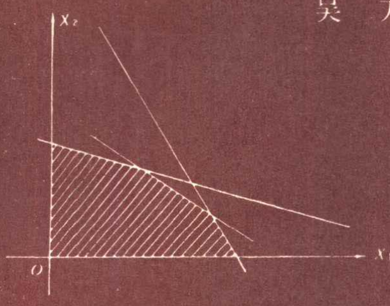
·运筹学小丛书·

线性规划初步

吴方著



辽宁教育出版社

·运筹学小丛书·

线性规划初步

吴　方著

辽宁教育出版社
一九八五年·沈阳

线性规划初步

吴　方著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：82,000　　开本：787×1092 1/32　　印张：4 1/8

印数：1—5,000

1985年7月第1版　　1985年7月第1次印刷

责任编辑：俞晓群　　责任校对：理　余

封面设计：周晓风

统一书号：7371·20　　定价：0.65 元

出版说明

运筹学是二十世纪四十年代开始形成的一门学科，是现代数学的一个重要组成部分。在科学技术迅速发展的今天，运筹学有着广泛的应用。

为了向广大读者普及运筹学知识，在中国运筹学会的关心和支持下，尤其是在徐利治教授的积极倡导和组织下，编辑出版了这套《运筹学小丛书》。

这套丛书用通俗的语言系统地介绍了运筹学中各个分支的基础知识和应用方法，其中包括规划论、对策论、排队论等方面的二十多个专题。在编写内容上，注重科学性、知识性和趣味性相结合，论述一般先从实例谈起，由浅入深，引出完整的数学理论。并且，大部分内容的引出方法都是初等的，因此，凡是具有高中以上文化程度的读者，都可以阅读。

目　　录

第一章　线性规划问题举例

在各类经济活动中，经常遇到这样的问题：在生产条件不变的情况下，如何通过统筹安排，改进生产组织或计划，合理安排人力、物力资源，组织生产过程，使总的经济效益达到最大。这样的问题常常可以化成或近似地化成所谓的“线性规划”，通过数学方法获得解决。

下面我们举一些例子。

例 1　某工厂要用甲、乙、丙三种原料生产 A、B 两种产品。假定每生产一单位产品 A 需耗用甲原料 9 公斤、乙原料 3 公斤、丙原料 4 公斤；而每生产一单位产品 B 则需分别耗用甲、乙、丙三种原料 4、10、5 公斤。又每生产 A 产品一单位可获利700元，而生产 B 产品一单位可获利 1200元。今甲、乙、丙三种原料的库存数量分别为 360、300与200公斤，问 A、B 两种产品各应生产多少获利最大？

分析　设 A、B 两种产品分别生产 x_1 单位与 x_2 单位。x_1 与 x_2 受到一些条件的限制。首先，他们不能取负值，即它们必须满足

$$x_1 \geqslant 0 \quad 与 \quad x_2 \geqslant 0 \tag{1.1}$$

其次，根据题设，甲、乙、丙三种原料的消耗数量将分别为 $9x_1+4x_2$、$3x_1+10x_2$ 与 $4x_1+5x_2$ 公斤，自然它们不能超过

库存数量，所以它们又必须满足

$$\left.\begin{aligned}9x_1+4x_2&\leqslant 360\\3x_1+10x_2&\leqslant 300\\4x_1+5x_2&\leqslant 200\end{aligned}\right\}\qquad(1.2)$$

(1.1)与（1.2）就是变量 x_1 与 x_2 受到的全部限制，用数学的语言来说，就是它们必须满足的全部约束条件．又我们的问题是以利润最大作为目标，而在 A、B 这两种产品的产量分别为 x_1 与 x_2 单位时，利润（目标函数）为

$$7x_1+12x_2\qquad\text{(单位：百元)}\qquad(1.3)$$

所以需要解决的问题就是：要从满足（1.1）与（1.2）的全体可能的实数对（x_1，x_2）中，找出使（1.3）达到最大值的一对（x_1，x_2）来．

例 2　下料问题．要用一批长度为 4m 的圆钢，下长度为698mm的零件4000个和 518mm 的零件3600个．问应如何下料使消耗的圆钢为最少？

分析　如果一根圆钢按长度可以下出 698mm 的零件 k 个与 518mm的零件 l 个(也即 $698k+518l\leqslant$圆钢的长度)，就用〔k,l〕表示这种下料方式．于是 4m 长的圆钢可有

〔5,0〕，〔4,2〕，〔3,3〕，〔2,5〕，〔1,6〕，〔0,7〕

等六种下料方式．现在用 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6分别表示按这六种方式下料的圆钢根数，于是一共可以得到

$$5x_1+4x_2+3x_3+2x_4+x_5$$

个 698mm长的零件与

$$2x_2+3x_3+5x_4+6x_5+7x_6$$

个 518mm长的零件．因此根据问题要求，x_1，x_2，…，x_6

受到

$$5x_1+4x_2+3x_3+2x_4+x_5\geqslant 4000 \tag{1.4}$$

与

$$2x_2+3x_3+5x_4+6x_5+7x_6\geqslant 3600 \tag{1.5}$$

的限制；又它们还应满足

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0,\quad x_4\geqslant 0,\quad x_5\geqslant 0,\quad x_6\geqslant 0 \tag{1.6}$$

并且都是整数。

现在以圆钢消耗的根数

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \tag{1.7}$$

为目标，于是问题就变成：要从满足(1.4)、(1.5)、(1.6)的全体可能的整数组（x_1，x_2，…，x_6）中，找出一组使（1.7）达到最小值的（x_1，x_2，…，x_6）来。

例 3 配料问题．假设甲、乙两种肥料每斤的价格以及所含磷、氮、钾三种元素的成分由下表给出：

	磷	氮	钾	单 价
甲	0.03	0.07	0.12	0.04
乙	0.11	0.02	0.08	0.10

现在需要磷、氮、钾分别至少为21、28、36斤，问甲、乙两种肥料各需多少才能满足这个要求，同时成本最低？

分析 如果用 x_1 与 x_2 分别表示这两种肥料的数量，自然

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0 \tag{1.8}$$

又据题意应当有

$$\left.\begin{aligned}0.03x_1+0.11x_2\geqslant 21\\0.07x_1+0.02x_2\geqslant 28\\0.12x_1+0.08x_2\geqslant 36\end{aligned}\right\}\tag{1.9}$$

而 x_1 斤肥料甲与x_2 斤肥料乙的价格为

$$0.04x_1+0.1x_2\tag{1.10}$$

所以这个问题的数学模型是：在（1.8）与（1.9）的约束限制下，求出使（1.10）达到最小的实数对(x_1, x_2)来。

例 4 运输问题．假设在 A_1、A_2、A_3三地分别有矿石 8万吨、12万吨与10万吨，现在要将这些矿石运往 B_1、B_2、B_3、B_4 四处，而这四处的需要量分别是 7万吨、9万吨、12万吨与2万吨．又设从A_1 运每万吨矿石至 B_1、B_2、B_3、B_4处的运价为10、9、4、6千元，而从 A_2 运每万吨矿石至这四处的运价为2、7、5、5千元，又从 A_3 起运的运价为2.5、10、3、8千元．问应如何组织运输才能使总的运输费用为最小？

分析 用 $x_{ij}(i=1, 2, 3; j=1, 2, 3, 4)$表示从$A_i$运往 B_j 处的矿石数量（单位：万吨），因此 $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}$表示从 A_1 运往 B_1、B_2、B_3、B_4 的矿石总数，它应当等于 A_1 处的矿石数量8万吨，所以

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=8\tag{1.11}$$

类似地可有

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=12\tag{1.12}$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=10\tag{1.13}$$

又 $x_{11}+x_{21}+x_{31}$ 表示从 A_1、A_2、A_3 发往 B_1 处的矿

石总数，它应当等于B_1处的需要数量7万吨，所以

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=7 \tag{1.14}$$

类似地可有

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=9 \tag{1.15}$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=12 \tag{1.16}$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=2 \tag{1.17}$$

最后所有的 x_{ij} 都不能取负值，即

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{1.18}$$

所以现在的问题是，在（1.11）至（1.18）这些约束的限制下，求出一组使总的运输费用

$$\begin{aligned}10x_{11}+9x_{12}+4x_{13}+6x_{14}+2x_{21}+7x_{22}+5x_{23}\\+5x_{24}+2.5x_{31}+10x_{32}+3x_{33}+8x_{34}\end{aligned} \tag{1.19}$$

达到最小的实数组

$$(x_{11},\ \cdots,x_{14},x_{21}\cdots,x_{24},x_{31},\ \cdots,x_{34})$$

来。

在例4中，因为在发点A_1、A_2、A_3处的矿石总数正好等于收点B_1、B_2、B_3、B_4处的矿石总需要量，这样一类问题称为收发平衡型的运输问题。当然也有总存货量多于总需要量或总存货量少于总需要量的收发不平衡型运输问题。关于运输问题的求解，见第六章。

可以举的例子很多，由于篇幅的限制，就不一一列举了。

所有上面四个例子，都是在变量受到某些约束条件的限制下，求使某个目标函数达到最小（或最大）值的变量组。这类问题称为条件极值问题或数学规划问题。在后文中，常用

n 维列向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$表示变量组*，它代表$n$ 维实空间R^n中的一点．数学规划中的约束条件常常表现为一些等式

$$h_1(\boldsymbol{x})=0,\ h_2(\boldsymbol{x})=0,\cdots,h_m(\boldsymbol{x})=0 \qquad (1.20)$$

与一些不等式

$$g_1(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\ g_2(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\cdots,g_q(\boldsymbol{x})\geqslant 0 \qquad (1.21)$$

这里 $g_i(\boldsymbol{x})$与 $h_j(x)$都是变向量 x的函数，m与 q则是非负整数．例如在例 1 中 $n=2$，$m=0,q=5$，$g_1(\boldsymbol{x})=x_1$，$g_2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}_2$，$g_3(\boldsymbol{x})=360-9x_1-4x_2$，$g_4(\boldsymbol{x})=300-3x_1-10x_2$，$g_5(\boldsymbol{x})=200-4x_1-5x_2$，等等．

用 $X\subset R^n$ 表示 n维实空间中由（1.20）与（1.21）所确定的区域，也即

$$\begin{aligned}\mathbf{X}=\{\boldsymbol{x}|\ \boldsymbol{x}\in R^n,\ h_j(\boldsymbol{x})=0\ \ (j=1,\cdots,\ m),\\ g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0\ \ (i=1,\cdots,q)\}\end{aligned} \qquad (1.22)$$

而用 $f(\boldsymbol{x})$表示目标函数，那末数学规划问题就可以写成

$$\min_{x\in X} f(\boldsymbol{x}) \qquad 或\max_{x\in X} f(\boldsymbol{x}) \qquad (1.23)$$

的形式，这里 min与 max的意义是最小化与最大化．X 中的点，或者说满足（1.20）与（1.21）的变向量$\boldsymbol{x}$ 称为数学规划（1.23)的可行解，X称为可行集．又使目标函数$f(\boldsymbol{x})$达到最优值的那些可行解称为数学规划的最优解．

数学规划可依变量划分为整数规划与实型规划．如果变向量 $\boldsymbol{x}$ 可以取为满足（1.20）、（1.21）的任何实向量，就称规划为实型规划，前面的例 1、例 3 与例 4 都是实型规划；如果变向量$\boldsymbol{x}$ 只能取为满足（1.20）与（1.21）的整数

* 今后常用T表示向量或矩阵的转置运算．

向量，则称规划为**整数型规划**，前面的例 2 就是一个整数规划。除了整数型的和实型的以外，自然还有介于它们两者之间的、部分变量限定取整数值而其他变量不受此限制的混合型规划。

数学规划还可依函数是否全为线性（一次）而分为线性规划与非线性规划。如果 $f(x)$与 $g_j(x)$ $(j=1, \cdots, q)$ 与 $h_i(x)$ $(i=1,\cdots,m)$都是x 的线性函数，就称规划为**线性规划**，否则只要有一个函数为非线性的都称为**非线性规划**。容易看到，上面的例 1 至例 4 中的规划都是线性的。

目前，实型线性规划的理论与解法都已比较成熟。本书只准备介绍实型线性规划的基本理论与一些常用解法。

因为

$$\max f(x) = -\min(-f(x))$$

所以实型线性规划（以下简称线性规划）的最一般形式是

$$\min_{x\in X} \boldsymbol{c}^T x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1.24}$$

这里 $\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_n)^T$是一 n维列向量

$$X=\{x|\ x\in R^n,\ \boldsymbol{a}_i^T x=b_i\ (i=1,\cdots,\ m),$$
$$\boldsymbol{a}_i^T x\geqslant b_i\ (i=m+1,\cdots,m+q) \tag{1.25}$$

$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\ \boldsymbol{a}_{m+q}$ 是 $m+q$个系数向量，$b_1,\cdots,\ b_{m+q}$ 则是 $m+q$ 个实数。

第二章　线性规划的基本定理

§1　例1的几何解法

在上一章的四个例子中，例 1 与例 3 都只有两个变量，因此能用平面上的几何图形表示．现在我们研究例 1，希望由此能对整个线性规划的理论与解法有所启示．

在前一章中，已经说明可将例 1 中的具体问题化成线性规划

$$\max_{x\in X}\ 7x_1+12x_2 \tag{1.1}$$

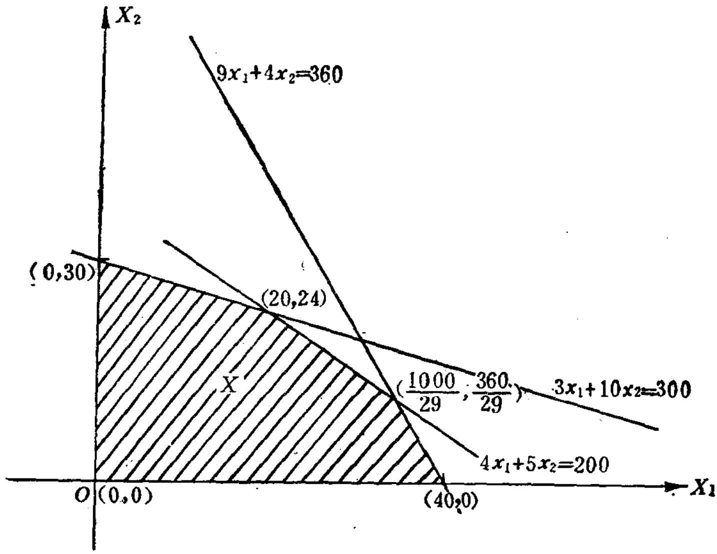
其中 X 是可行集，也即

$$\begin{aligned} X=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^T|\ &9x_1+4x_2\leqslant 360,\\ &3x_1+10x_2\leqslant 300,\ 4x_1+5x_2\leqslant 200,\\ &x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\} \end{aligned} \tag{1.2}$$

因为 x_1 与 x_2 在这些不等式中的出现都是线性的，所以每一个这样的不等式都代表一个闭半平面．例如 $x_1\geqslant 0$ 代表右半平面，$x_2\geqslant 0$ 代表上半平面，而 $9x_1+4x_2\leqslant 360$ 则代表位于直线 $9x_1+4x_2=360$ 左下方（也包括整根直线）的半个平面等等．这五个闭半平面的交集就是可行集 X．从下图中可以看到：X 就是平面上以(0,0)、(40,0)、$\left(\frac{1000}{29},\ \frac{360}{29}\right)$、

(20, 24)与(0, 30)为顶点的、包括各个边线的闭凸多边形，也即图中有阴影的区域. 对于这个闭凸多边形X的每一点(x_1, x_2)，目标函数

$$7x_1+12x_2 \tag{1.3}$$



有一数值与之相应. 所以要解线性规划 (1.1)，就是要从这个多边形的无穷多个点中， 找出一个能使目标函数 (1.3) 达到最大值的点来. 问题的几何解释就是如此.

显然，位于直线

$$7x_1+12x_2=r \tag{1.4}$$

上的每一点 (x_1, x_2)都对应到相同的目标函数值r，于是问题又变为：要从(1.4) 所代表的一族平行直线中，找出一条既与多边形区域X相交又有最大常数项 r的直线，该直线与

X的每一个交点都使目标函数（1.3）取得可能的最大值。

现在观察图形．先让 r取任何负值，这时直线（1.4）与X不相交；当 r由负值增大到0时，直线（1.4）与多边形区域有唯一的交点，即多边形的一个顶点（0,0）；当r再由0增大时，直线与X的相交部分为一线段；而当 r增至428时，又只有一个交点，即X的另一顶点（20,24）；当 r超过428时，直线（1.4）与 X又不再相交．据此，可以得出结论，顶点（20,24）就是 X中使目标函数取得最大值428的点．回到原来的实际问题，生产A产品20单位与 B产品24单位时获利最大，利润为 42800元．至此，例1已经通过几何图形得到了解答．

这个例题之所以能够通过平面几何图形获得解答，是因为它只含两个变量．对于有多个变量的线性规划，尽管不能象例1那样通过平面几何图形求解，但在本质上却没有什么不同之处．一个有两个变量的线性不等式代表平面上的一个半平面；有三个变量的线性不等式则代表三维空间中的一个半空间．在多于三个变量时，虽然超出了普通几何的范围，但可以把$n(\geqslant 4)$维空间R^n想象成“超空间”，一个有n个变量的线性不等式代表R^n中的一个半超空间．作为半平面、半空间与半超空间的交集，可行集X在 $n=2$ 时是一个有界或无界的凸多边形（例1中的X是一有界的凸多边形，但X也可以是无界的，例如 $X=\{x|\ x\in R^2,\ x_1\geqslant 0,\ \ x_2\geqslant 0\}$ 就是）；在 $n=3$ 时是一有界或无界的凸多面体；而对一般的n，也应是一“凸集”， 我们称之为多胞形，它可以是有界的，也可以是无界的．在例1中，最优解恰巧是凸多边形X

的一个顶点，这并非出于偶然，而是线性规划的一个特征性质。以后将要说明：对于任何线性规划，只要存在最优解，那末一定有可行集X的一个“顶点”是线性规划的最优解（当然，也可以有“非顶点”的线性规划最优解存在）。一般来说，可行集R中点的个数无限，但它的“顶点”个数却是有限的。因此，如果满足于求得一个最优解，那末根据线性规划的上述特征性质，可使最优解的寻找范围从X的无数个点缩减为它的有限多个“顶点”，从而大大降低了问题的困难程度。

§2 凸集，凸多胞形，顶点

为了今后研究一般的、有n个变量的线性规划，在这一节中，先对一些在平面或空间图形中十分简单、直觉的几何概念加以抽象化，给予严格的数学定义。我们将借助于代数的语言，以向量、矩阵作为工具。

从现在开始，如无特殊说明，常用n表示自然数。讲到向量常指n维的，即有n个分量的实列向量。我们将用黑体的小写英文字母来表示向量，用带下标的非黑体小写英文字母表示向量的分量，用小写希腊字母表示标量。

定义1 设 $\bar{\mathbf{x}}$ 与 $\mathbf{s}(\neq\mathbf{0})$为两个向量*．称

$$\bar{\mathbf{x}}+\alpha\mathbf{s} \qquad (-\infty<\alpha<+\infty)$$

为通过$\bar{\mathbf{x}}$的、以$\mathbf{s}$为方向的直线；称

* 我们用黑体的小写字母$\mathbf{0}$表示分量全等于0的零向量。