高等学校教学用书

# 高等代数

曹锡皞
张益敏
黄登航 编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

# 高 等 代 数

曹锡皞 张益敏 黄登航 编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

高　等　代　数

曹锡皞　张益敏　黄登航　编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
天津宝坻黎明印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：19.75　字数：485千
1987年6月第1版　　1987年6月第1次印刷
印数：1—10100

统一书号：13243·122　　定价：3.85元

# 编 委 会

# 出版说明

北京师范大学是一所具有八十多年历史的老学校．在学科建设和教学实践中积累了一定的经验，将它贯彻到教材中去无疑是有益的．为了加强教材建设，加强与兄弟院校的交流，我社约请北京师范大学数学研究所所长严士健教授等组成教材编委会，研究编写出版一套教材．编委会在研究当前科学发展的新情况和过去的教学经验的基础上，同时参照原教育部1984年颁发的中学教师进修大纲，对教材的编写宗旨和要求进行认真地讨论．组织数学系有教学经验的教师进行编写，并且由编委等分工负责对书稿进行审订．

这套教材包括数学分析、解析几何、高等代数、概率论与数理统计、常微分方程、复变函数论、抽象代数基础、高等几何、微分几何、实变函数论与泛函分析、计算方法、理论力学以及高等数学（物理、天文、无线电等专业用）．

这套教材文字通俗易懂、内容由浅入深、循序渐近，便于自学，科学系统性较强．每章有小结，每节（或几节）后配有习题．习题安排由易而难，层次清楚．书后附有习题答案或提示，以利于读者自学时检查自己的作业．

为了适应不同层次学校和人员的需要，书中有些内容加了“*”号，它相对独立，如因学时较少，可以删去．

这套教材可供高等师范院校本科生（或专科）、函授（数学专业）、在职中学教师进修、教育学院数学系等使用．

恳请读者对本教材提出宝贵的意见，以便再版时修订．

# 编 者 的 话

本书是根据我们在北师大数学系本科和函授讲授高等代数的体会，同时，参照原教育部颁发的中学教师进修高等师范专科数学专业的“高等代数”教学大纲编写的。

高等代数是数学专业的一门重要的基础课程，是中学代数的继续和提高。它的内容大致分为多项式理论和线性代数基础两部分。线性代数部分主要指线性方程组、向量空间、线性变换及二次型。

从表面上看，这个课的内容与中学联系较大，但实际讨论的内容与方法都与中学有较大的距离。它是一门理论性强，内容抽象的课程。

目前，国内已有不少高等代数的教材，本书基本内容与它们大致相同，为了适应函授教学及自学的需要，我们在编写过程中试图突出如下几点：

一、概念的引入尽量有实际背景，使读者对抽象的概念有个直观理解，并尽量注意与中学有关内容联系，使在学习本课程的过程中对中学有关内容能居高临下地掌握和理解，从而能用较高观点指导中学教学。

二、传授知识的同时，尽量注意代数方法的训练。讨论的问题尽量突出它的规范形式（或称标准形），给出可能施行的变形（或称允许变换），如行列式的标准形是三角形行列式，线性方程组的标准形是阶梯形方程组。而三角形行列式的值容易求出，阶梯形方程组的求解较一般线性方程组求解也容易得多。有限维向量空间的线性变换以及二次型的讨论，则归结为矩阵的讨论，它

仍归结为在不同的允许变换（相似变换、合同变换）下的标准形问题˙这样，使读者在掌握基本内容的同时，更多地受到代数方法的熏陶。

三、为了帮助读者在学习过程中切实掌握每一个概念，并会由概念出发，推导有关的性质，逐步养成会举出适合某些条件或不适合某些条件的例子的习惯，我们在编写过程中，在一些章节注意了这样的举例，并且在配备习题时，也有意识地注意了这一点。为了照顾读者的不同基础，配备了一些较容易的例题和习题，也有一部分较难习题，在较难习题前面加了“*”号。掌握定理的证明，是培养代数能力的一个不可忽视的方面，也应引起自学者的注意，绝不能只限于记住定理的前提和结论。

带“*”号的内容及习题，可根据实际情况处理。

在编写本书的过程中，我们主要参考了张禾瑞、郝鈵新教授所编“高等代数”一版、二版，我们得到代数教研室老师们的鼓励和支持，尤其是吴品三教授仔细阅读了书稿，提了不少宝贵意见，给了我们很多具体帮助。我们谨向他们表示衷心的谢意。

本书共分九章，第一、六、九章及第五章附录由曹锡皞执笔初稿，第二、三、四、五章由张益敏执笔初稿，第七、八章由黄登航执笔初稿，由于我们水平有限，一定存在不少缺点、错误，恳切希望读者多多指正。

编　　者

1985年10月于北京师大数学系

# 目　录

# 第一章　基本概念

高等代数作为大学基础课程之一，包括两部分内容，一部分是以解一元高次方程为主要内容的多项式理论；另一部分是线性代数，它包括线性方程组、行列式、矩阵、二次型、向量空间及线性变换等。

这些题材都是学习其它数学科目以及物理等所不可缺少的。

我们从数学中最常用的几个基本概念开始讨论，它们是集合、映射和数环与数域。这样做不仅使讨论的内容建立在严格的理论基础之上，因而使适用的范围确定，并且可使所得到的结论具有一般性。

## §1　集　合

数学中讨论的对象，除了数及代表数的文字之外，还会遇到其它对象。例如，直线上的点、平面及空间的点、未知量 $x$ 的多项式、一个方程组的解等等，这些对象都不是单个的数。为使我们的讨论范围和结论更明确，需用到集合的概念。

集合或简称为集是不定义名词，但可以给出一些解释。所谓集合就是作为整体看的一组东西或事物。比如一筐苹果，一捆信件，某教室的人等等都是集合。

集合常用大写拉丁字母表示，如 $A$，$B$，…。一集合的成员称为该集合的元素或简称为元，常用小写拉丁字母表示，如 $a$，$b$，$x$，$y$，…。

$a$ 是集合 $A$ 的元素，记作 $a\in A$，读作 $a$ 属于 $A$ 或 $A$ 包含 $a$，

也记成$A\ni a$．$b$不是$A$的元素，记成$b\notin A$，读作$b$不属于$A$或$A$不包含$b$．

所谓集合$A$是给定的或已知的，是指我们可以知道或判定$A$恰有哪些元素，即哪些元素属于$A$哪些元素不属于$A$。

如$f(x)=x^2+3x+2=0$的根的集合$A$是已知的，因$f(x)$的根为$-1$与$-2$。$A$仅由这两个数组成。

若集$A$的元只有有限个，则$A$叫做有限集。否则，$A$叫做无限集。有限集$A$的元素个数记作$|A|$。

集合有以下常用的表示法：可用列出集合的所有元素（包括利用一定的规律列出无限集）的方法来表示．如$A=\{1,2,3,4,5\}$，$N=\{1,2,3,4,\cdots\}$．前者表示$A$只含1,2,3,4,5五个元素，而后者$N$表示的是自然数集。集合也可用它的元素所具有的特征性质来刻划，它可用叙述法给出，又可用符号表示。

$B=\{x\,|\,x^2+3x-4=0\}$表示的是适合$x^2+3x-4=0$的数的集合；即方程$x^2+3x-4=0$的根的集合；

$D=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0\}$表示的是方程$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$的所有解的集合。

符号化给数学研究带来很大方便。我们将逐步引入一些符号。

命题“若$P$，则$Q$”，记成“$P\Rightarrow Q$.”即表示“如果$P$成立,那末$Q$成立.”“$P\Longleftrightarrow Q$”则表示“$P$成立当且仅当$Q$成立”；“$P$成立必要且只要$Q$成立.”

若集$A$的每个元都是$B$的元，则说$A$是$B$的一个子集，或$B$是$A$的一个扩集，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，分别读作$A$含于$B$，$B$包含$A$。这可用符号表示，即

$$“A\subseteq B”\Longleftrightarrow“\forall x\in A\Longrightarrow x\in B”,$$

符号“$\forall x$”表示对一切$x$或任意$x$．

几个常用的数集用特定记号表示。

$\boldsymbol{N}$表自然数集，$\boldsymbol{Z}$表整数集，

$n\boldsymbol{Z}=\{nk|k$为任意整数$\}$，即$n$的一切倍数集，

$\boldsymbol{Q}$表有理数集．

$\boldsymbol{R}$表实数集，

$\boldsymbol{C}$表复数集．

于是，由子集定义，$\boldsymbol{N}\subseteq\boldsymbol{Z}\subseteq\boldsymbol{Q}\subseteq\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{C}$，$n\boldsymbol{Z}\subseteq\boldsymbol{Z}$．

由子集定义，对每个集$A$，都有$A\subseteq A$．

若集$A$与$B$由完全相同的元所组成，就说$A$与$B$相等，记作$A=B$．于是

$$\text{“}A=B\text{”}\Longleftrightarrow\text{“}\forall x, x\in A\Longleftrightarrow x\in B\text{”}.$$

设$A=\{1,2,3\}$，$B$为$(x-1)(x-2)(x-3)=0$的根的集合，则$A=B$．

若$A\subseteq B$，并且存在$y\in B$，用符号表示为$\exists\, y\in B$，使$y\notin A$，则称$A$是$B$的一个**真子集**，$B$是$A$的一个**真扩集**，记作$A\subsetneqq B$．

例如，$\boldsymbol{R}\subsetneqq\boldsymbol{C}$．因为$\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{C}$，且有$i\in\boldsymbol{C}$，$i\notin\boldsymbol{R}$．

由集合包含的定义，还容易证明：

$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，$\Longrightarrow A\subseteq C$，（传递性）

$A\subseteq B$且$B\subseteq A\Longrightarrow A=B$．（反对称性）

于是，连同前面的$A\subseteq A$（称为反身性），集合的包含关系具有反身性，反对称性及传递性．

由集合$A$与集合$B$的公共元素做成的集合，称为$A$、$B$的交（集），记作$A\cap B$．

由定义，显然有$A\cap B\subseteq A$，且$A\cap B\subseteq B$．

例如，$A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{2,3,6,7\}$，$A\cap B=\{3,7\}$．

用符号表示就是

$$\text{“}x\in A\cap B\Longleftrightarrow x\in A\text{且}x\in B\text{”}.$$

由$A$的所有元素及$B$的所有元素做成的集合称为$A$，$B$的并（集），记作$A\cup B$．用符号表示就是

“$x\in A\cup B \Longleftrightarrow x\in A$或$x\in B$”.

例如，$A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{2,3,6,7\}$，则$A\cup B=\{1,2,3,5,6,7,9\}$。而$\mathbf{Z}\cup\mathbf{Q}=\mathbf{Q}$.

显然，$A\cup B\supseteq A$且$A\cup B\supseteq B$.

对于集合的交与并可用下列图形来示意，阴影部分分别表示$A\cap B$及$A\cup B$.

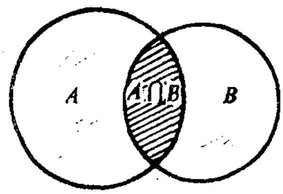



图1.1

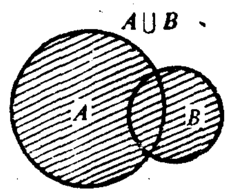



图1.2

两个集合未必有公共元素．如$A=\{1,2\}$，$B=\{0\}$，则$A\cap B$不含任何元素．但是，为了说话方便，我们就说$A\cap B$是空集．一般，不含任何元素的集合称为空集，用符号$\varnothing$表示．于是$A\cap B=\varnothing$.

又如$x^2+1=0$的实根的集合也是空集$\varnothing$.

须注意$\varnothing$与$\{0\}$的区别．$\{0\}$表示只有一个元0的集，而$\varnothing$表示不含任何元的集．如$A=\{1,2\}$，$B=\{0\}$，$C=\{0,3\}$，则$B\cap C=\{0\}$，但$A\cap C=A\cap B=\varnothing$.

我们约定，空集$\varnothing$是任何集合的子集．

这样，对于任二集合$A$、$B$，我们总可讨论$A\cap B$及$A\cup B$，它们都是唯一确定的集合．这如同数的乘法和加法运算，即任二数的积及和都是唯一确定的数．集合的交、并适合以下算律：

$A\cap B=B\cap A$；　　$A\cup B=B\cup A$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

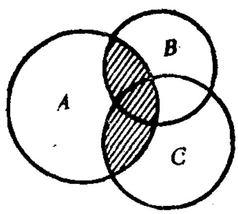
$$A\cap(A\cup B)=A;\qquad A\cup(A\cap B)=A;$$

$$A\cup\varnothing=A;\qquad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

这些算律有的与熟知的数运算中的算律完全相似，有的则完全不同。

这些算律中，等式两端所表示的集合其意义并不相同，因此必须证明其真实性。要证集合相等，只能从定义出发，去证明它们互相包含。画出图形，借助直观可以帮助我们理解，但不能代替证明。我们只证明下式作为例子：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$




**证** 设$x\in A\cap(B\cup C)$，则$x\in A$且$x\in(B\cup C)$，于是$x\in A$且$x\in B$或$x\in C$。当$x\in A$且$x\in B$，则$x\in A\cap B$；当$x\in A$且$x\in C$，则$x\in A\cap C$。这样，不论哪种情况，$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，于是$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

反之，$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则$x\in A\cap B$或$x\in A\cap C$。于是$x\in A$且$x\in B$或者$x\in A$且$x\in C$，但$B\subseteq B\cup C$，$C\subseteq B\cup C$，因而$x\in A\cap(B\cup C)$，于是$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$。

这样，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

两个集合的交与并的概念可以推广到任意有限个集合上去。设$A_1, A_2, \cdots, A_n$都是集合。由$A_1, A_2\cdots, A_n$的所有公共元素做成的集合称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$的交，记作$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$。由$A_1, A_2, \cdots, A_n$的所有元素作成的集合叫做$A_1, A_2, \cdots, A_n$的并，记作$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$。用符号表示，就是

$$x\in A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\Longleftrightarrow x\in A_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;$$

$$x\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\Longleftrightarrow x\in \text{某个}A_i,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

最后介绍二集合的积—卡氏积的概念。

设$A$，$B$是二集合。

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$$

称为$A$，$B$的积（卡氏积）。即$A\times B$表示一切有序对$(a,b)$的集合，其中$a\in A$，$b\in B$。

例如，$A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,0,3\}$，则

$A\times B=\{(0,1),(0,0),(0,3),(1,1)(1,0),(1,3)(2,1),(2,0),(2,3)\}$。

须注意，一般$A\times B$与$B\times A$是不同的。

卡氏积并不是新东西。平面上取定坐标系后，点的坐标是有序实数对$(x,y)$。于是，平面上的点的坐标集就是$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\boldsymbol{R}\}$。

## 习　　题

1．写出集$\{1,2,3\}$的所有子集。

2．设$A$是含$n$个元的集。$A$中含$k$（$k\leqslant n$）个元的子集共有多少个？$A$的子集共有多少个？

3．$2\mathbf{Z}\cap 3\mathbf{Z}=$？ $2\mathbf{Z}\cup 3\mathbf{Z}=$？检验你的结论。这里$2\mathbf{Z}=\{2n\mid n\in\mathbf{Z}\}$，$3\mathbf{Z}=\{3n\mid n\in\mathbf{Z}\}$。

4．填空并检验你的结论：

$A\subsetneqq B\Longleftrightarrow$？　$x\notin A\cap B\Longleftrightarrow$？　$x\notin A\cup B\Longleftrightarrow$？

5．证明（i）$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

（ii）$A\cap(A\cup B)=A$；$A\cup(A\cap B)=A$。

6．判断对错，改正错的结论并举出反例：

（1）$x\in A\cup B$，且$x\notin A$，$\Longrightarrow x\in B$；

（2）$x\in A$或$x\in B\Longrightarrow x\in A\cap B$；

(3) $x \notin A \cap B \Longrightarrow x \notin A$且$x \notin B$;

(4) $x \notin A \cup B \Longleftrightarrow x \notin A$且$x \notin B$.

## §2 映　射

映射是数学中最基本最常用的概念之一。映射使两个集合的元素之间建立某种对应关系，即映射联系了两个集合，使它们的元素之间建立起某种对应关系。

我们仅讨论映射的一些基本性质。

日常生活中也经常用到映射的概念，只是没有明确出来。电影院或剧院使用对号入座的方法，就是持票者集合与座位集合间的对应规则。最本质的东西是每个持票者有唯一确定的座位。

函数是个基本概念。如$f(x)=x^2+1$是定义域为实数集而值域为大于等于1的实数集的一个函数，这里$f$也是个法则，即$f$是定义域中的元素$x$与值域中的元素间的对应规则，最本质的东西也是每个实数$x$有唯一确定的正实数$x^2+1$和它对应。

撇开两个例子的具体内容，只着眼于两个集合的元素之间的对应关系，就得到映射的概念。

**定义1**　设$A$，$B$是二非空集合。$A$到$B$的一个映射指的是一个对应法则，对$A$中每个元素$x$，通过这个法则，都有$B$中唯一确定的元素$y$与$x$相对应。

常用$f$，$g$，$h$，…表示映射。如果$f$是$A$到$B$的一个映射，常写成

$$f: A \longrightarrow B.$$

如果$A$中的元素$x$通过映射$f$有$B$中的元素$y$与$x$对应，那么就写成

$$f: x \longmapsto y.$$

此时，$y$称为$x$在$f$之下的象，也记成$y=f(x)$；而$x$称为元素$y$