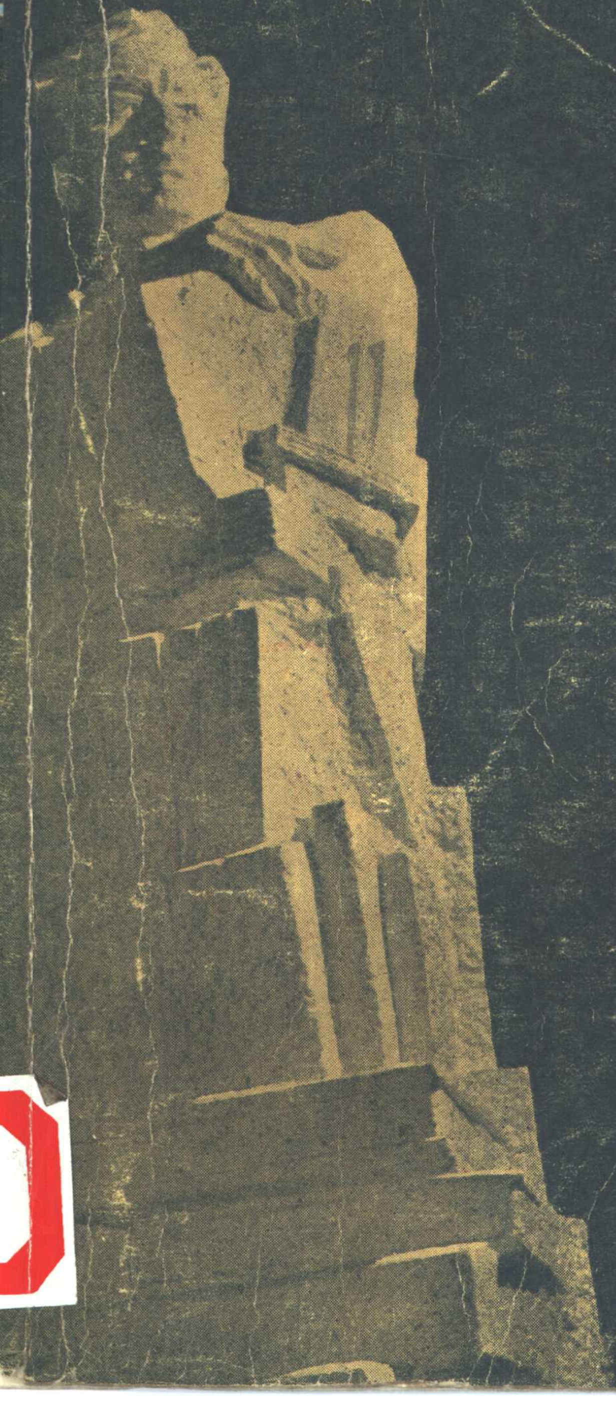

大学基础数学自学丛书

高等代数

王萼芳 编著

大学基础数学自学丛书

高 等 代 数

大学基础数学自学丛书
高 等 代 数
王 萼 芳
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　安徽新华印刷厂印刷
开本787×1092 1/32　印张16.75　字数372,000
1981年7月第1版　1981年7月第1次印刷
印数：1—231,000
统一书号：13119·934　定价：（科四）1.55元

序　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师执笔编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么"诀窍"，如果有的话，那就是"多思考，多练习，熟能生巧"。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编者的话

本书是为自学《高等代数》课程的读者编写的. 内容包括多项式理论、线性方程组、矩阵论及线性空间等四个部分.

为了适合自学读者的要求，本书在内容的处理上主要作了如下相应的安排：

将矩阵理论集中安排在第四至第六三章，而把线性空间及欧氏空间放在最后两章. 这样，不仅是为了加强矩阵理论，使矩阵理论成为完整的一部分. 而且读者在掌握了矩阵理论后再来学习线性空间，对线性空间的概念就比较容易掌握，并可较为深刻地了解其重要性.

用矩阵方法解决了用正交变换化实二次齐式为标准形的问题. 因而，读者在第六章中就能对二次齐式有一个较为全面的了解，从而可以不必学习欧氏空间的概念就能掌握用正交变换化实二次齐式为平方和的方法.

此外，还注意到了章节内容的伸缩性：某些不必掌握线性空间概念的读者，最后两章可以不学，也并不影响对本书基本内容的掌握.

为了便于读者自学，在编写中力求叙述通顺，问题明确，重点突出，难点分散；凡估计读者可能发生困难的地方，都作了比较细致的分析和详尽的推导.

书中安排了较多的例题，希望读者通过这些例题能掌握运算技巧和解题方法. 每小节之后都附有习题，这不仅可以帮助读者加深理解和及时巩固课程内容，同时也反映了课程

的基本要求. 书末附有习题答案及提示.

限于编者的水平和经验,书中一定存在不少问题,希望读者随时提出意见,以便今后进一步修改.

本书承郝钢新同志认真审阅了原稿并提出宝贵意见,特此表示感谢.

王萼芳
于北京大学数学系
1980年7月

目　录

第一章　多　项　式

第二章　行　列　式

第三章　线性方程组

第四章　矩　阵

第五章 矩阵的标准形

第六章 二次齐式

第七章 线性空间与线性变换

第八章 欧氏空间

习题答案及提示

第一章

多 项 式

多项式是一类最常见、最简单的函数，它的应用非常广泛. 关于多项式的一些重要定理和方法，不仅在解决实际问题时常常用到，而且在进一步学习代数以及其他学科时也经常会碰到. 在中学代数里，我们曾经学习过多项式的运算. 这一章将在复习这些内容的基础上，进一步讨论关于一元多项式的一些理论，例如最大公因式的性质、求法，以及多项式的因式分解等问题.

第一节 一元多项式及其运算

这一节复习一元多项式的基本概念以及一元多项式的运算.

设 x 是一个变量(或称文字)，n 是一个非负整数，表示式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{1}$$

称为 x 的一个*多项式*. 其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 都是常数，称为多项式 (1) 的*系数*；a_kx^k 称为多项式 (1) 的 *k 次项*；a_k 称为 *k 次项系数*. 实际上，这里定义的多项式只包含一个变量，所以是*一元多项式*. 为了简单起见，在不会引起误解的情况下，我们将一元多项式简称为多项式. 特别，在这一章中，除去最后一节外，我们提到的多项式都是指一元多项式.

以后我们常用 $f(x)$，$g(x)$，…等，或者简单地就用 f，g，…等表示多项式. 并用 $f(a)$ 表示多项式 $f(x)$ 当 $x=a$ 时

的值．如果 $f(c)=0$，就称 c 是多项式 $f(x)$ 的一个根．

如果两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的同次项的系数全相等，就称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记作 $f(x)=g(x)$．

系数全等于零的多项式称为零多项式，记作 0．

如果在 (1) 中，$a_n\neq 0$，那么 a_nx^n 就称为多项式 (1) 的首项，a_n 称为多项式(1)的首项系数，n 称为多项式(1)的次数．为了方便起见，我们用"次 $f(x)$"(或者简单地，用"次 f")来表示 $f(x)$ 的次数．非零常数是零次多项式．零多项式是唯一的无法确定次数的多项式．因此必须注意：只有在 $f(x)\neq 0$ 时，符号"次 $f(x)$"才有意义．

如果多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的系数 a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_1，a_0 都是整数，我们就称 $f(x)$ 是一个整系数多项式；如果 $f(x)$ 的系数都是有理数，就称 $f(x)$ 是一个有理系数多项式．同样地，可以定义实系数多项式和复系数多项式．因为一切常数都可以看成复数，所以一切多项式都可以看作复系数多项式．以后，如果不加以声明，我们总是理解为所讨论的多项式都是复系数多项式．

我们学过多项式的加法、减法和乘法．两个多项式相加(或相减)，就是把它们的同次项的系数相加(或相减)；两个多项式相乘，就是分别将各个单项相乘，然后合并同次项．下面举例说明多项式的运算．

【例 1】 设 $f(x)=2x^2+3x-1$，$g(x)=x^3+2x^2-3x+2$．求 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$．

解：
$$\begin{aligned} f(x)+g(x)&=(2x^2+3x-1)+(x^3+2x^2-3x+2)\\ &=x^3+(2+2)x^2+(3-3)x+(-1+2)\\ &=x^3+4x^2+1. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x)-g(x)&=(2x^2+3x-1)-(x^3+2x^2-3x+2)\\
&=(0-1)x^3+(2-2)x^2+[3-(-3)]x+(-1-2)\\
&=-x^3+6x-3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x)&=(2x^2+3x-1)\cdot(x^3+2x^2-3x+2)\\
&=2x^5+3x^4-x^3+4x^4+6x^3-2x^2\\
&\quad-6x^3-9x^2+3x+4x^2+6x-2\\
&=2x^5+(3+4)x^4+(-1+6-6)x^3\\
&\quad+(-2-9+4)x^2+(3+6)x-2\\
&=2x^5+7x^4-x^3-7x^2+9x-2.
\end{aligned}
$$

多项式的乘法可以用竖式来计算，比较简单明了．上面的例子就可以这样来计算：

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & f(x)=2x^2 & +3x & -1 & \\
 & & \times)\ g(x)=x^3 & +2x^2 & -3x & +2 & \\
\hline
2x^5 & +3x^4 & -x^3 & & & & \\
 & 4x^4 & +6x^3 & -2x^2 & & & \\
 & & -6x^3 & -9x^2 & +3x & & \\
 & & & 4x^2 & +6x & -2 & \\
\hline
\multicolumn{7}{l}{f(x)\cdot g(x)=2x^5+7x^4-x^3-7x^2+9x-2.}
\end{array}
$$

有时候，为了方便起见，我们还可以应用分离系数法来作乘法，就是把 x 的方幂略去不写，只把系数按次序写出来进行运算．仍用上面的例子来说明，上面的竖式可以应用分离系数法简化为：

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2 & 3 & -1 & \\
 & 1 & 2 & -3 & 2 & \\
\hline
2 & 3 & -1 & & & \\
 & 4 & 6 & -2 & & \\
 & & -6 & -9 & 3 & \\
 & & & 4 & 6 & -2 \\
\hline
2 & 7 & -1 & -7 & 9 & -2
\end{array}
$$

最后所得的一列数就是$f(x)\cdot g(x)$按降幂排列的系数.

应用这种方法进行运算的时候，一定要注意：必须把系数是“0”的项补上. 我们再举一个例子.

【例 2】 $f(x)=x^3-1$, $g(x)=5x^2+x-1$.

求$f(x)\cdot g(x)$.

解：应用分离系数法进行计算

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & -1 & & \\
5 & 1 & -1 & & & \\
\hline
5 & 0 & 0 & -5 & & \\
 & 1 & 0 & 0 & -1 & \\
 & & -1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
5 & 1 & -1 & -5 & -1 & 1
\end{array}
$$

所以 $f(x)g(x)=5x^5+x^4-x^3-5x^2-x+1$.

为了便于统一地讨论多项式的问题，我们有必要对多项式的运算规则作进一步的讨论.

首先，我们总结一下多项式的和、差、积的系数公式.

设 $$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$
是两个多项式. 如果$n=m$，那么容易看出：

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0),$$

$$f(x)-g(x)=(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0).$$

如果$n>m$，那么在推导多项式的加法及减法公式时，为了方便起见，我们令$b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$，而把$g(x)$写成

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0.$$

于是可以同样地得到$f(x)+g(x)$和$f(x)-g(x)$的表示式. 如

果 $m>n$, 可以类似地处理. 读者可以作为练习推导一下.

根据上面的 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)-g(x)$ 的表示式, 可以看出: $f(x)+g(x)$ 的 k 次项系数是 a_k+b_k; 而 $f(x)-g(x)$ 的 k 次项系数是 a_k-b_k. 因此, $f(x)\pm g(x)$ 的次数满足下面的不等式:

$$次(f(x)\pm g(x))\leqslant \max(次 f(x), 次 g(x))^{*)}.$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积是

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= (a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)(b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0)\\ &= (a_nb_mx^{n+m}+a_{n-1}b_mx^{n+m-1}+\cdots\\ &\quad +a_1b_mx^{m+1}+a_0b_mx^m)\\ &\quad +(a_nb_{m-1}x^{n+m-1}+a_{n-1}b_{m-1}x^{n+m-2}+\cdots\\ &\quad +a_1b_{m-1}x^m+a_0b_{m-1}x^{m-1})\\ &\quad +\cdots\\ &\quad +(a_nb_1x^{n+1}+a_{n-1}b_1x^n+\cdots+a_1b_1x^2+a_0b_1x)\\ &\quad +(a_nb_0x^n+a_{n-1}b_0x^{n-1}+\cdots+a_1b_0x+a_0b_0).\end{aligned}$$

仔细观察这些项, 可以看出: 一般项的形式是

$$a_ib_jx^{i+j}.$$

合并同次项, 即得

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots\\ &\quad +(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0.\end{aligned}$$

其中 k 次项的系数是

$$a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_1b_{k-1}+a_0b_k.$$

如果 $f(x)$ 或 $g(x)$ 中有一个是零多项式, 那么 $f(x)g(x)$

---

*) “max”是 maximum 的缩写. $\max(a_1, a_2, \cdots, a_l)$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_l$ 中最大的一个. 例如: $\max(5, 4)=5$; $\max(-1, 3, 0, 2, 3)=3$. 以后我们还会用到“min”, 这是 minimum 的缩写. $\min(a_1, a_2, \cdots, a_l)$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_l$ 中最小的一个. 例如 $\min(5, 4)=4$; $\min(-1, 3, 0, 2, 3)=-1$.

也是零多项式；如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不等于 0，并设它们的首项分别是 a_nx^n 与 b_mx^m，那么可以从乘法公式看出：$f(x)g(x)$ 的首项就是 $a_nb_mx^{n+m}$，因此可知：如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不为 0，那么乘积 $f(x)g(x)$ 也不为 0，并且它的次数等于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的次数之和：

$$次(f(x)g(x))=次(f(x))+次(g(x)).$$

由此还可推出：如果 $f(x)g(x)=0$，那么必有 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$.

同数的运算相类似，多项式的加法与乘法满足下面的一些运算律.

(1) **加法交换律**：

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x).$$

(2) **加法结合律**：

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x)).$$

(3) **乘法交换律**：

$$f(x)g(x)=g(x)f(x).$$

(4) **乘法结合律**：

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x)).$$

(5) **加乘分配律**：

$$f(x)[g(x)+h(x)]=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

这些规律不仅可以用来简化计算，而且在以后的讨论中也经常用到.

最后我们来证明，多项式的乘法还满足消去律.

(6) **乘法消去律**：

如果 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，并且 $f(x)\neq 0$，那么必有 $g(x)=h(x)$.

【证明】 从 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$ 可得