

萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

幾何三大問題

克萊因 著
余介石 譯

商務印書館發行

21.6

4

128

幾何三大問題

克萊因 著
余介石 譯

算學小叢書

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

87821

編主五雲王

庫文有萬

種千一集一第

題問大三何幾

著因萊克

譯石介余

路山寶海上
館書印務商

者刷印兼行發

埠各及海上
館書印務商

所行發

版千月四年九十

B
五
六
分

GEOMETRIC PROBLEMS
By
F. KLEIN
Translated by
YU CHIA SHIH
THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930
All Rights Reserved

原 序

近代數學所闡明之精確定義及證題之嚴密方法，在高等學校 (*gymnasium*) 之教員觀之，似嫌深奧難明，過於抽象，僅宜於少數之專門學者。余嘗思有以糾正此種趨向，故樂於去夏，當人數逾常之聽衆前，作簡明之演講，論近世科學關於初等幾何作圖之研究。前此余曾於耶穌復活節之假期中，演述此講之綱要。聽衆對此，似甚有興趣，嗣由去夏所得之經驗，此種印象愈爲深入。故敢於數理教學改進社 (*Association for the Advancement of the Teaching of Mathematics and the Natural Sciences*) 在 *Göttingen* 開會之時，將諸講之論文提出。此文係暑期班中同學 *Ems* 人 *Oberlehrer Tübert* 君所記述，余并將班中其他數同學之筆記，曾經余校閱者，交彼參照引用。甚望此小冊對於會中事業之促進，有所貢獻也。

克萊因

時 1895 耶穌復活節，於 *Göttingen*。

GWT-33

譯序

克萊因 (*Felix Klein*) 教授於德國數理教學改進社在 *Göttingen* 開會時提出一文，討論古來幾何學上三大著名問題，即倍立方問題，三等分角問題，圓積問題，皆藉近代研究以明之。

此舉含有深遠之目的，即欲使大學校中數學之研究與高等學校中作業發生親切之關聯也。會中對氏諸講頗表贊同，各種教育雜誌一致推許，法意兩邦亦已有譯本，凡此皆足徵克氏之致力，為不虛矣。

本題之討論，甚為淺易，未嘗用及微積分學。其中所論之問題如下：幾何作圖，在何種情形下為可能？作法若何？何謂超性數 (*Transcendental numbers*)？證 e 及 π 為超性數之法若何？

余等深信英譯之重要，以便於不能讀原文者，故請於克氏，允可翻譯，旋得其承諾。

譯者又嘗隨意參用葛慰 (*J. Griess*) 教授之法譯

本，其間改訂，覺有可採處，則從之。

薛維德 (*Ziwei*) 教授曾於譯稿，有所修飾，且爲
任校對之勞，合併誌謝。

畢曼，施密斯。

時 1897 八月。

重譯者序

民十學制改革，混合算學教材之議以興，所以求合於學子心理發達之程序也。然而混合之義，初不僅是，試自歷史上，教材本身上觀之，皆當感覺其必要。古代算理之源，實本利用厚生之旨，埃及測量術發達，因有幾何，蓋受尼羅河每歲漲落，田地變遷之賜。然苟理智之效，僅侷促於有限範圍之經驗下，則亦將終於面壁自畫，吾國算學之不甚發達，其故亦可就此中求之。乃兩千禩前，天已鍾靈哲種，希臘人資稟卓絕，獨視算理之學，爲格物致知之準則，幾何乃由直覺之域，超入證示境界，巍然成科。大哲柏拉圖，榜其門曰，不習幾何者，不得請受業，其爲世重如此。其時代數算術均甚散漫無序，在在皆倚幾何以自見。迨至十六世紀解析幾何誕生，代數乃得報幾何前此羽翼之德焉。輒近解析之學大興，二者關係之密切乃愈著；如算學基礎之研究，乃欲納代數解析之原理於幾何形式之內，代

數解析之理，常加以幾何說明，以顯其義，而近世幾何之發達，乃在應用正負無限之觀念，射影變形之方法，皆借鏡解析之處也。本書所述之幾何上三大名題，亦其一例。規矩作圖能否問題，幾何不能自決也，必有所待；希臘人懸此疑難，數千載莫能索解，近世始克藉解析之力以否決之。讀者於此當可以算學史上，算學內容上，覘其間之息息相通，而知混合之必要歟。克氏原講之本旨，欲使大學研究與中等教育相關聯，譯者深感其詔示吾人以算學各科間之關係者，至爲深切明著，遂譯既竟，輒自忘其譾陋，志之以告讀者。

乙丑仲冬譯者謹識於東南大學。

紀念亡友廖辛初君

(重譯者誌)

目次

導言	1
上卷 代數式作圖之能否	5
第一章 可以平方根解出之代數方程式	5
1-4. 所作式 x 之結構	
5, 6. x 之範式	
7, 8. 配值	
9. 相當方程式 $F(x) = 0$	
10. 其他之有理方程式 $f(x) = 0$	
11, 12. 既約方程式 $\phi(x) = 0$	
13, 14. 既約方程式, 次數爲 2 之冪者	
第二章 德里問題及三等分角法	16
1. 以規矩解德里問題之不可能	
2. 普通方程式 $x^3 = \lambda$	
3. 以規矩三等分角之不可能	
第三章 圓之等分法	0
1. 本題之沿革	

2-4. 高斯所研究之素數	
5. 分圓方程式	
6. 高斯之輔定理	
7,8. 分圓方程式之不可約	
第四章 正十七邊形之作圖法	30
1. 本題之代數陳述	
2-4. 以諸根構成之周期	
5,6. 諸周期所滿足之方程式	
7. 尺規作圖沿革概略	
8,9. 司徒丹之正十七邊形作法	
第五章 代數作圖通論	52
1. 摺紙作圖	
2. 圓錐線	
3. 戴奧哥盧之蔓葉線	
4. 尼哥米德之蚌線	
5. 機械作法	
下卷 超性數及圓積問題	59
第一章 鄭駝證示超性數之存在法	59

1. 代數數與超性數之定義

2. 按高界以排列代數數

3. 超性數存在之證示

第二章 昔人致力於 π 之計算及作圖之經過 66

1. 經驗時期

2. 希臘之數學家

3. 1670 年至 1770 年間之近世分析

4, 5. 1770 年後嚴正批判之復興

第三章 e 之超越性 73

1. 證法綱要

2. h' 之記法及函數 $\phi(x)$

3. 韓密德定理

第四章 π 一數之超越性 82

1. 證法綱要

2. 函數 $\psi(x)$

3. 凌德明定理

4. 凌德明定理之系

5. π 之超越性

6. $y=e^x$ 之超越性	
7. $y=\sin^{-1}x$ 之超越性	
第五章 積分器及 π 之幾何作法.....	96
1. 以規矩求圓積之不可能	
2. 積分器之原理	
3. π 之幾何作法	
附錄 同餘式之重要性質	100

幾何三大問題

導 言

著者對於本講之目的，爲欲使大學中算學研究與中等學校之需要，發生密切關係。然所論之問題，立論點較高於中等學校者非爲初學者言也。但欲明本講之義，亦只須預修分析初步，例如展指數函數爲一級數諸理，於此已足矣。

吾人所論之幾何作圖，目的重在明其解法之可能與否，非欲詳及各題之如何解法。

昔賢致力最多之三問題，其興趣特厚。三題爲：

1. 倍立方問題，又稱德里問題 (*The problem of the duplication of the cube (also called the Delian problem)*).

2. 三等分角問題 (*The trisection of an arbitrary angle*),

3. 圓積問題即 π 之作法 (*The quadrature of*

a circle, i. e. the construction of π .

以上諸題，昔賢嘗欲藉尺規以解之，卒歸無效，而諸題所以著名之故，即因其解法，似有待於高等之器具也。而吾人所將證示者，即爲徒以尺規作圖，不能解決諸題也。

第三題之不能解，直至輓近始克證明。首二題則已含於近時高等代數中所述葛羅華理論 (Galois's Theory) 之內矣。

吾人首須注意實際上與理論上作圖之區別。例如欲得一圓分，以爲度量之器具，即可以屢試法爲之。就理論言，昔時已知所能（即用尺規作圖）分圓成等分之數僅爲 $2^n, 3, 5$ 以及其乘積。德人高斯 (Gauss) 推闡之，證明分法之可能，限於等分數 p 爲素數而具 $p=2^{2^h}+1$ 之狀時，此外則否。但從此等結論中，毫不能得實際上之便利；高氏推闡之功僅在於純粹理論方面。本篇所述，亦應作如是觀。

吾人之基本問題曰：就理論言，何種幾何作圖爲可能，何種爲不可能？欲嚴定‘作圖’一詞之義，當定

題中所用之器具，即

1. 用圓規與直尺，
2. 僅用圓規，
3. 僅用直尺，
4. 他種器具與尺規合用。

所奇者，凡此諸題，初等幾何學，未嘗置答。吾人不得不藉代數與高等解析之方法。於此有問題焉：如何用代數及解析之記法，以表述尺規之運用？此種新法，實為必要，因初等幾何學不若後者之有通則及布算之方法也。

在解析中有基本有理運算，即加減乘除是，在幾何上言之，此種運算可借比例之理，直接施之於二已與線段，若在乘除，只須引用一補助單位線段可矣。

更有無理運算，可分為代數與超性二種。最簡之代數運算為開平方及高次根以及解不能以方根求解之方程式，如五次及以上者。吾人知 $\sqrt{ab}$ 之作圖，一切有理運算以及無理運算之只含平方根者均易