萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

幾何三大問題

克萊因著
余介石譯

商務印書館發行

幾何三大問題

克萊因著
余介石譯

算學小叢書

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

幾何三大問題

克萊因著

余介石譯

發行兼印刷者　上海寶山路　商務印書館

發行所　上海及各埠　商務印書館

[illegible]十九年四月初版

[illegible] PROBLEMS

By

F. KLEIN

Translated by

YU CHIA SHIH

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.

Shanghai, China

1930

B五六分

原　　序

近代數學所闡明之精確定義及證題之嚴密方法，在高等學校(*gymnasium*)之教員觀之，似嫌深奧難明，過於抽象，僅宜於少數之專門學者. 余嘗思有以糾正此種趨向，故樂於去夏，當人數逾常之聽衆前，作簡明之演講，論近世科學關於初等幾何作圖之研究. 前此余曾於耶穌復活節之假期中，演述此講之綱要. 聽衆對此，似甚有興趣，嗣由去夏所得之經驗，此種印象愈爲深入. 故敢於數理教學改進社(*Association for the Advancement of the Teaching of Mathematics and the Natural Sciences*)在 *Göttingen* 開會之時，將諸講之論文提出. 此文係暑期班中同學 *Ems* 人 *Oberlehrer Tägert* 君所記述. 余并將班中其他數同學之筆記，曾經余校閱者，交彼參照引用. 甚望此小册對於會中事業之促進，有所貢獻也.　　克萊因

時 1895 耶穌復活節. 次 *Göttingen*.

譯序

克萊因(*Felix Klein*)教授於德國數理教學改進社在 *Göttingen* 開會時提出一文，討論古來幾何學上三大著名問題,卽倍立方問題,三等分角問題,圓積問題,皆藉近代研究以明之.

此舉含有深遠之目的，卽欲使大學校中數學之研究與高等學校中作業發生親切之關聯也．會中對氏諸講頗表贊同,各種教育雜誌一致推許,法意兩邦亦已有譯本,凡此皆足徵克氏之致力,爲不虛矣.

本題之討論,甚爲淺易,未嘗用及微積分學．其中所論之問題如下:幾何作圖,在何種情形下爲可能?作法若何?何謂超性數 (*Transcendental numbers*)? 證 e 及 π 爲超性數之法若何?

余等深信英譯之重要,以便於不能讀原文者,故請於克氏,允可翻譯,旋得其承諾.

譯者又嘗隨意參用葛慰(*J. Griess*)教授之法譯

本,其間改訂,覺有可採處,則從之.

薛維德(*Ziwet*)教授曾於譯稿,有所修飾,且爲任校對之勞,合併誌謝.

畢曼,施密斯.

時 1897 八月.

重譯者序

民十學制改革,混合算學教材之議以興,所以求合於學子心理發達之程序也.然而混合之義,初不僅是,試自歷史上,教材本身上觀之,皆當感覺其必要.古代算理之源,實本利用厚生之旨,埃及測量術發達,因有幾何,蓋受尼羅河每歲漲落,田地變遷之賜.然苟理智之效,僅偪促於有限範圍之經驗下,則亦將終於面壁自晝,吾國算學之不甚發達,其故亦可就此中求之.乃兩千禩前,天已鍾靈哲種,希臘人資稟卓絕,獨視算理之學,爲格物致知之準則,幾何乃由直覺之域,超入證示境界,巍然成科.大哲柏拉圖,榜其門曰,不習幾何者,不得請受業,其爲世重如此.其時代數算術均甚散漫無序,在在皆倚幾何以自見.迨至十六世紀解析幾何誕生,代數乃得報幾何前此羽翼之德焉.輓近解析之學大興,二者關係之密切乃愈著;如算學基礎之研究,乃欲納代數解析之原理於幾何形式之內,代

數解析之理,常加以幾何說明,以顯其義,而近世幾何之發達,乃在應用正負無限之觀念,射影變形之方法,皆借鏡解析之處也.本書所述之幾何上三大名題,亦其一例.規矩作圖能否問題,幾何不能自決也,必有所待;希臘人懸此疑難,數千載莫能索解,近世始克藉解析之力以否決之.讀者於此當可以就算學史上,算學內容上,覘其間之息息相通,而知混合之必要歟.克氏原講之本旨,欲使大學研究與中等教育相關聯,譯者深感其詔示吾人以算學各科間之關係者,至爲深切明著,迻譯旣竟,輒自忘其譾陋,志之以告讀者.

乙丑仲冬譯者謹識於東南大學.

紀念亡友廖辛初君

(重譯者誌)

目　　次

幾何三大問題

導　言

著者對於本講之目的，爲欲使大學中算學研究與中等學校之需要，發生密切關係．然所論之問題，立論點較高於中等學校者非爲初學者言也．但欲明本講之義，亦只須預修分析初步，例如展指數函數爲一級數諸理，於此已足矣．

吾人所論之幾何作圖，目的重在明其解法之可能與否，非欲詳及各題之如何解法．

昔賢致力最多之三問題，其興趣特厚．三題爲：

1. 倍立方問題，又稱德里問題 (*The problem of the duplication of the cube* (*also called the Delian problem*).

2. 三等分角問題 (*The trisection of an arbitrary angle*),

3. 圓積問題即 π 之作法 (*The quadrature of*

a circle, i. e. the construction of π.

以上諸題，昔賢嘗欲藉尺規以解之，卒歸無效，而諸題所以著名之故，即因其解法，似有待於高等之器具也．而吾人所將證示者，即為徒以尺規作圖，不能解決諸題也．

第三題之不能解，直至輓近始克證明．首二題則已含於近時高等代數中所述葛羅華理論（*Galoi's Theory*）之內矣．

吾人首須注意實際上與理論上作圖之區別．例如欲得一圓分，以為度量之器具，即可以屢試法為之．就理論言，昔時已知所能（即用尺規作圖）分圓成等分之數僅為 2^n, 3, 5 以及其乘積．德人高斯(*Gauss*)推闡之，證明分法之可能，限於等分數 p 為素數而具 $p=2^{2^{\mu}}+1$ 之狀時，此外則否．但從此等結論中，毫不能得實際上之便利；高氏推闡之功僅在於純粹理論方面．本篇所述，亦應作如是觀．

吾人之基本問題曰：就理論言．何種幾何作圖為可能，何種為不可能？欲嚴定'作圖'一詞之義，當定

題中所用之器具.卽

1. 用圓規與直尺,
2. 僅用圓規,
3. 僅用直尺,
4. 他種器具與尺規合用.

所奇者,凡此諸題,初等幾何學,未嘗置答.吾人不得不藉代數與高等解析之方法.於此有問題焉:如何用代數及解析之記法,以表述尺規之運用?此種新法,實爲必要,因初等幾何學不若後者之有通則及布算之方法也.

在解析中有基本有理運算,卽加減乘除是,在幾何上言之,此種運算可借比例之理,直接施之於二已與線段,若在乘除,只須引用一補助單位線段可矣.

更有無理運算,可分爲代數與超性二種.最簡之代數運算爲開平方及高次根以及解不能以方根求解之方程式,如五次及以上者.吾人知$\sqrt{ab}$之作圖,一切有理運算以及無理運算之只含平方根者均易