工程数学 工程数学 工程数学 工程数学 工程数学

线性代数与常微分方程

高等学校教学用书

叶显驰 编 浙江大学出版社

ZUP

内 容 简 介

本书将线性代数与常微分方程二方面的内容有机结合，互相渗透，具有特色，取材适当，学时节省，便于教学。内容包含：微分方程的初等积分法，矩阵和行列式，线性空间及线性方程组，线性微分方程，线性变换与二次型，线性微分方程组，定性和稳定性初步等。每章配有适量习题，书末附有习题答案。

本书适用于工科本科各专业线性代数与(或)常微分方程课程的教材，特别适用于自动控制类、电类各专业，也可作为成人高校的教学用书。

线性代数与常微分方程
叶显驰 编
责任编辑 朱谨凖

浙江大学出版社出版
上虞汤浦印刷厂排版
肖山东湘印刷厂印刷
浙江省新华书店发行

开本 850×1168 1/32 印张 13.25 337千
1989年4月第1版 1989年4月第1次印刷
印数 1—3000
ISBN 7—308—00140-7
O.029 〔塑〕 定价：3.35元

前　　言

“线性代数与常微分方程”在讲义的基础上编写而成，可作为工科二年级大学生数学用书，特别适用于控制类专业。它是常微分方程、线性代数二门课程教改的尝试，把这二门课程有机地结合为一门课程。

本教材的特点是首先解决了二门课程传统讲法的脱节现象，把二者互相渗透，达到针对性强、目的性明确，特别是用线性代数理论和矩阵分析工具能够更方便、更深入地讨论微分方程(组)，用齐次线性微分方程(组)解集合作为线性空间的例子，并且揭示线性系统所具有的共性。其次处理了线性代数抽象性、理论性强，而微分方程方法性多的学习上不协调性，教材一方面有足够的理论深度，另一方面尽可能由浅入深，句子通俗，便于自学；同时加强了与工程技术联系较多的内容，例如微分方程数学模型的建立、线性化处理、矩阵指数函数、状态方程的几种解法、凯莱—哈密顿(Cayley—Hamilton)定理等，这样既有代数抽象性，又有微分方程方法性，既不枯燥，又有趣味，具有工程数学的特点。第三，这样安排的教材，内容比二门课增多了，但所需学时反而减少。

全书共七章，介绍微分方程初等积分法，矩阵和行列式，线性空间及线性方程组，线性微分方程，线性变换及二次型，线性微分方程组，定性和稳定性理论初步等，每章配有一定数量的题目，书末附有答案。

本教材每周4学时，一个学期学完，考虑到不同类型专业的不同需要，书中打“*”部分的内容，视具体情况及教学时数，可以略去。本书还适合于电视大学、业余大学的学生及工程技术人员自

学与进修之用。

限于水平，书中一定有不少缺点和错误，希望读者批评指正。

叶 显 驰

1988年10月

目　录

第一章　微分方程的初等积分法

§1　微分方程的基本概念

在研究自然现象和工程技术时，常常要找出变量之间的函数关系。但在某些运动过程中，往往不能直接找到反映运动规律的量与量之间的关系，却比较容易建立这些变量和它们导数(或微分)之间的关系，这种联系着自变量、因变量(未知函数)及因变量的导数(或变量的微分)的方程式，称为**微分方程**。微分方程描述动态过程，例如电路瞬时过程、温度瞬时过程、振动问题以及细菌繁殖等问题。微分方程是解决许多力学、物理问题的有力工具。此外，在自动控制中也有广泛的应用。

微分方程的例子：

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_0),$$

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x),$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\nu^2)y=0\quad(\text{Bessel 方程}),$$

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x),$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\quad(\text{弦振动方程}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (热传导方程),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (Laplace\ 方程).$$

在微分方程中，若未知函数只与一个自变量有关，则称为**常微分方程**；若未知函数与几个自变量有关(出现未知函数对自变量的偏导数)，则称为**偏微分方程**。上述微分方程中前面四个是常微分方程，后面三个是偏微方程。因为偏微分方程物理背景很强，因此常常把这种类型的方程称为**数学物理方程**。本书仅讨论常微分方程，为了方便起见以后把常微分方程简称为微分方程、或方程。

下面先介绍几个实例的数学模型，说明怎样从实际问题列出微分方程，例子虽然简单，但从中能简明地诱导出微分方程的一些基本概念，成为进一步探讨其他较复杂问题的借鉴，掌握好这些例子，将有助于增进分析问题的能力。

例 1　自由落体　设有质量为 m 的物体，在离地面 s_0 处只受重力作用而自由降落，不计空气阻力，求物体运动规律。

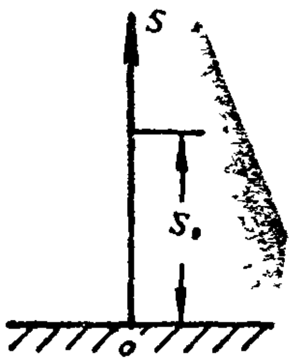

图 1-1

解　建立方程　设物体降落的铅垂线为 s 轴，原点为地面，正向朝上(如图 1-1)；并设时刻 t 时，物体位于 $s=s(t)$ 处，在运动过程中，物体只受重力 $F=-mg$ 的作用，这里的负号是因为重力方向向下，与坐标轴正向(向上)相反之故，g 是重力加速度，由牛顿第二定律：

$$F=ma,$$

其中 a 是物体的运动加速度。若用二阶导数 $\frac{d^2s}{dt^2}$ 表示，于是有

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg,$$

即
$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g, \tag{1.1}$$

这是一个简单微分方程。s 除了满足方程（1.1）外，还与初始状态，即物体在初始时刻（$t=0$）的位置和初速度有关，称初始状态

$$s\Big|_{t=0}=s_0,\qquad \frac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=v_0 \tag{1.2}$$

为初始条件。

这就把自由落体问题化为从微分方程(1.1)和初始条件(1.2)中求解未知函数 $s=s(t)$ 的数学问题了。

解方程　把(1.1)化为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=-g,$$

二边乘以 dt，得

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)=-gdt,$$

积分得
$$\frac{ds}{dt}=-gt+C_1, \tag{1.3}$$

二边再乘以 dt，然后积分得

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{1.4}$$

其中 C_1,C_2 为任意常数。(1.4) 式显然满足微分方程（1.1），但(1.4)包含二个任意常数 C_1、C_2，这说明运动状态还没有最后确定。用初始条件(1.2)代入(1.3)，(1.4) 得 $C_1=\frac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=v_0$，$C_2=s\Big|_{t=0}=s_0$，就最后确定了物体的运动规律为

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0. \tag{1.5}$$

若 C_1、C_2 没有确定，它描绘的是在各种不同初始条件下的自由落体的共同规律。

必须注意，在图 1-1 的坐标中，若物体以某种速度向上抛，则 $v_0>0$；若垂直向下抛，则 $v_0<0$。

倘若研究的不是自由落体，而是空气对落体有一个正比于速度的阻力的阻尼下落，则作用于物体上的总力是 $-mg-k\frac{ds}{dt}$，这时可得落体运动的微分方程为

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg-k\frac{ds}{dt}\quad (\text{常数 } k>0),$$

或

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g-c\frac{ds}{dt}\quad \left(c=\frac{k}{m}\right).$$

例 2　冷却问题　设有温度为 T_0 的物体放置在温度为 $\tau(\tau<T_0)$ 的空气中，由实验知道，物体温度的变化率与当时物体温度和空气温度之差成正比，比例常数 k 由实验测定，并称为牛顿冷却定律。设空气温度不变，求物体温度 T 与时间 t 的函数关系。

解　建立方程　设在时刻 t 时物体温度为 T，按题意有

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-\tau)\quad (k>0),\tag{1.6}$$

方程右端负号是因为物体的温度随时间增加而减少。初始条件为

$$T|_{t=0}=T_0.\tag{1.7}$$

这就把冷却问题化为从微分方程(1.6)和初始条件(1.7)中求解未知函数 $T=T(t)$ 的数学问题了。

解方程　把(1.6)中的变量分离，使等号的一端仅含有 T 和 dT，等号的另一端仅含有 t 和 dt，得

$$\frac{dT}{T-\tau}=-kdt,$$

积分得
$$\ln(T-\tau)=-kt+C_1,$$
这里 C_1 是任意常数。解得
$$T=\tau+e^{-kt+c_1}=\tau+Ce^{-kt}\quad(C=e^{c_1}),\tag{1.8}$$
以初始条件 (1.7) 代入，得 $C=T_0-\tau$，于是得到满足初始条件(1.7)的解为
$$T=\tau+(T_0-\tau)e^{-kt}.\tag{1.9}$$
由于(1.8) 式中的 C 没有确定，因而它描绘的是在各种初始温度下的共同规律，包含着无穷多个函数。

(1.9)式的函数关系可用图 1-2 的曲线表示，这种图形往往使实际工作者更便于简明直观地了解物理量之间的关系，并便于分析它们变化的趋势。

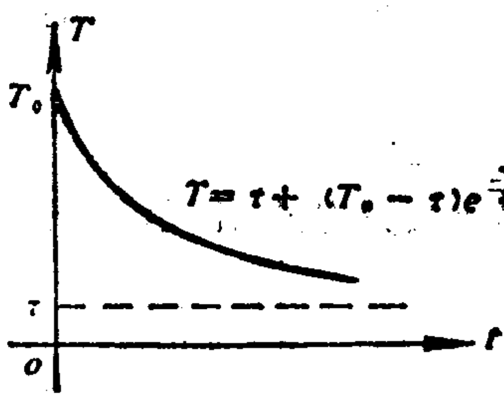

图 1-2

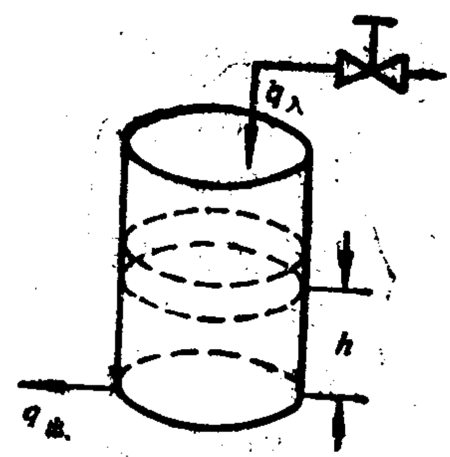

图 1-3

例 3 液位问题 设有一个圆柱形中间储槽，成品以 $q_入$米^3/时的流量流入，从槽的底部的管子流出，流出的流量是靠槽内的压头压出，如图 1-3 所示。设出口管子内径为 d 毫米，槽的直径为 D 米，开始时槽是空的，求液位 h 与时间 t 的函数关系。

解 建立方程 利用物料平衡规律，即

流入量 - 流出量 = 积累量。

设在时刻 t 时液位为 h，经过 dt 后增加了 dh，则槽内液体平衡关系是

$$(q_{入}-q_{出})dt=Adh, \tag{1.10}$$

或

$$A\frac{dh}{dt}=q_{入}-q_{出}, \tag{1.11}$$

其中 A 是槽的横截面积，即 $A=\frac{\pi}{4}D^2$；$q_{出}=CF\sqrt{2gh}$（C 是流量系数，一般取 0.6 或 0.7，F 是出口管子横截面积）。因此（1.11）可改写为

$$A\frac{dh}{dt}=q_{入}-CF\sqrt{2gh}, \tag{1.12}$$

初始条件为

$$h\Big|_{t=0}=0. \tag{1.13}$$

这就把液位问题化为从微分方程（1.12）和初始条件（1.13）中求解未知函数 $h=h(t)$ 的数学问题了。

关于此例的求解留在后面解决。

以上几个实际问题的类型都归纳为微分方程的问题，其共同点是讨论动态问题。

下面介绍一些基本概念：

微分方程中出现未知函数最高阶导数的阶称为微分方程的阶。例如例 1 的方程（1.1）是二阶，例 2、例 3 的方程（1.6）与（1.12）都是一阶，一般 n 阶微分方程具有

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \tag{1.14}$$

的形式，这里 $F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)$ 是 $x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}$ 的已知函数，而且一定含有 $\frac{d^ny}{dx^n}$；x 是自变量，y 是未知函数。

设函数 $y=y(x)$ 在 x 的某区间 I 上有直到 n 阶的导数，如果把 $y(x)$ 及其相应各阶导数代入方程（1.14）后，使方程在区间 I 上

有关于自变量 x 的恒等式，也就是说 $y(x)$ 能使微分方程

$$F\left(x,y(x),\frac{dy(x)}{dx},\cdots,\frac{d^n y(x)}{dx^n}\right)\equiv 0 \qquad x\in I$$

成为恒等式，则称 $y=y(x)$ 是微分方程(1.14)的一个**解**，区间 I 是解 $y=y(x)$ 的定义域。例如函数 $s=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 和 $s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$ 都是例 1 微分方程的解；函数 $T=\tau+Ce^{-kt}$ 和 $T=\tau+(T_0-\tau)e^{-kt}$ 都是例 2 微分方程的解。除了例 1、例 2 解的形式是显式外，也有隐式的形式，后面将看到例 3 的解就是隐式的形式。微分方程的解的图形称为**积分曲线**。

由例 1、例 2 解的表达式知道，微分方程的解有无穷多个，有的解包含一个或几个任意常数，有的解不包含任意常数，我们把含有 n 个独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的解 $y=y(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 称为 n 阶方程(1.14)的**通解**。因此一阶方程的通解包含一个任意常数，二阶方程的通解包含二个独立的任意常数。注意在通解中 n 个独立的任意常数是指不能用更少的个数来代替，例如 $y=(C_1+C_2)x$，实质上只有一个任意常数 $C=C_1+C_2$，说明 C_1、C_2 不是独立的；又如 $C_1x+C_2y+C_3=0$，若 $C_3\neq 0$，可化为

$$\frac{C_1}{C_3}x+\frac{C_2}{C_3}y+1=0$$

或写为 $C_1^*x+C_2^*y+1=0$，说明 C_1,C_2,C_3 不独立，实质上只有二个任意常数 C_1^*,C_2^*。如果微分方程(1.14)的解 $y=y(x)$ 不包含任意常数，称它为该方程的**特解**。例如 $s=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 是方程(1.1)的通解，而 $s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$ 是方程 (1.1) 的特解；同样 $T=\tau+Ce^{-kt}$ 是方程(1.6)的通解，$T=\tau+(T_0-\tau)e^{-kt}$ 是

方程(1.6)的特解。

在实际应用中,往往需要满足某种指定条件(通常称为定解条件)的解,求满足定解条件的解的问题称为**定解问题**。最常见的定解条件就是上述例子中的初始条件,我们称定解条件是初始条件的定解问题为**初值问题**,本书主要讨论初值问题。满足初始条件的解也可称为满足初始条件的特解,例 1、例 2 求出的解

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0,\quad T=\tau+(T_0-\tau)e^{-kt}$$

均是满足初始条件的特解。

一般 n 阶微分方程(1.14)的初始条件为

$$y(x_0)=y_0,\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=y_0',\quad \cdots,\quad \left.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)},\tag{1.15}$$

其中 x_0 是某个给定的初值,$y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是未知函数及到$n-1$阶导数的给定的初值。它们相应的初值问题是

$$\begin{cases}F\left(x,\ y,\ \dfrac{dy}{dx},\cdots,\dfrac{d^ny}{dx^n}\right)=0,\\ y(x_0)=y_0,\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=y_0',\cdots,\left.\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}.\end{cases}$$

利用初始条件可以从方程的通解中定出 n 个独立任意常数,从而得到满足初始条件的特解。

如果可以从一般的一阶方程 $F\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)=0$ 中解出 $\dfrac{dy}{dx}$,则方程可表示为

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y).\tag{1.16}$$

现在对通解下一个较为明确而合适的定义:在初始条件 $y|_{x=x_0}=$