目　录

第一章　概　　论

本章首先介绍边界元法的基本概念及发展概况，以 Laplace 方程的定解问题为例介绍边界元法的基本思路，使读者对边界元法有一个概略的了解；本章的另一个重要内容是介绍边界元法有关的数学基础知识.

§1.1　边界元法的基本概念及其发展概况

一、基本概念

在科学与工程领域中常常碰到一些偏微分方程或方程组的定解问题. 具体地说，将物理，力学，工程等领域中的一些问题进行抽象，得到这些问题的普遍规律——微分或偏微分方程组，求它们在一定边界、一定初始条件下方程的解析解，讨论其通解或某些特解的特性，这是数学物理方程课程的任务. 由于大多数科学研究和工程问题都是比较复杂的，能够求得解析解的问题只限于少数的经典问题，电子计算机的出现给这类复杂问题提供了求解近似解和数值解的可能性，为此出现了许多的数值解法. 一般来说，有两大类数值解法，即域法和边界法，有的书上把前者称为微分型法而后者称为积分型法[1]. 域法中常用的有 FDM 和 FEM，即有限差分法和有限元法. FDM 是用一组域内节点相关联的代数方程组代替微分方程组，用有限差分代替微分的一种近似解法. FEM 是以有限子域或单元代替整个域，并用与单元节点有关的插值函数来描绘单元内部特性，从而将整个域的微分方程变换成与节点未知量相关连的代数方程组，求解此代数方程组得到离散型的近似数值解. 新发展起来的一种解偏微分方程定解问题的数值计算方法——边界元法——利用 Galerkin 加权余数法把定解问题变成积分方程[2]，更为严密的可从变分求泛函极值出发求积分方程或更为直接地从 Green 定理出发，利用各种型式的 Green 公式将包含域内及边界积分的方程变成边界积分方程[3,4]. 用类似于有限元法的离散化技术将边界离散化，以与边界节点相关连的代数方程组代替边界积分方程，解出边界上的所有未知量，再按边界上的物理量与域内点的物理量之间的关系式，求出域内任意一点的未知量.

二、方法概要

以位势问题二维 Laplace 方程为例，给出方程的基本公式、解题步骤如下：

考虑一个具有光滑简单边界 Γ 的域 Ω，确定近似函数 $u(\bar{x})$，它在域中满足 Laplace 方程，边界上满足给定的边界条件，即

$$\nabla^2 u(\bar{x}) = 0,\ \bar{x} \in \Omega \tag{1.1.1}$$

$$u(\bar{x}) = \bar{u}(\bar{x}),\bar{x} \in \Gamma_1 \tag{1.1.2}$$

$$q(\bar{x}) = \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial n} = \bar{q}(\bar{x})\ ,\bar{x} \in \Gamma_2 \tag{1.1.3}$$

式中 $\nabla^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 是 Laplace 算子，$\bar{u}(\bar{x})$，$\bar{q}(\bar{x})$ 为已知，n 为边界单位外法线方向，$\Gamma = \Gamma_1 \cup$

Γ_2,$\bar{x}$ 为点的坐标.

在前面已经讲到,解决此问题的基本积分方程可从三条途径得到,即 Galerkin 加权余数法、直接由 Green 定理或从泛函变分求极值的方法. 这里用前两种方法,第三种方法可参考[3].

按 Galerkin 加权余数法(即试函数 u 与权函数 w 选用统一函数),由基本方程及边界条件在加权上得到满足,可列出下面求近似函数的基本积分方程,即

$$\int_\Omega (\nabla^2 u) w \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma \tag{1.1.4}$$

式中 w 为加权函数. 为简单起见,$u(\bar{x})$、$q(\bar{x})$ 等$\bar{x}$ 的函数以后简写为 u、q.

直接由 Green 定理写出

$$\int_\Omega (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) \mathrm{d}\Gamma \tag{1.1.5}$$

对方程(1.1.4)二次分部积分左端项,并利用 Green 公式转换其中一些域内积分为边界积分,得

$$\int_\Omega (\nabla^2 w) u \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} w \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1} q w \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma \tag{1.1.6}$$

在进行下一步计算之前我们先看一下式(1.1.5),假设要求解 u(称为试函数)在 Ω 域中满足 Laplace 方程,则式(1.1.5)变为

$$\int_\Omega (u \nabla^2 v) \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) \mathrm{d}\Gamma \tag{1.1.7}$$

若 w 与 v 选择一样的话,式(1.1.6)与(1.1.7)是等同的. 下面我们引入 u^* 代替(1.1.6)式中之加权函数 w 及式(1.1.7)中 v,u^* 是 Laplace 方程的基本解,即满足下面方程的解:

$$\nabla^2 u^*(\bar{x},\xi) + \delta(\bar{x},\xi) = 0 \tag{1.1.8}$$

u^* 代表在 ξ 点加单位点源引起的位势场,具体的 $u^*(\bar{x},\xi)$ 代表 ξ 点加单位点源引起 $\bar{x}$ 点的位势,$\delta(\bar{x},\xi)$ 为 Dirac-δ 函数,它的特征是

$$\left.\begin{aligned} &\delta(\bar{x},\xi) = 0, \bar{x} \neq \xi \\ &\int_\Omega u(\bar{x}) \delta(\bar{x},\xi) \mathrm{d}\Omega = u(\xi), \quad \xi \in \Omega \end{aligned}\right\} \tag{1.1.9}$$

简写 $\delta(\bar{x},\xi)$ 为 δ_i,其中下标 i 代表坐标为 ξ 的点即加点源之点.

利用式(1.1.8)及(1.1.9)中 $\delta(\bar{x},\xi)$ 的特性,式(1.1.6)和(1.1.7)的左端积分变为 $-u(\xi)$,记为 $-c_i u_i$,其中 c_i 为 1,式(1.1.6)可变为

$$c_i u_i + \int_{\Gamma_2} u q^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* \mathrm{d}\Gamma \tag{1.1.10}$$

式中 q^* 为 $\frac{\partial u^*}{\partial n}$. 式(1.1.10)是对应于 i 为域内点的情况. 将 i 点引向边界,经过一些数学处理,如包围边界上的源点加半径为 ε 的小半圆使 i 在域内,并使 $\varepsilon \to 0$ 求某些积分的极限,即可得到 i 点在边界上的情况(下一章中详细讨论),则对于边界 i 点有

$$\frac{1}{2} u_i + \int_{\Gamma_2} u q^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* \mathrm{d}\Gamma \tag{1.1.11}$$

可见 $c_i = \frac{1}{2}$,但必须指出它是对光滑边界情况的,非光滑边界 c_i 将另行考虑. 式(1.1.11)即为只与边界有关的边界积分方程,写成简洁的形式如下:

$$\frac{1}{2}u_i + \int_\Gamma uq^* \mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma u^* q \mathrm{d}\Gamma \tag{1.1.12}$$

式中两个积分中都包含了已知和未知的部分，$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. 显而易见，从式(1.1.7)也同样可以导出式(1.1.12).

将边界用各种单元进行离散，对单元上的每一个节点都可列出式(1.1.12). 如最简单的情况，采用常数单元，每一个单元有一个节点，则遍及所有的单元即所有节点(例如 M 个单元)列出式(1.1.12)，归并在一起，即可得一组代数方程组，实质上是把整个边界用边界单元代替，式(1.1.12)中的两个积分用各单元积分之和来代替，最后得

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^{M} \tilde{q}_{ij}^* u_j = \sum_{j=1}^{M} \tilde{u}_{ij}^* q_j = 0 \tag{1.1.13}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} \tilde{q}_{ij}^* &= h_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^*(\overline{x_j}, \overline{x_i}) \mathrm{d}\Gamma(\overline{x_j}) \\ \tilde{u}_{ij}^* &= g_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^*(\overline{x_j}, \overline{x_i}) \mathrm{d}\Gamma(\overline{x_j}) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.14}$$

式(1.1.14)中 $\overline{x_i}$ 为 i 点坐标，$\overline{x_j}$ 为 j 单元中积分点坐标，Γ_j 为 j 单元边界，j 从 $1 \sim M$ 求和意味着整个边界上积分. 在所考虑的问题中，一部分边界上 u_j 已知而 q_j 为未知，与之互补的另一部分边界上 q_j 已知 u_j 未知，将式(1.1.14)写成矩阵形式，得

$$\boldsymbol{HU} = \boldsymbol{GQ} \tag{1.1.15}$$

$\boldsymbol{H}$ 矩阵元素为 $\tilde{h}_{ij} = h_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}$；$\boldsymbol{G}$ 矩阵之元素为 g_{ij}，$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{Q}$ 向量的元素分别为 u_j、q_j；将 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{Q}$ 中已知量与未知量分开，并将 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{G}$ 矩阵相应分块及调整，最后可得下列代数方程组：

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{F} \tag{1.1.16}$$

其中

$$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} q_{uk} \\ \cdots \\ u_{uk} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -G_{ij}^1 & \vdots & H_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -H_{ij}^1 & \vdots & G_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k \\ \cdots \\ q_k \end{Bmatrix} \tag{1.1.17}$$

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{F}$ 均为已知，解代数方程组(1.1.16)，即可求出边界上的未知量，于是整个边界上 $\boldsymbol{u}_j$ 与 $\boldsymbol{q}_j$ 均为已知. 然后可按需要求域内任意点的 $\boldsymbol{u}_i$、$\boldsymbol{q}_i$，当 i 点在域内时，可用公式(1.1.10)相应的离散化公式由边界单元上已知的 $\boldsymbol{u}_j$、$\boldsymbol{q}_j$ 求出 $\boldsymbol{u}_i$、$\boldsymbol{q}_i$，只是 $\tilde{q}_{ij}^*$，$\tilde{u}_{ij}^*$ 均是内点 i 与边界点相联系的积分，因此对每一个要计算的内点均不相同.

三、边界元法发展概况

边界元法是一个既新又老的方法，其基本思想是用积分方程法求解微分方程，这种思想和方法可追溯到本世纪初. 早在 1903 年，I. Fredholm 发表了在位势问题中所碰到的积分方程的著作[5]，1905 年对积分方程进行分类并首先将其运用到弹性力学问题中. 但此后将近 40 年左右发展缓慢，仅只有少量的著作. 直到 50 年代，一批俄国学者，如 N. I. Muskhelishvili、S. C. Mikhlin、F. D. Gakhov、V. V. Ivanov 等人，发表了大量的著作，涉及积分方程法特别是奇异积分方程法的基本理论、特性及近似解等方面的内容，但是在数字计算机出现之前，尚不可能出现通用的数值解法. 60 年代开始出现了用于电算的数值解法. 70 年代出现了一批先驱著作，它们是以广泛运用计算机为特点的. 80 年代前期 BEM 的发展达到

了接近成熟的水平.

BEM这个术语，1978年首先出现在C. A. Brebbia和J. Dominguez有关位势问题的边界元法以及P. K. Banerjee和R. Butterfield的地质力学中边界元法两篇著作中[6,7]，此名称意在强调方法的边界离散化特点. 1978年C. A. Brebbia将他及他的研究小组从60年代起在边界元法方面所做的工作汇总，编写出版了《The Boundary Element Method for Engineers》一书[3]，BEM术语从此被世界同行所公认，并取代了BIEM(Boundary Intergral Eguation Method).

在边界元的理论研究上，1978年C. A. Brebbia在他的著作[2]中，首次证明了此方法可看作是Galerkin加权余数法的一种特殊情况；同时，1977年O. C. Zienkiewicz和他的同事们证明了边界元法的基本公式可以从变分原理为基础推导出来[3,8]，从而将BEM与其它数值方法FDM、FEM统一到共同的基础上，便于利用这些方法各自的优点联合起来求解一些复杂的问题.

有两种类型的边界元法，即间接法与直接法. 在间接法中积分方程是以边界上某个虚拟密度函数作为未知数，求解后不能直接得到偏微分方程边值问题的解，只能得到这个虚拟的密度函数，然后通过虚拟密度与所求物理量之间的关系间接求出问题的解，此法中的虚拟密度函数没有明显的物理意义.

在直接法中，依靠基本的积分理论建立离散化的积分方程，边界积分方程中未知量是客观存在的物理量，求解之后直接得到边界上的物理量，通过域内物理量与边界上的物理量之间的关系求得区域内的解.

1963年M. A. Jaswon首先在位势问题[9]和弹性轴的扭转问题上[10]使用了边界积分方程的间接法，并进行了电算. 在发展边界元间接法中做出成绩的还有G. T. Symm[11]、R. F. Harrington等人[12].

在同一篇文章中M. A. Jaswon也首先在位势问题上使用了直接法[9]. 1967年F. J. Rizzo全面地给出了弹性力学平面问题的统一积分方程直接解. 1968年T. A. Cruse和Rizzo开始用直接法解弹性力学问题[13,14]，1969年T. A. Cruse给出了三维静弹性问题数值解[15]. 此后，在断裂力学、塑性力学、稳定弹性波、声学等多种领域中的边界元法也都是直接法或是以直接法为基础的.

我国著名学者杜庆华领导了清华大学边界元法研究组，在较长时期中对这一方法在弹塑性力学以及涉及热传导和动力学问题中的应用作了基础性的大量研究，并于1989年出版了专著[16].

1978年以来，几乎每年都举行一次边界元法国际性学术讨论会. 1995年7月在美国举行了第十七次国际会议. 第一、二次会议各发表了约30篇文章，大部分是位势问题和静弹性问题. 第三次会议是边界元法发展新转折的标志，对此方法在工程中的运用之优点作了肯定，并且在非线性问题、与时间有关的问题等许多复杂的问题上有一些探索性的文章. 第四次会议包括了大量的新问题、新应用，首先是材料非线性问题(弹塑性)，再是与时间有关的问题，如波的扩散、纳维斯托克斯流、弹性动力学、扩散等问题，亦包括了断裂力学与蠕变等问题中的应用.

近年来在我国曾举行了两次有关边界元法在工程中应用的学术会议[22,23]，标志着我国在边界元法的研究方面达到了一个新的水平. 研究的内容除了固体力学应力分析(应力集中、断裂、板壳、动力学等)外，还有流体力学、热力学、电磁场、土力学等学科领域的问题，并

且从线性弹性问题的研究扩展到弹塑性、非线性、带时间变量等问题. 此外，对边界元法的数学解方面也有不少探讨. 工程应用的范围除了机械结构不连续区局部应力分析外，还涉及土建、水利、采矿、地质岩石、航空等诸方面. 说明了边界元法的工程应用研究在我国方兴未艾.

总之，边界元法已发展到了较为成熟的阶段，相信边界元法将成为精确、更省时、更完善的一种方法，并能克服它在某些应用领域中的不足，使其更广泛的应用到各领域中去，成为一种有力的，生机勃勃的数值计算法.

§ 1.2 边界元法基础

边界元法涉及到许多数学基础知识，由于涉及面较广，本章只将各类运用中所涉及的共同基础归纳于此，而与各章有关的其它基础知识将分别在各自章节中介绍，故本节中介绍各类 Green 公式、有关张量的基本知识以及有关基本解的基础知识.

一、Green 公式，Остроградский 公式

1. Остроградский 公式

某量对坐标轴各偏导数之体积分与该量边界积分的关系为

$$\left.\begin{aligned}\int_V \frac{\partial A}{\partial x}\mathrm{d}V &= \int_S A\cos\alpha\mathrm{d}S\\ \int_V \frac{\partial B}{\partial y}\mathrm{d}V &= \int_S B\cos\beta\mathrm{d}S\\ \int_V \frac{\partial C}{\partial z}\mathrm{d}V &= \int_S C\cos\gamma\mathrm{d}S\end{aligned}\right\} \tag{1.2.1}$$

其中，A、B、C 为 V 及 S 上都连续可导的函数，S 为三维闭域 V 之界面. 三式相加可得

$$\int_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \int_S (A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\mathrm{d}S \tag{1.2.2}$$

式(1.2.2) 即为 Остроградский 公式. α、β、γ 为界面 S 之外法线 n 与 x、y、z 轴之夹角，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 n 的方向余弦. 如 A、B、C 是某物理量 u 的三个坐标轴之分量 u_x,u_y,u_z，则式(1.2.2) 可写为

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\mathrm{d}V = \int_S u_i n_i \mathrm{d}S,\ i = 1,2,3 \tag{1.2.3}$$

此式是按求和约定的写法，两个重复的指标 i 意味着 i 遍及 1、2、3 三个值求和，式中 u_i 为 u 在坐标轴 i 方向的分量，n_i 为外法线 n 在坐标轴 i 方向的方向余弦. 式(1.2.3) 称高斯公式，或称散度定理.

对于平面情况下，Остроградский 公式为

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_S [P\cos(n,y) + Q\cos(n,y)]\mathrm{d}S \tag{1.2.4}$$

此式即为一种形式的 Green 公式. 式中，σ 为平面闭域，S 为其边界.

如 P、Q 为物理量 u 在平面域上两个分量 u_x,u_y. 则同样可写成式(1.2.3)，其中 $i = 1,2$.

2. 另一形式的 Green 公式 ——Green 定理

$$\int_V u\nabla^2 w\mathrm{d}V + \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \int_S u\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1.2.5}$$

其中，$\frac{\partial w}{\partial n}$ 是 w 对外法线方向的导数，$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$，即 Laplace 算子.

3. Green 定理(或称关于 Laplace 算子的 Green 公式，推导可见参考文献[4]PP. 93 ～ 96)

$$\int_V (u\nabla^2 w - w\nabla^2 u)\mathrm{d}V = \int_S (u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n})\mathrm{d}S \tag{1.2.6}$$

二、有关基本解的基本知识

基本解是满足方程而在某点上具有奇异性的解，它在边界元法中起着很大的作用. 本节中介绍它的定义和它所表示的物理概念，在介绍基本解之前必须引入一个 δ 函数的概念.

1. Dirac-δ 函数

它是用密度函数表示一个离散的集中物理量分布状态时引入的一个函数，或说当集中量用连续分布量的概念来描述时引入的一个函数，以适应我们对函数的认识，每一个点有一个数与之对应.

如在 M_0 点有一个单位集中质量，可定义在区域 Ω 内的质量分布函数为 $f(M)$，满足下面条件：

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 }\Omega\text{ 内之总量} = \int_\Omega f(M)\mathrm{d}M = 1，\text{当 } M_0 \in \Omega \text{ 时}\\&\text{在 }\Omega\text{ 内之总量} = \int_\Omega f(M)\mathrm{d}M = 0，\text{当 } M_0 \overline{\in} \Omega \text{ 时}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.7}$$

此 $f(M)$ 常用 Dirac-δ 函数来定义，$f(M) = \delta(M - M_0)$，或 $\delta_{M_0}(M)$，或 δ_i，i 即 M_0，为集中量作用点，如作用点为原点则记为 $\delta(M)$，或 $\delta(x)$.

它具有下列性质：

$$\int_\Omega \delta(M - M_0)\mathrm{d}M = \left\{\begin{matrix}1 & (M_0 \in \Omega)\\0 & (M_0 \overline{\in} \Omega)\end{matrix}\right\} \tag{1.2.8}$$

如按通常的函数概念来定义该函数，则有

$$\delta(M - M_0) = \left\{\begin{matrix}0 & (M_0 = M)\\\infty & (M_0 \neq M)\end{matrix}\right\} \tag{1.2.9}$$

该函数还有一个十分重要的特性，即

$$\int_\Omega \delta(M - M_0)f(M)\mathrm{d}M = f(M_0) \qquad (M_0 \in \Omega) \tag{1.2.10}$$

上述性质表明 δ 函数与任意连续函数的乘积积分有明确的定义，因此，该函数在近代物理学和工程技术中有较广泛的运用，它在边界元法公式推导中起了很大的作用，如 $\delta(M)$ 表示单位集中质量作用在原点的密度函数，则上式变为

$$\int \delta(x)f(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

δ 函数还有其它一些性质：

①δ 函数是偶函数，即

$$\left.\begin{aligned}&\delta(x) = \delta(-x) && \text{一维问题}\\&\delta(x,y,z) = \delta(-x,-y,-z) && \text{三维问题}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.11}$$

② 三维 δ 函数可看作是三个一维 δ 函数的乘积：

$$\delta(x,y,z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{1.2.12}$$

③ $$\int_{-\infty}^{x}\delta(x-\xi)\mathrm{d}x = H(x,\xi) \tag{1.2.13}$$

其中，$H(x,\xi)=\begin{cases}0, x<\xi,\\ 1, x>\xi\end{cases}$ 是 Heaviside 阶梯函数，它在 $x=\xi$ 点处不连续，显然 δ 函数是它的导数，即

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \delta(x-\xi) \tag{1.2.14}$$

④δ 函数可以表示为积分形式：

$$\begin{aligned}\delta(x-\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-\xi)}\mathrm{d}\omega \\ \delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) &= \frac{1}{2\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\omega_x(x-\xi)+\omega_y(y-\eta)+\omega_z(Z-\zeta)]}\mathrm{d}\omega_x\mathrm{d}\omega_y\mathrm{d}\omega_Z\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

2. 基本解

基本解的定义　对于线性微分方程

$$\mathscr{L}u = f(M) \tag{1.2.16}$$

其中 $\mathscr{L}$ 为线性微分算子，则称满足方程

$$\mathscr{L}u = \delta(M-M_0) \tag{1.2.17}$$

的特解为 $u^*(M,M_0)$ 为方程(1.2.16)的基本解[21]，有时也称为下列方程的基本解：

$$\mathscr{L}u = 0 \tag{1.2.18}$$

基本解 $u^*(M,M_0)$ 在 $M\neq M_0$ 时将恒满足齐次方程(1.2.18)，但在 $M=M_0$ 点处函数本身或它的某阶导数有奇异性. 以 $\mathscr{L}$ 为 Laplace 算子为例，三维情况有基本解$\frac{1}{4\pi r(M,M_0)}$，$r(M,M_0)$ 为计算点到集中量点 M_0 之距离. 极坐标的 Laplace 方程为$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0$，把 $u^*=\frac{1}{4\pi r}$ 代入方程，不难证明 $r\neq 0$ 将恒满足方程，而 $r=0$ 时为奇异.

基本解是由集中量引起的，如上述的 $u^*(M,M_0)$ 即为一集中单位量作用在 M_0 点引起的，由于线性方程满足叠加原理，可以将一个连续的分布量看成是无数集中量的叠加，连续分布量产生的效果可由这些集中量各自产生的效果的叠加而得到. 由于集中量所产生的解为基本解，则按某密度函数分布的量 $f(M_0)$ 产生的方程(1.2.16)的解可用下列的积分方程表示：

$$u(M) = \int u^*(M,M_0)f(M_0)\mathrm{d}M \tag{1.2.19}$$

所以，对基本解的另一个定义为：如 $u^*(M,M_0)$ 在 $M\neq M_0$ 时满足方程 $\mathscr{L}u=0$，而对任何足够光滑的函数 $f(M)$ 由积分(1.2.19)所示的函数 $u(M)$ 满足方程(1.2.16)，那么称 $u^*(M,M_0)$ 是方程(1.2.16)的解，由于

$$\mathscr{L}u^*(M,M_0) = \delta(M-M_0)$$

对上式两边乘以 $f(M_0)$ 并积分，

$$\int f(M_0)\mathscr{L}u^*(M,M_0)\mathrm{d}M_0 = \int\delta(M-M_0)f(M_0)\mathrm{d}M_0$$

交换微分算子及积分，并利用 δ 函数的性质，上式可写成

$$\mathscr{L}\int f(M_0)u^*(M,M_0)\mathrm{d}M_0 = f(M)$$

上式$\int f(M_0)u^*(M,M_0)\mathrm{d}M_0 = u(M)$，故可见 $u(M)$ 是方程 $\mathscr{L}u=f(M)$ 的解，即满足方

程(1.2.16).

3. 基本解的求解

求解各种微分方程的基本解是一个比较复杂的问题，一般的纯数学的解法可利用广义 Fourier 展开来求解，但更直接的常常用一些各类问题本身的固有方法来求解，如流体力学中的点源，由点源产生的基本解在流体力学中有专门的方法进行讨论，故在此不作详细介绍. 但掌握一种普遍通用的方法，对于一些尚没有合适基本解的问题可以自行尝试进行推导，我们推荐用 Fourier 展开法来求解基本解，此方法可参阅文献[4]PP. 43 ～ 65.

三、加权余数法

加权余数法是求解微分方程近似解的一种较简单的方法. 设有一微分方程式

$$\mathscr{L}(u) = p\text{，在区域 } \Omega \text{ 中} \tag{1.2.20}$$

在边界上要求满足如下的边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\text{基本边界条件：}G(u) = g\text{，在边界 } \Gamma_1 \text{ 上}\\&\text{本质边界条件：}S(u) = q\text{，在边界 } \Gamma_2 \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.21}$$

式中 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ 就是区域 Ω 的整个边界. 设 u_0 是方程的精确解，它的近似解可以表示为一组函数 $\Phi_k(x)$ 的组合：

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi_k \tag{1.2.22}$$

式中，α_k 是未知参数，Φ_k 是线性独立函数，它的完整函数序列为

$$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \cdots, \Phi_n(x) \tag{1.2.23}$$

这些函数通常选择为满足给定条件，例如边界条件，一般我们喜欢采用节点数值，因为它们有明确的物理意义. 在选取了近似解(1.2.22)以后，微分方程(1.2.20)和边界条件(1.2.21)将不能精确满足，即

$$\mathscr{L}(u) - p \neq 0\text{，在区域 } \Omega \text{ 上} \tag{1.2.24}$$

$$\left.\begin{aligned}&G(u) - g \neq 0\text{，在边界 } \Gamma_1 \text{ 上}\\&S(u) - q \neq 0\text{，在边界 } \Gamma_2 \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.25}$$

现在，我们定义在区域内和边界上的误差函数 ε、ε_1 和 ε_2 如下：

$$\begin{aligned}&\varepsilon = \mathscr{L}(u) - p\text{，在区域 } \Omega \text{ 上}\\&\varepsilon_1 = G(u) - g\text{，在边界 } \Gamma_1 \text{ 上}\\&\varepsilon_2 = S(u) - q\text{，在边界 } \Gamma_2 \text{ 上}\end{aligned} \tag{1.2.26}$$

为了使这些在区域内和边界上的误差为最小，从而产生了各种加权余数法. 其中最简单的一种是选择近似函数 u，使得精确地满足边界条件(即 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$)，但不能精确地满足微分方程，于是将误差 ε 按加权函数 w 在区域 Ω 中进行分配，从平均意义使余数的加权积分为零，即

$$\int_\Omega \varepsilon w \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega [\mathscr{L}(u) - p] w \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{1.2.27}$$

经典的有限差分法就是加权余数法中的一种特殊情况，此时只需取权函数 w 为一组 Dirac $-\delta$ 函数的组合，即

$$w = \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 + \cdots \tag{1.2.28}$$

系数 β_i 又可取作任意节点系数 w_i，则

$$w = w_1\delta_1 + w_2\delta_2 + \cdots \tag{1.2.29}$$

这样代入式(1.2.27)中,应用 Dirac $-\ \delta$ 函数的特性就可以求得

$$\int_\Omega \varepsilon\delta_i \mathrm{d}\Omega = \varepsilon_i = 0 \tag{1.2.30}$$

此式可给出中心差分的相同结果,但这个推导比差分法更为一般化.

选取不同的权函数可导出不同的方法,例如,权函数 w 与试函数 u 采用同一函数则可得到Galerkin 加权余数法.对于在 Γ_1、Γ_2 上的边界条件不能精确满足的情况,也可像在区域中的误差函数 ε 那样以类似的形式加权,如在 Γ_2 边界上按 w 加权平均使之近似满足边界条件,而在 Γ_1 上以 $\frac{\partial w}{\partial n}$ 为权函数使之近似满足边界条件,则可导出(1.1.4)边界元法基本方程.详细情况可参阅文献[6,19,20].

四、张量分析基本知识

1. 张量的基本概念

在许多科学领域中,特别是在力学研究中,常常碰到各种物理量,其中有许多量是标量和矢量,它们分别在给定坐标系中用一个分量和三个分量来表示.但是有些量,如速度的分布强度、弹性力学及粘性流体力学中一点的应力状态,在三维 Descartes 坐标系中必须用 9 个分量来表示,应力场梯度有 27 个分量,描述各向异性介质的本构关系中弹性模量或粘性系数必须要用 81 个分量.各种各样的物理量可用一种统一的数学模式来表示,即张量.张量是统指这样一类物理恒量:在三维空间它们的分量数可用 3^n 来表示,n 为张量的阶,当坐标转换时,物理恒量之值不变,但它的新老坐标系的对应分量按一个统一的格式 $\pi^* = A\pi$ 来进行转换.A 是转换因子式,当 $n=1$ 即一阶张量时,$A = a_{ij}$;$n=2$ 时,$A = a_{ij}a_{ik}, a_{ij}a_{il}$ 为转换因子,将在后面详细介绍;依次类推,n 阶张量 A 由 n 个因子组成,称 n 为张量的阶.于是,标量 $n=0$ 称为零阶张量,矢量为一阶张量,一点的应力状态为二阶张量,应力场梯度为三阶张量,各向异性弹性模量为四阶张量.张量以 Descartes 坐标系表示,则称为笛卡尔张量或称为仿射正交张量.由于在固体力学中的坐标系均为 Descartes 坐标系,故我们只讨论仿射正交张量,对于斜坐标系的张量情况不作考虑.

应该指出,所谓坐标转换或变换是坐标系本身平移、旋转、反射时坐标系的变换,以 Descartes 坐标系为例说明这三种变换.所谓平移变换,就是各坐标方向不变,将坐标系平移到新的位置.旋转变换时,原点不动,各坐标轴同时绕某轴旋转一个相同的角度.至于反射变换,原点和两条坐标轴不动,第三条坐标轴转过180°,新老坐标系如同镜面反射.三种变换情况见图 1-1,带 * 的坐标为新坐标.

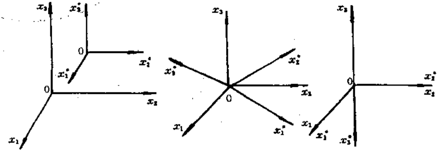
这里只讨论后两种转换.

2. 求和约定,Kronecker-δ_{ij} 记号,顺序记号 ε_{ijk} 及其应用

(1) *求和约定*

在数学运算过程中,常遇到和号 $\sum$,例如 $\sum_{i=1}^{3} a_i b_i$,$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$,处理这类式子时,可采用 Einstein 求和约定,将求和号省去,得到更为简洁的书写形式.

Einstein 求和约定规定:在一个表达式的某一项中,如果有某一个指标重复出现两次,那么这一项应按该指标遍及 $1,2,\cdots,n$ 诸值求和,并省略连加号.例如,



(a)平移　　　(b)旋转　　　(c)反射

图 1-1　三种坐标变换

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{ii}, \quad i = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = a_{i1}x_i x_1 + a_{i2}x_i x_2 + a_{i3}x_i x_3 =$$

$$a_{11}x_1x_1 + a_{21}x_2x_1 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2x_2 + a_{32}x_3x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3x_3 = a_{ij}x_ix_j$$

$$i = 1,2,3;\ j = 1,2,3$$

我们把求和的指标称为哑指标. 由于哑指标仅仅意味着求和，因此，一个哑指标可以用任何其它哑指标代替，均不改变表达式，例如，$a_{ii} = a_{jj} = a_{kk}$. 在应用求和约定时，一定要保证在任何式子中都不允许有出现两次以上的指标，否则这个式子的意义就不明确了，例如 $\sum_{i=1}^{3} a_i b_i c_i$ 不能用 $a_i b_i c_i$ 表示.

采用了指标符号后线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

可简写为：

$$a_{ij}x_j = b_i (i,j = 1,2,3)$$

式中左端项中 j 出现两次代表求和指标；而 i 在左、右二项中只出现一次，实际上起指定作用，称为指定指标，或自由指标，此处 i 分别指定为 1、2、3，分别代表方程 1、2、3.

在偏微分方程或偏微分方程组中，为了更简洁地表示偏导数，用"逗号 - 指标符号"表示对坐标分量的偏导数. 例如，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \text{ 记作 } \varphi_{,i};\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \text{ 简记为 } u_{i,ij}$$

弹性力学中的平衡微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

可以写成：

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}+X_j=0\text{ 或 }\sigma_{ij,i}+X_j=0,i=1,2,3;j=1,2,3$$

(2)Kronecker-δ 记号的定义是

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\tag{1.2.31}$$

由于 δ_{ij} 有两个下标，i、j 的取值为 1、2、3，因而有九个分量，如以矩阵形式表示，并由 δ_{ij} 的定义，可写成

$$[\delta_{ij}]=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I\tag{1.2.32}$$

δ_{ij} 有下列性质：

①$\delta_{ij}=\delta_{ji}$，即 Kronecker-δ 记号的下标可以交换

②$\delta_{ii}=3$，i 重复表示求和，$\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$

③δ_{ij} 可简化连加式的书写，由连加式可写成

$$\delta_{1m}a_m=\delta_{11}a_1+\delta_{12}a_2+\delta_{13}a_3=a_1$$
$$\delta_{2m}a_m=\delta_{21}a_1+\delta_{22}a_2+\delta_{23}a_3=a_2$$
$$\delta_{3m}a_m=\delta_{31}a_1+\delta_{32}a_2+\delta_{33}a_3=a_3$$

可统一写成

$$\delta_{im}a_m=a_i$$

类似地

$$\delta_{im}T_{mj}=T_{ij},\delta_{mi}T_{jm}=T_{ji}\tag{1.2.33}$$

特别，当 $T_{mj}=\delta_{mj}$ 时，

$$\left.\begin{array}{l}\delta_{im}\delta_{mj}=\delta_{ij}\\ \delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{ii}=3\end{array}\right\}\tag{1.2.34}$$

这种运算得到广泛应用.

(3) 顺序符号 ε_{ijk}

在张量分析中，广泛应用的另一个符号是 ε_{ijk}，称顺序记号，或称置换符号. 由 ε_{ijk} 表示的置换符号定义为

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1,\text{当 } i,j,k \text{ 按 } 1,2,3 \text{ 顺序排列时}\\ -1,\text{当 } i,j,k \text{ 按 } 1,3,2 \text{ 顺序排列时}\\ 0,\text{其余情况}\end{cases}\tag{1.2.35}$$

亦即，当 i,j,k 取 1,2,3 时，则

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$$
$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=-1$$
$$\varepsilon_{112}=\varepsilon_{111}=\cdots=0$$

显然，下列关系成立：

$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}=-\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{kji}$$

上述的置换符号 ε_{ijk} 也称为三维空间的排序符号.

由 ε_{ijk} 的定义可知，置换符号 ε_{ijk} 可被看成是三个互成正交的单位矢量 $\vec{e}_i,\vec{e}_j,\vec{e}_k$ 数性三重积，即

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \tag{1.2.36}$$

事实上

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \begin{cases} \vec{e}_k & \text{当 } i,j,k \text{ 按 } 1,2,3 \text{ 顺序排列时} \\ -\vec{e}_k & \text{当 } i,j,k \text{ 按 } 1,3,2 \text{ 顺序排列时} \\ 0 & \text{当 } i=j \text{ 时} \end{cases}$$

利用置换符号 ε_{ijk}，可将两个单位矢量的叉积写成下式：

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k \tag{1.2.37}$$

点乘 $\vec{e}_k$ 到上式两端

$$\vec{e}_k \cdot (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \varepsilon_{ijk}$$

由于行列式值与它的转置行列式相等，则 ε_{ijk} 又可表为

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$$

同样，

$$\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{2p} & \delta_{3p} \\ \delta_{1q} & \delta_{2q} & \delta_{3q} \\ \delta_{1r} & \delta_{2r} & \delta_{3r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix}$$

于是两顺序符号相乘，可表示成

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{2q} & \delta_{3r} \\ \delta_{1p} & \delta_{2q} & \delta_{3r} \\ \delta_{1p} & \delta_{2q} & \delta_{3r} \end{vmatrix}$$

由行列式 $|A_1||A_2| = |A_1A_2|$，则 ε_{ijk} 与 ε_{pqr} 相乘后的第一行、第一列元素应为

$$\delta_{1i}\delta_{1p} + \delta_{2i}\delta_{2p} + \delta_{3i}\delta_{3p} = \delta_{mi}\delta_{mp} = \delta_{ip}$$

其余的元素依次类推，则有

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \tag{1.2.38}$$

讨论(1.2.38)式的几种特殊情况：

① 单个指标相同情况

当 $k=r$ 时，(1.2.38)式可改写成

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ik} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jk} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kk} \end{vmatrix}$$

由于 $\delta_{kk}=3$，行列式可展开为

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = 3(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) - \delta_{kq}(\delta_{ip}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jp}) + \delta_{kp}(\delta_{iq}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jq})$$

由(1.2.34)式可知,$\delta_{kq}\delta_{jk}=\delta_{jq},\delta_{kq}\delta_{ik}=\delta_{iq},\delta_{kp}\delta_{jk}=\delta_{jp},\delta_{kp}\delta_{ik}=\delta_{ip}$,于是

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk}=(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq}\end{vmatrix} \tag{1.2.39}$$

同理,$j=q$ 时,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjr}=(\delta_{ip}\delta_{kr}-\delta_{ir}\delta_{kp})=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{ir}\\ \delta_{kp} & \delta_{kr}\end{vmatrix}$$

$i=p$ 时,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iqr}=(\delta_{jq}\delta_{kr}-\delta_{jr}\delta_{kq})=\begin{vmatrix}\delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix}$$

② 两个指标相同情况

当 $j=q,k=r$ 时,则可利用式(1.2.39)时把 q 变成 j,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjk}=\delta_{ip}\delta_{jj}-\delta_{ij}\delta_{jp}=3\delta_{ip}-\delta_{ip}=2\delta_{ip} \tag{1.2.40}$$

同理,$i=p,k=r$ 时,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iqk}=2\delta_{jq}$$

$i=p,j=q$ 时,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijr}=2\delta_{kr}$$

③ 三个指标相同情况

当 $i=p,j=q,k=i$ 时,利用式(1.2.40)代入 $i=p$,即

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=2\delta_{ii}=6 \tag{1.2.41}$$

(4)δ_{ij},ε_{ijk} 的应用

两符号在张量分析中被广泛地应用,在此先举几个它们在一阶张量(即矢量)运算中应用的例子,这里讨论的矢量均为正交坐标系下的矢量.

① 数性积 $A\cdot B$ 可表示为

$$A=A_i\vec{e}_i,B=B_j\vec{e}_j$$

式中,$\vec{e}_i$、$\vec{e}_j$ 为坐标系的单位基矢量,A_i、B_j 分别表示矢量 A、B 在正交坐标系 $\vec{e}_i$、$\vec{e}_j$ 下的分量,于是

$$A\cdot B=A_i\vec{e}_i\cdot B_j\vec{e}_j=A_iB_j(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)=A_iB_j\delta_{ij}\qquad(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij})$$

② 矢性积 $A\times B$

令

$$C=A\times B$$

将 $A=A_i\vec{e}_i,B=B_j\vec{e}_j$ 代入上式,得

$$C=A_i\vec{e}_i\times B_j\vec{e}_j=A_iB_j(\vec{e}_i\times\vec{e}_j) \tag{1.2.42}$$

由式(1.2.37)得 $C=A_iB_j\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k$,令 $C=C_k\vec{e}_k$,则

$$C_k=A_iB_j\varepsilon_{ijk}, \tag{1.2.43}$$

式中 k 是指定指标,i、j 为求和指标,当 $k=1$,i、j 遍取 1、2、3 求和,不难得到

$$C_1=A_2B_3-A_3B_2$$

同样可得

$$C_2=A_3B_1-A_1B_3,C_3=A_1B_2-A_2B_1$$

③ 三个矢量的数性三重积 $A\cdot(B\times C)$