

考研 系列丛书

2001年 研究生入学考试

主编 王学理(东北大学) 富景隆(哈尔滨工业大学)

数 学
应试指南



NEUPRESS
东北大学出版社

2001 年研究生入学考试 数学应试指南

主 编 王学理 富景隆
副主编 刘玉柱 李建华 沙秋夫

东北大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

2001 年研究生入学考试数学应试指南/王学理, 富景隆主编. —沈阳: 东北大学出版社, 2000.4

ISBN 7-81054-260-5

I. 2...

II. ①王... ②富...

III. 数学-考试-研究生

IV. O1

内容简介

贴近考试, 本书将大纲要求的内容分成三篇二十六讲, 每讲包括内容提要、客观题、主观题、综合题、复习题和答案六个部分, 第四篇为模拟试卷。

本书采用归类分析的方法向读者介绍方便快捷的解题方法, 尤其重视综合运用所学知识能力的训练。模拟试题由参加过多年全国考研命题的富景隆先生编写, 颇具实用性和真实感。

本书的读者对象是准备参加全国硕士研究生入学考试的朋友们, 本书亦可供其他工科院校本科生参考, 也是高校数学教学工作不可多得的教学参考书。

©东北大学出版社出版

(沈阳市和平区文化路3号巷11号 邮政编码 110006)

沈阳市第六印刷厂印刷 新华书店总店北京发行所发行

开本: 787×1092 1/16 字数: 859 千字 印张: 33.625

2000年4月第3版 2000年4月第1次印刷

责任编辑: 刘宗玉 张德喜

责任校对: 米 戎

封面设计: 唐敏智

责任出版: 秦 力

定价: 35.00 元

第一篇 高等数学

第一讲 一元函数的极限

一、内容提要

(一) 主要定义

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限 (也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a), 记成 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

极限不存在时, 说 $\{x_n\}$ 发散.

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记成 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

注 在此定义中, $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$, A 称为 $f(x)$ 的当 $x \rightarrow x_0 - 0$ 时的左极限, 记成 $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$, 或 $f(x_0 - 0) = A$, 类似可以定义右极限 $f(x_0 + 0)$.

3. $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记成 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

读者可以自己给出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义.

4. $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量, 记成 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$. 无穷大量简称为无穷大.

读者可以自己给出 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 等的定义.

注 当 $x \rightarrow x_0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时结论都成立时, 以后简记成 $\lim$. 以 0 为极限的量称为无穷小量. 无穷小量简称为无穷小.

5. 若 $\lim \alpha(x) = \lim \beta(x) = 0$, 且 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记成 $\alpha(x) = o(\beta(x))$; 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小; 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C (C \neq 0)$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小, 记成 $\alpha(x) = O(\beta(x))$, 当 $C = 1$ 时, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小, 记成 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(二) 主要定理与公式

1. 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则有

$$\lim[f(x) + g(x)] = A + B, \lim[f(x)g(x)] = AB$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

2. 极限存在准则

I 单调有界数列必有极限.

II 若 $x_n \leq y_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

(准则 II 亦称夹逼准则, 对于函数也成立)

3. 在同一过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小; 有限个无穷小的和是无穷小.

注 (1) 等价无穷小具有传递性: 设 α, β, γ 为同一过程的无穷小, 若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, 则 $\alpha \sim \gamma$;

(2) 等价无穷小在求极限过程中可以进行如下替换: 在同一极限过程中, 若 $\alpha \sim \bar{\alpha}, \beta \sim \bar{\beta}$, 且 $\lim \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ 存在, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$.

4. $\lim f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$, 此处 $\lim \alpha(x) = 0$.

5. 洛比达(L'Hospital)法则 $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ (或 ∞), $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞ ,

则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

6. 两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

7. 若在 $U(x_0, \delta)$ 内 $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ ($A \leq 0$).

8. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ ($A < 0$), 则必有 $U(x_0, \delta)$ 使在此邻域中 $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

注 若 $A = f(x_0)$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 此时结论亦真.

9. 若极限存在, 则其值必然唯一.

10. 任何有界数列都有收敛的子数列.

(三) 结论补充

1. 若 $\lim \varphi(x) = 0$, 则 $\lim \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$.

2. 若 $\lim \varphi(x) = \infty$, 则 $\lim \left[1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = e$.

3. 若 $\lim \varphi(x) = 0$, 则 $\lim [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$.

注 以上三条中的 $\varphi(x)$ 不等于 0.

4. $a > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x, x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, a^x - 1 \sim x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$).

注 由 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$ 立刻得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$.

7. 若 $\lim \alpha(x) = \lim \beta(x) = \lim A(x) = \lim B(x) = 0$. 且 $\alpha(x) \sim A(x), \beta(x) \sim B(x)$,

则有 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{A(x)}{B(x)}$ 和 $\lim [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}} = \lim [1 + A(x)]^{\frac{1}{B(x)}} = e^{\lim \frac{A(x)}{B(x)}}$.

注 分母 $\beta(x), B(x)$ 不能取 0.

8. 不为零的无穷小的倒数为无穷大, 无穷大的倒数为无穷小.

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n > m \\ \infty, & n < m \end{cases}$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{ax+c} \right)^{hx+k} = e^{\frac{(b-c)h}{a}}$$

11. 皮亚诺(Peano) 代换法

在求极限过程中, 可视情况将某些函数用它的马克劳林展开式来代替, 主要有:

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$(2) \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n}x^n + o(x^n).$$

$$(3) \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

$$(4) \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

$$(5) (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

12. 设 $\lim \varphi(x) = 1, \lim \psi(x) = 0, \varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 可导, 且 $\lim \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}$ 存在, 则

$$\lim \varphi(x)^{\frac{1}{\psi(x)}} = \exp \lim \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}.$$

13. 设 $\lim \alpha = \lim \beta = 0$, 且 $\alpha - \beta \neq 0$, 则

$$\ln(1+\alpha) - \ln(1+\beta) \sim 2(\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1+\beta}) \sim \alpha - \beta$$

14. 设 $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$ 均为 $x \rightarrow x_0$ 的无穷小, 且 $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$, 又 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = C (C \neq -1)$, 则 $\alpha + \beta \sim \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left[a + \frac{k}{n}(b-a)\right] \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$.

二、客观题

(一) 填空题

【例1】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x-2) - \ln(x+1)] = [\quad]$.

【解】 应填 -3. 因为

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^x = \ln \exp \left(\frac{-2-1}{1} \right) \cdot 1 = -3.$$

【例2】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^p} = \frac{1}{2}$, 则 $p = [\quad]$.

【解】 应填 3. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^p}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(\cos x)x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{p-1}}.$$

故 $p-1=2$, 因此 $p=3$.

【例3】 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - x \sin \frac{1}{x} \right) = [\quad]$.

【解】 应填 $\frac{1}{6}$. 因为可令 $\frac{1}{x} = t$. 则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} t^3}{t^3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

【例4】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (1+t^2) e^{t^2-x^2} dt = \{ \quad \quad \quad \}.$

【解】 应填 $\frac{1}{2}$. 因为应用洛比达法则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2) e^{t^2-x^2} dt}{x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x^2) e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

练习 1-1

1 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{x^2 \int_{\frac{\pi}{6}}^x \sin t dt}{x - \frac{\pi}{6}} = \{ \quad \quad \quad \}.$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} = \{ \quad \quad \quad \}.$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2^x}{\ln(1+2x)} - \frac{1}{\ln(1+2x)} \right] = \{ \quad \quad \quad \}.$

4 $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = \{ \quad \quad \quad \}.$

5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1+2x)} = \{ \quad \quad \quad \}.$

6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9-x^2}}{\sin^2 x} = \{ \quad \quad \quad \}.$

7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \{ \quad \quad \quad \}.$

8 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \cdot \cot x = \{ \quad \quad \quad \}.$

9 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x - x}{2x + \cos x} = \{ \quad \quad \quad \}.$

10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{1 - 2^{\frac{1}{\tan x}}} = \{ \quad \quad \quad \}.$

(二) 选择题

【例1】 下列各式不正确的是[$\quad \quad \quad$].

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty;$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0;$

(C) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty;$

(D) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$

【解】 应选择 A. 因为 B, C 都是正确的, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

【例2】 设 $0 < a < b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \{ \quad \quad \quad \}.$

(A) a ; (B) b ; (C) 1 ; (D) $a+b$.

【解】 应选择 B. 因为 $\sqrt[n]{a^n + b^n} = b \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}$, 故原极限值为 b .

【例3】 求下列极限时, 能使用洛比达法则的是[$\quad \quad \quad$].

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x};$

(B) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$

(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$

(D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right).$

【解】 应选择 D. 因为此极限为 $\infty \cdot 0$ 型, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

C 不存在, 注意 $x \rightarrow \infty$ 包含 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 两种情形. A, B 不满足洛比达法则的条件.

【例 4】 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是 [].

- (A) 无穷小; (B) 有界的, 但非无穷小;
(C) 无界的, 但非无穷大; (D) 无穷大.

【解】 应选择 C. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2}$ 是无穷大量, 而 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$. 有界变量与无穷大的乘积并不一定是无穷大. 实际上, $\sin \frac{1}{x}$ 当 $x = \frac{1}{2k\pi}$ ($k = 1, 2, \dots$) 时, 其值为 0; 当 $x = \frac{1}{2k\pi + \frac{1}{2}\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时, 其值为 1. 故当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 既不是无穷小量, 又不是无穷大量, 也不是有界变量. 它是无界的.

练 习 1-2

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 的值是 [].

- (A) 1; (B) ∞ ; (C) 0; (D) 不存在.

2 无穷大量与有界量的关系是 [].

- (A) 无穷大量可能是有界量; (B) 无穷大量一定不是有界量;
(C) 有界量可能是无穷大量; (D) 不是有界量就一定是无穷大量.

3 下面运算正确的是 [].

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0;$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x \sin \frac{1}{x} \right)'}{(\cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos x}{\sin x}$ 不存在, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在;

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{\cos x} = 1;$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \cdot 1 = 1.$

4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = [].$

- (A) 0; (B) 1; (C) 不存在; (D) ∞ .

5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{|x|} - 1}{x} = [].$

- (A) 1; (B) -1; (C) 0; (D) 不存在.

三、主观题

(一) 利用代数方法求极限

【例1】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!}$.

【解】 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 3k + 2 - 1}{(k^2 + 3k + 2)k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+2)!} \right]$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right] = \frac{3}{2}.$

【例2】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)}{(n+1) + 2(n+2) + \cdots + n(n+n)}.$

【解】 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)}{n(1+2+3+\cdots+n) + (1+2^2+3^2+\cdots+n^2)}.$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] / \left(1 - \frac{1}{2} \right)}{n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{12}{5}.$

【例3】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})], \quad (|x| < 1).$

【解】 此题应设法变形, 否则很难计算. 可以乘以因子 $\frac{1-x}{1-x}.$

原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^n})}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$

【例4】 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2^4} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} \right)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$

【解】 可以从例2和例3的解法中得到启发:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) x_n = \left(1 - \frac{1}{2^4} \right) \left(1 + \frac{1}{2^4} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} \right) = 1 - \frac{1}{2^{2n+1}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{2n+1}} \right) = \frac{4}{3}.$$

练习 1-3

1 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [e^{(2+\frac{1}{n})} + e^{(2-\frac{1}{n})} - 2e^2]$, 提示: 提取 $e^{(2-\frac{1}{n})}$.

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$

3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 - 1}, \quad 4 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}.$

5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 \sqrt{3 \sqrt{3 \cdots \sqrt{3}}}}$ (共有 n 个根号).

6 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{1+u^3}}{1+u}.$

7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n} - n\pi).$

8 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-nx}}{1 + e^{-nx}} \quad (x < 0).$

$$9 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}. \quad 10 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

(二) 利用定义或准则研讨极限

【例1】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$.

【解】 令 $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ ($h_n > 0$), 则

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2. \text{ 即 } 0 < h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则 $h_n \rightarrow 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

实际上, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ 可以看成极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}$ 的一种特例, 即取 x 为正整数列, 而对于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}$ 是很容易利用洛比达法则求得其极限的.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = e^0 = 1.$$

另外, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 是一个很重要的结论, 它在以后的学习中还会用到.

【例2】 已知 $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, $x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$, $\cdots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ($a > 0$).

【解】 这是一个单调增加且有界的数列, 显然 $x_{n-1} < x_n$;

又 $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$, 于是 $x_n^2 = a + x_{n-1}$.

$x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n} < \frac{a}{\sqrt{a}} + 1 = \sqrt{a} + 1$, 故 x_n 有界.

由极限存在准则 I, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 不妨假定 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + x_{n-1}), \text{ 得 } A^2 = a + A, \text{ 解得 } A = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

由于 $a > 0$, 故负值舍去. 最后得 $A = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$.

【例3】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$.

【解】 $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} \leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} = \frac{1}{2}$, 类似地 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \frac{1}{2}$.

由夹逼准则 原式 $= \frac{1}{2}$.

【例4】 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_x^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt$.

【解】 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $1 - 2t^2 \leq \cos 2t \leq 1$. 所以当 $x > 1$ 时, 有

$$\int_x^1 \frac{1-2t^2}{4t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{1}{4t^2} dt$$

$$\text{即 } -\frac{3}{4x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{x} \int_x^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x}$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_x^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt = \frac{1}{4}.$$

练习 1-4

- 1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(2n)^3} \right)$.
- 2 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- 3 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$.
- 4 设 $x_1 > a > 0$, 且 $x_{n+1} = \sqrt{ax_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- 5 设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}$.

(三) 利用两个重要极限求极限

这里所说的两个重要极限是指 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

当然, 在解题过程中也可以利用其变形, 例如, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ 等.

【例 1】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(x + \cos x^2) \ln(1+x)}$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + \cos x^2} \cdot \frac{2\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \frac{\sin x}{x} + x \sin \frac{1}{x} \right] = 2$.

【例 2】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1)$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3} \right)^{\frac{3}{a^x + b^x + c^x - 3} \cdot \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3} \cdot \frac{1}{x}}$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x} + \frac{c^x - 1}{x} \right) = \frac{1}{3} (\ln a + \ln b + \ln c)$
 $= \frac{1}{3} \ln(abc)$

故原式 $= e^{\frac{1}{3} \ln(abc)} = (abc)^{\frac{1}{3}}$.

【例 3】 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^{\frac{4x}{x-1}}$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(1 + \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{x-1}} \right]^{\frac{4x}{x+1}}$
 $= \left[\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{x-1}} \right]^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x}{x+1}} = e^2$.

【例 4】 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$

【解】 注意到 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{\sin^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{\sin^2 t} = -\frac{1}{2}$

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} [1 + (\cos t - 1) \frac{1}{\cos t - 1}]^{\frac{\cos t - 1}{\sin^2 t} \cdot \cos^2 t} = e^{-\frac{1}{2}}$$

练习 1-5

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, \quad 2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x}, \quad 4 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{2x+1}.$$

$$5. \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x].$$

$$6 \quad \text{设 } a, b \text{ 为常数, 且 } a > 0, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{ax}) \ln\left(1 + \frac{b}{x}\right).$$

(四) 利用等价替换求极限

【例 1】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{\sin^4 2x}.$

【解】 这是呈 $\frac{0}{0}$ 型的未定式, 可以使用洛比达法则, 但是, 这样计算相当麻烦且很容易出现错误. 如果先做等价无穷小替换, 则会简洁得多.

因为 $\sin^4 2x \sim (2x)^4$, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{(2x)^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 2xe^{-x^2}}{64x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + e^{-x^2}}{32x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{-x^2}}{64x} = -\frac{1}{32}. \end{aligned}$$

【例 2】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$

【解】 原式 = $\exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(5 - \frac{4}{\cos x}\right)}{(3x)^2}$

$$= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4 \sin x}{\cos^2 x}}{\left(5 - \frac{4}{\cos x}\right) \cdot 18x} = e^{-\frac{2}{9}}.$$

【例 3】 求 $\lim_{x \rightarrow 1} [1 + 3 \tan(x-1)]^{\frac{1}{\ln x}}.$

【解】 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} [1 + 3 \tan(x-1)]^{\frac{1}{\ln(1+(x-1))}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} [1 + 3(x-1)]^{\frac{1}{x-1}} = e^3.$$

注意 这里使用了前面内容提要中补充的公式, 利用此公式可以简化许多计算, 例如

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{\tan x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}} = e.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x - x}}\right]^{\frac{\sin x - x}{x^3}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

注意这里 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0, x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$.

【例 4】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(e^{2x} - x^2) - 2x}.$

$$\begin{aligned}\text{【解】 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - \ln e^x}{\ln(e^{2x} - x^2) - \ln e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin^2 x}{e^x}\right)}{\ln\left(1 - \frac{x^2}{e^{2x}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x / e^x}{-x^2 / e^{2x}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot (e^x) = -1.\end{aligned}$$

练习 1-6

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x \tan x} - 1}.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^3 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}.$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos \sqrt{x - \sin x}}.$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x \sin x}.$$

$$6 \quad a > 0, a \neq 1, \text{求} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right).$$

(五) 利用洛比达法则求极限

$$\text{【例 1】 求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1 - t)^2 dt}{x \sin^4 x}.$$

$$\begin{aligned}\text{【解】 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1 - t)^2 dt}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{5x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - x - 1)(e^x - 1)}{20x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{10x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{20x} = \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

$$\text{【例 2】 求} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

【解】 这是 1^∞ 型未定式,

$$\text{注意到} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{1} = 0$$

$$\text{故} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\sin x - x}} \right]^{\frac{\sin x - x}{x^2}} = e^0 = 1.$$

$$\text{【例 3】 求} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{ax})}{2x + 3} \quad (a < 0)$$

【解】 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{ax})}{2x + 3} = 0$, 而

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{ax})}{2x + 3}$ 为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 使用洛比达法则

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{ax})}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{ae^{ax}}{1 + e^{ax}}}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2 e^{ax}}{2ae^{ax}} = \frac{a}{2}.$$

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 2e^{ax})}{2x + 3}$ 不存在.

$$\text{【例 4】 求} \lim_{x \rightarrow +0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

【解】 这是 ∞^0 型未定式, 仍须利用取对数方法化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

$$\text{令 } y = (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}, \quad \ln y = \frac{1}{\ln x} \ln \cot x = \frac{\ln \cot x}{\ln x}.$$

当 $x \rightarrow +0$ 时, 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 应用洛比达法则

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \cot x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{\cot x} \cdot \csc^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = -1.$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow +0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}.$$

此题利用“结论补充”的公式 12 立刻有

$$\text{原式} = \exp \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\csc^2 x}{(\cot x) \cdot \frac{1}{x}} = \exp \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = e^{-1}.$$

练 习 1-7

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} (a, b > 0).$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{n}{x}}.$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{\sin^{10} x}.$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x - 1)^3}{\int_x^0 \tan(t^2) dt}.$$

(六) 确定极限式中的常数

【例 1】 求 a 值, 使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \int_{-\infty}^a te^{2t} dt$.

$$\text{【解】} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{2a} \cdot 2a+x} = e^{2a},$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_{-\infty}^a te^{2t} dt &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a te^{2t} dt \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} te^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} \right) \Big|_c^a = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{2a} \end{aligned}$$

$$\text{令 } e^{2a} = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{2a} \text{ 得 } a = \frac{5}{2}.$$

【例 2】 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1-x} = 5$, 求 a 与 b 的值.

【解】 显然应有 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$, 因为若不然等式就不会成立, 这样, 左端极限就呈

$\frac{0}{0}$ 型, 利用洛比达法则就有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + ax + b)'}{(1-x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+a}{-1} = -(2+a) = 5.$$

故 $a = -7$, 再利用 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$, 得到 $b = 6$.

【例 3】 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{ax^2 - bx + c}) = 2$, 求 a 与 b 的值.

$$\begin{aligned}
\text{【解】} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{ax^2 - bx + c}) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x - \sqrt{ax^2 - bx + c})(5x + \sqrt{ax^2 - bx + c})}{5x + \sqrt{ax^2 - bx + c}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25x^2 - (ax^2 - bx + c)}{5x + \sqrt{ax^2 - bx + c}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(25-a)x^2 + bx - c}{5x + \sqrt{ax^2 - bx + c}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(25-a)x + b - \frac{c}{x}}{5 + \sqrt{a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}} = 2.
\end{aligned}$$

故
$$\begin{cases} 25-a=0 \\ \frac{b}{5+\sqrt{a}}=2 \end{cases} \quad \text{解得 } a=25, b=20.$$

【例4】 试求正常数 a 与 b , 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = 1$.

【解】 使用洛比达法则有

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b - \cos x} \\
&\stackrel{\text{必有 } b=1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{\sqrt{a}} = 1, \text{ 故 } a=4.
\end{aligned}$$

练习 1-8

1 设 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax - x + 4}{x+1} = l$, 求 a 和 l 的值.

2 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,

$$f(x) = \begin{cases} \left[\left(\frac{1+x}{e} \right)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ e^k, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{求 } k \text{ 值.}$$

3 $f(x) = \frac{px^2 - 2}{x^2 + 1} + 3qx + 5$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, p, q 取何值时 $f(x)$ 为无穷小量? p, q 取何值时为无穷大量?

4 从条件 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$ 出发决定常数 a 和 b .

5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + b}{e^x - a} \cdot \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = 5$, 求 a, b 的值.

(七) 利用导数定义和皮亚诺代换求极限

【例1】 设 $f(x)$ 二阶连续可导, 且 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 6$, 试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

$$\begin{aligned}
\text{【解】} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\sin^2 x) \cdot \sin 2x}{4x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\sin^2 x) \cdot \sin 2x}{2\sin^2 x \cdot 2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\sin^2 x) - f'(0)}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} f''(0) = \frac{6}{2} = 3.$$

【例2】 设 $f(a) > 0$, $f'(a)$ 存在, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f\left(a - \frac{1}{n}\right)} \right]^n$.

【解】 原式属于 1^∞ 型的极限, 但是, 不能使用洛比达法则, 因为 n 是整标变量.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f\left(a - \frac{1}{n}\right)} \right]^n &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln f\left(a + \frac{1}{n}\right) - \ln f\left(a - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \left[\ln f\left(a + \frac{1}{n}\right) - \ln f(a) \right] - \left[\ln f\left(a - \frac{1}{n}\right) - \ln f(a) \right] \right\} \\ &= e^{2 \frac{d}{dx} [\ln f(x)] \big|_{x=a}} = e^{\frac{2f'(a)}{f(a)}}. \end{aligned}$$

【例3】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}$.

【解】 利用皮亚诺代换 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^3)$,

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) x^4 + o(x^5), \sin x^2 \sim x^2. \text{ 有}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) x^4 + o(x^5) \right)}{\left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - (1 + x^2 + o(x^3)) \right] x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8} x^4 + o(x^5)}{-\frac{3}{2} x^4 - o(x^5)} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

【例4】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$.

【解】 $\arcsin x = x + \frac{1}{6} x^3 + o(x^4)$, $\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^4)$.

$$\arctan x = x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^4), \tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^4).$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{6} x^3 - x + \frac{1}{6} x^3 + o(x^4)}{x - \frac{1}{3} x^3 - x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^4)} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{o(x^4)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^3}} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

练习 1-9

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cot x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}.$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x^6 + \frac{\pi}{2}\right)}{2x \sin x^4}.$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

$$6 \quad \text{设 } f(x) \text{ 二阶可导, 在 } U(\delta, \delta) \text{ 内, } f(x) \neq 0, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(0) = 4, \text{ 求}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

(八) 利用定积分定义和收敛级数性质求极限

$$\text{【例 1】} \quad \text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{1}{1+x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【例 2】} \quad \text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\text{【例 3】} \quad \text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \ln \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{1}{n} \left[\ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \cdots + \ln \frac{n}{n} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 原式} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \cdots + \ln \frac{n}{n} \right] \\ &= \int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \ln x \, dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [x \ln x - x]_{\epsilon}^1 = -1 \end{aligned}$$

$$\text{注} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \ln \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\ln \epsilon}{\frac{1}{\epsilon}} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\epsilon}}{-\frac{1}{\epsilon^2}} = 0$$

$$\text{【例 4】} \quad \text{设 } a > 1, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^n} \right).$$

【解】 实际上, 所求极限就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ 的和.

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, 取 $x = \frac{1}{a}$ 即可.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right]' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

令 $x = \frac{1}{a}$ 得