束优化设计问题。

当$F(\vec{X})$，$g_u(\vec{X})$，$u=1,\ 2,\ \cdots,\ m$和$h_v(\vec{X})$，$V=1,\ 2,\ \cdots,\ p$都是连续型变量的线性函数时，是线性规划问题。许多优化管理问题是线性规划问题。如果目标函数或约束条