出 版 前 言

本书是四川大学数学系编《高等数学》第二册的第二版．本版对第一版的内容作了适当精简，体系上作了一些调整，增加了习题答案．本书主要内容为空间解析几何和矢量代数；多元函数微分学；重积分，曲线积分，曲面积分；矢量分析初步；无穷级数，广义积分等．

本书由周城璧同志编写，贾瑞霞同志选配习题及答案，可供综合大学和师范院校物理类专业作为教材．

高等学校教材

高 等 数 学

（物理类专业用）

（第二版）

第二册

四川大学数学系高等数学教研室　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

文字六〇三厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印张 13　字数 314 000

1978 年 8 月第 1 版　1988 年 4 月第 2 版　1988 年 4 月第 1 次印刷

印数 00,001—16,130

ISBN7-04-000861-0/O·332

定价 2.45 元

第六章　空间解析几何和矢量代数

第一节　空间直角坐标

§6.1.1　空间点的直角坐标

为了确定空间中一点的位置，需要建立空间的点与数组之间的联系.

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般有相同的量度单位，这三条轴分别叫做 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)，z 轴(竖轴)，统称坐标轴. 如果将右手的拇指和食指分别指着 x 轴和 y 轴的正方向，则中指所指的方向即为 z 轴的正方向. 这样的三条坐标轴组成的空间直角坐标系叫做右手坐标系，点 O 叫做坐标原点. 否则称为左手坐标系.

任意两条坐标轴可以确定一个平面，如 x 轴和 y 轴确定 xOy 面，依此类推，y 轴和 z 轴确定 yOz 面，z 轴和 x 轴确定 zOx 面，这三个面统称为**坐标面**. 三个坐标面把空间分为八个部分. 每一部分称为一个**卦限**. 把含三个坐标轴正向的那个卦限称为第一卦限，在 xOy 平面的上部如图 6.1 所示，依反时针顺序得 I，II，III，IV 四个卦限. 在 xOy 平面下部与第 I 卦限相对的为 V 卦限，依反时针顺序得 VI，VII，VIII 三个卦限(图 6.1).

取定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与数组之间的对应关系.

设 M 为空间中的一点，过 M 点作三个平面分别垂直于三条坐标轴，它们与 x 轴，y 轴，z 轴的交点依次为 P，Q，R(图 6.2). 设

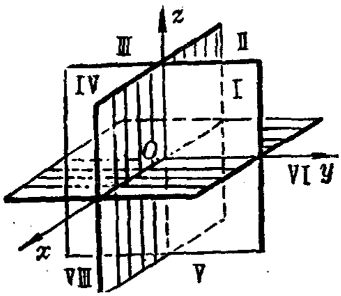

图 6.1

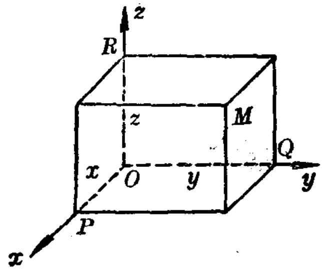

图 6.2

P, Q, R三点在三个轴上的坐标依次为x, y, z. 这样，空间的一点M就唯一地确定了一个有序数组(x, y, z)，称为点M的直角坐标，其中x称为点M的横坐标，y称为纵坐标，z称为竖坐标，记为$M(x, y, z)$.

反过来，给定了数组(x, y, z)，我们依次在x轴，y轴，z轴上取与x, y, z相应的点P, Q, R，然后过点P, Q, R各作平面分别垂直于x轴，y轴，z轴，这三个平面的交点M，就是以数组(x, y, z)为坐标的点.

§6.1.2 两点间的距离

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点，我们可用两点的坐标来表达它们间的距离d.

过M_1，M_2分别作垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成的长方体以M_1M_2为对角线(图 6.3).根据勾股定理可以证明

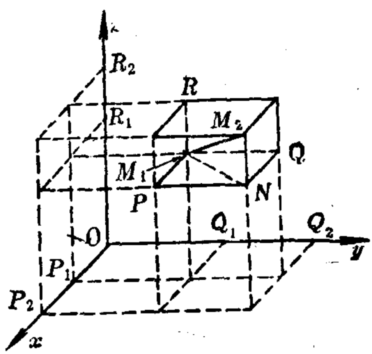

图 6.3

长方体对角线的长度的平方，等于它的三条棱的长度的平方和，即

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$
$$=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2.$$

由于$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$,

$|M_1Q|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$,

$|M_1R|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$,

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间中两点间距离的公式. 特殊地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

第二节 矢量代数

在研究力学、物理学以及其它应用科学时所遇到的量，可以分为两类. 一类完全由数值决定，例如质量、温度、时间、面积、体积、密度等，这一类量叫做**数量**. 另一类量，只知数值大小还不够，还需说明它们的方向，例如力、速度、加速度等，这一类量叫做**矢量**（**向量**）.

我们可以把任何矢量用具有一定长度和一定方向的线段来表示，这线段的长度表示所讨论矢量的大小，线段的方向表示该矢量的方向. 因此，从几何上看，矢量就是在空间中有一定方向的线段.

如果两矢量满足下面两个条件:（1）长度相等且平行(即在同一直线上或在彼此平行的直线上)，（2）两矢量的指向相同，就说这两矢量是相等的. 于是一矢量平行移动后仍与原矢量相等.

必须注意矢量的起点和终点，若对调它们的位置，就得到另一矢量，它的长度与原矢量相等，但方向相反. 由于矢量在空间中可以平行移动，矢量的起点可放在空间任一点，但最好选择某点O作

起点，把所有矢量都看作是从这点出发. 若矢量起点为O，终点为M，记为$\overrightarrow{OM}$. 若起点为A，终点为B，记为$\overrightarrow{AB}$.

矢量的长度叫做矢量的**模**. 矢量$\overrightarrow{AB}$的模用$|\overrightarrow{AB}|$来表示. 直角坐标系中，如以坐标原点O为起点，向已知点M引矢量$\overrightarrow{OM}$，这矢量称为点M对于点O的**矢径**.

§6.2.1 矢量运算

1. 矢量加法

根据力学中关于力，速度及加速度的合成法则，我们定义两矢量的和如下.

不在同一直线上的两矢量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的和是指以这两矢量为两边所做的平行四边形的对角线矢量$\overrightarrow{OC}$(图 6.4)记作

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

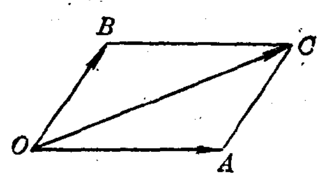

图 6.4

如果两矢量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$在同一直线上，我们定义它们的和是这样一个矢量:当$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$的指向相同时，则和矢量的方向与原来两矢量的方向相同，长度等于两矢量长度的和；当$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的指向相反时，则和矢量的方向与较大的矢量方向相同，而长度等于两矢量长度的差.

长度为零的矢量，叫做**零矢量**，记作 $\mathbf{0}$，这个特殊矢量的方向可看作任意的. 长度相等而方向相反(平行但指向相反)的两个矢量的和是零矢量.

对于矢量，加法交换律显然成立，即

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$$

在(图 6.4) 中可见$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$. 于是得矢量加法的三角形法则: 在第一矢量$\overrightarrow{OA}$的终点$A$引第二矢量$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，封闭这折线$OAC$

的矢量$\overrightarrow{OC}$就是$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的和，它的起点合于第一矢量的起点，终点合于第二矢量的终点.

若要求三个矢量*$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$的和，可先求$\boldsymbol{A}$及$\boldsymbol{B}$的和$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，再与$\boldsymbol{C}$相加即得$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，由图6.5可见，若以$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$相加，会得同一结果，因之，我们得公式

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C},$$

即加法的结合律成立.

我们注意到矢量$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$就是封闭这折线$OABC$的矢量$\overrightarrow{OC}$，同时由于加法的交换律和结合律，可得到下面一般法则：

以任何次序相继作矢量$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$，并以前一矢量的终点作为次一矢量的起点，再由第一矢量的起点至最后一矢量的终点所得折线的封闭矢量即为矢量$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$的和.

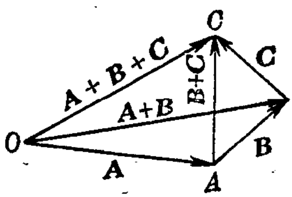

图 6.5

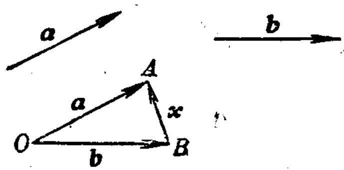

图 6.6

2. 矢量的减法

矢量的减法定义为加法的逆运算，若$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，则矢量$\overrightarrow{BA}$就定义为矢量$\overrightarrow{OA}$与矢量$\overrightarrow{OB}$的差：

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}.$$

矢量差的作图法如图6.6.

取O点为起点，作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则向量$\overrightarrow{BA}$满足表达式$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，它就是差向量$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

---

* 我们约定，用单个字母表示矢量时，这个字母排成黑体.

3. 矢量与数量的乘法

(1) 设已知矢量 $\boldsymbol{A}$ 和实数 m，则它们的乘积 $m\boldsymbol{A}$ 仍是一个矢量，这矢量的模等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模与数量 $|m|$ 的乘积，并且平行于矢量 $\boldsymbol{A}$，如 $m>0$，则它的指向与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向相同；如 $m<0$，则它的指向与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向相反；如 $m=0$，它就成为零矢量.

(2) 特别当 $m=-1$ 时，

$$m\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}\text{，记为}-\boldsymbol{A}，$$

$-\boldsymbol{A}$ 的模与 $\boldsymbol{A}$ 的模相等而方向相反．称为$\boldsymbol{A}$的反矢量

若 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 平行，则 $\boldsymbol{A}_2=\lambda\boldsymbol{A}_1$($\lambda$ 为一数量)．反之若 $\boldsymbol{A}_2=\lambda\boldsymbol{A}_1$，则 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 平行.

读者可以用作图法证明

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

(3) 矢量与数量的乘积有下列性质：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为任意矢量．λ，μ 为任意实数

1) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$ (分配律)

2) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$

3) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$ (结合律)

证 1) 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 时，等式显然成立．当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 且 λ，$\mu>0$ 时，等式两边的矢量都是将 $\boldsymbol{A}$ 放大 $\lambda+\mu$ 倍，所以显然相等，其它情形根据 $\lambda,\mu,\lambda+\mu$ 的正负由定义同样可证明.

2) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 就是将矢量和的三角形伸长（或缩短）λ 倍(图6.7).

3) 等式两边的矢量是同向的，例如 $\lambda<0$ 而 $\mu>0$时，两边的矢量都与 $\boldsymbol{A}$ 反向，从而它们是同向的，至于长度，由定义

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{A})|=|\lambda||\mu\boldsymbol{A}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{A}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{A}|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{A}|$$

即等式两边的矢量等长，故3)的等式成立．其它情况可类似证明.

(4) 长度为一个单位长的矢量叫做**单位矢量**.

用A^0表示与A同方向的单位矢量，则有

$$A=|A|A^0,$$

或 $A^0=\frac{A}{|A|}$(A不为零矢量).

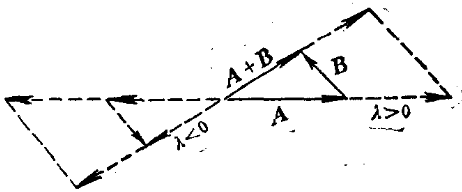

图 6.7

4. 矢量的投影

(1) 空间二轴的夹角

设空间两轴 l_1 和 l_2 相交于点 S，在两轴决定的平面上，把其中一轴绕点 S 旋转，使它的正向与另一轴的正向重合时所需要旋转的角度，就称为是这两轴间的夹角，记为$(\widehat{l_1,l_2})$或$(\widehat{l_2,l_1})$. 一般规定二轴间的角限定在 0 与 π 之间，且不区分轴的顺序.

如二轴 l_1', l_2' 不相交，则可自空间的任何一点 S 引二轴 l_1,l_2，使分别与 l_1',l_2' 平行，且有相同指向，l_1,l_2 的夹角就定义为l_1',l_2'间的夹角(图 6.8).

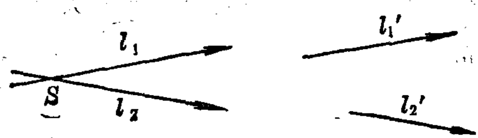

图 6.8

空间的轴 l 与矢量 A 间的夹角，我们用轴 l 与另一同矢量 A 的正方向一致的轴 l' 间的角来定义.

同样二矢量 A,B 间的角用二轴 l,l' 间的角来定义，这二轴的正方向分别与A,B的正方向一致，矢量A,B间的角记作$(\widehat{A,B})$或$(\widehat{B,A})$.

(2) 空间点与矢量在轴上的投影

1) 设已知空间一点 A，通过 A 点作平面 α 垂直于轴 l，则平面 α 与轴 l 的交点 A' 叫做点 A 在轴 l 上的投影(图 6.9).

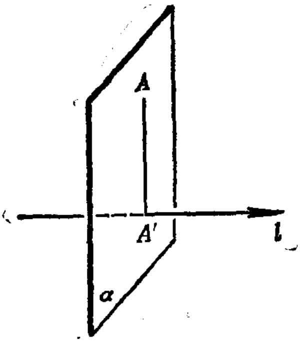

图 6.9

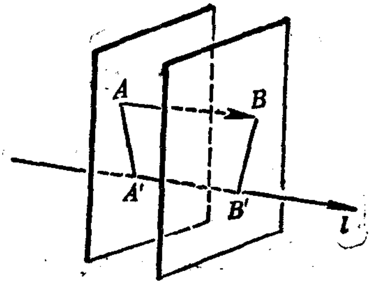

图 6.10

2) 若设已知矢量 $\overrightarrow{AB}$的起点 A 和终点 B 在轴 l 上的投影分别为点 A' 和 B'（图 6.10），则轴 l 上的有向线段 $\overline{A'B'}$的值（记为 $A'B'$）叫作矢量 $\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影，记作

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=A'B',$$

轴 l 叫做**投影轴**.

定理 矢量 $\overrightarrow{AB}$在任何轴 l 上的投影等于矢量的模乘以轴与矢量间的夹角 φ 的余弦.

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

证 通过矢量 $\overrightarrow{AB}$的起点 A 引轴 l' 与轴 l 平行，且有相同正方向，则轴 l 和矢量 $\overrightarrow{AB}$间的夹角 φ 等于轴 l' 和 $\overrightarrow{AB}$间的夹角，且有

$$\mathrm{prj}_l\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_{l'}\overrightarrow{AB}.$$

由图 6.11

$$\mathrm{Prj}_{l'}\overrightarrow{AB}=AB''=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi,$$

所以 $$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

当 φ 为锐角时，投影为正；

当 φ 为钝角时，投影为负；

当 φ 成直角时，投影为 0.

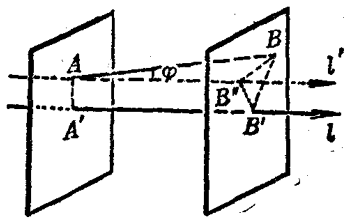

图 6.11

容易看出，相等的矢量，在同一轴上的投影相等.

读者可以推证：有限个矢量的和矢量在轴 l 上的投影，等于各矢量在轴 l 上投影的和，即

$$\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_n)=\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{A}_1+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{A}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{A}_n.$$

5. 矢量的分解与矢量的坐标

设矢量$\overrightarrow{OM}$的起点O是直角坐标系的原点，而终点M的坐标$OA=x, OB=y, OC=z$（图 6.12）.

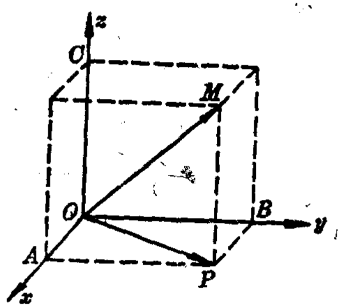

图 6.12

今考察折线$OAPM$和它的封闭线OM，由矢量加法的一般法则得：

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

矢量$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$叫做矢量$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的**分矢量**.

在坐标轴Ox, Oy, Oz上以O为起点分别取三个单位矢量，其方向与坐标轴的方向相同，并分别以$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$表示，这三个单位矢量叫做**基本单位矢量**.

点M的坐标是$OA=x, OB=AP=y, OC=PM=z$；因此OA, OB, OC正是矢量$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的投影. 又$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的分矢量为

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}.$$

所以
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

式中x, y, z是矢量$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的投影. 在矢量的起点为原点O的情况下，x, y, z也正是矢量的终点M的坐标.

一般地，如果矢量$\boldsymbol{A}$在x轴，y轴，z轴上的投影依次为x, y, z，则其在x轴，y轴，z轴上的分矢量为$x\boldsymbol{i}, y\boldsymbol{j}, z\boldsymbol{k}$，故有

$$\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

x, y, z叫做$\boldsymbol{A}$的坐标，记为$\boldsymbol{A}=\{x, y, z\}$.

例如 $\boldsymbol{A}=\{2,3,1\}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+1\boldsymbol{k}$.

利用矢量的坐标，其加、减及矢量与数量乘法的运算如下：

设 $$\boldsymbol{A}=\{x_1,y_1,z_1\},\boldsymbol{B}=\{x_2,y_2,z_2\},$$

则 $$\boldsymbol{A}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{B}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

因此有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(x_1-x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-z_2)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{A}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k},\qquad (\lambda\text{ 为一定数}).$$

例1 设两定点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求矢量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标(图6.13).

解 作矢量 $\overrightarrow{OM_1}$，$\overrightarrow{OM_2}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$，

则 $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$，

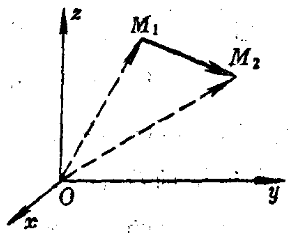

图 6.13

但 $$\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$$
$$=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$$
$$=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

所以 $$\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$
$$=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}=\overrightarrow{M_1M_2}.$$

例 2 求证矢量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ 平行的充要条件是 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3 成比例，或 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

证 设 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3 成比例，即有数 λ，使得

$$a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3,$$

即 $$\{a_1,a_2,a_3\}=\{\lambda b_1,\lambda b_2,\lambda b_3\}=\lambda\{b_1,b_2,b_3\},$$

或 $$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b},$$

按数乘矢量的定义 $$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}.$$

反过来，设 $$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}.$$

(1) 若 $\boldsymbol{b}$ 为零矢量，即 $b_1=b_2=b_3=0$，则有$\frac{0}{a_1}=\frac{0}{a_2}=\frac{0}{a_3}$即对应坐标成比例；

(2) 若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，那么将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点重合，因 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，两矢量在一直线上，即有某数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，写成坐标形式即

$$a_1=\lambda b_1,\ a_2=\lambda b_2,\ a_3=\lambda b_3,$$

或
$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda.$$

6. 矢量的模，方向余弦，方向数

(1) 矢量的模

设矢量$\overrightarrow{OM}$的起点为原点 O，终点为M(不论起点在哪里，可将起点移至原点，其在坐标轴上的投影总是相等的).

矢量$\overrightarrow{OM}$在坐标轴上的投影为 $OA=x, OB=y, OC=z$.

点M在 xOy 面的投影为 P，于是由勾股定理得

$$|OP|^2=|OA|^2+|OB|^2,$$
$$|OM|^2=|OP|^2+|PM|^2=|OP|^2+|OC|^2,$$

因此

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OM}|^2&=|OM|^2\\&=|OP|^2+|OC|^2\\&=|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2\\&=x^2+y^2+z^2,\end{aligned}$$

即
$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1}$$

(2) 方向余弦

若矢量$\overrightarrow{OM}$与坐标轴 Ox，Oy，Oz 的正向间的夹角顺次为 α，β，γ，则 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 叫做这矢量的方向余弦.

因
$$OA=|\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,$$
$$OB=|\overrightarrow{OM}|\cos\beta,$$
$$OC=|\overrightarrow{OM}|\cos\gamma,$$

所以

$$\cos\alpha=\frac{OA}{|\overrightarrow{OM}|},\quad \cos\beta=\frac{OB}{|\overrightarrow{OM}|},\quad \cos\gamma=\frac{OC}{|\overrightarrow{OM}|}.$$

因此得:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\\&=\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\\&=1.\end{aligned}\tag{3}$$

即任何矢量的方向余弦的平方和等于1. 由此容易推出单位矢量 $\boldsymbol{a}^0$ 可表示为 $\boldsymbol{a}^0=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$.

(3) 方向数

与方向余弦成比例的一组实数 l,m,n,即

$$\frac{l}{\cos\alpha}=\frac{m}{\cos\beta}=\frac{n}{\cos\gamma}$$

叫做**方向数**.

令上式的比值为 κ,则

$$l=\kappa\cos\alpha,\quad m=\kappa\cos\beta,\quad n=\kappa\cos\gamma,$$

由 $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

得 $$l^2+m^2+n^2=\kappa^2 \quad 或 \quad \kappa=\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

所以

$$\cos\alpha=\frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos\beta=\frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

上式应同时取正号或同时取负号.

例 设两定点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求这两点间的距离 d.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$,

因此得

$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

§6.2.2 两矢量的数量积①

从物理学知道，一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于物体，这个力所作的功的大小，由力 $\boldsymbol{F}$ 的大小、物体受力作用后产生的位移 $\boldsymbol{S}$ 以及 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的夹角的余弦决定. 例如，一个物体在重力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿斜面下滑(图 6.14)，用 $\boldsymbol{S}$ 表位移矢量（即表示移动大小与方向的矢量），$\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的夹角为 φ，则重力所作的功为：

$$W=|\boldsymbol{S}||\boldsymbol{F}|\cos\varphi.$$

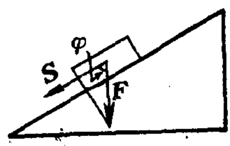

图 6.14

这种由两个矢量的长度及其夹角的余弦组成的算式在实际中经常遇到，由此我们给出矢量的数量积定义.

定义 两矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**数量积**等于两矢量的模和它们间的夹角的余弦的乘积，通常用 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 表示.

根据定义有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos(\widehat{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}). \tag{4}$$

数量积的记号中用一点"·"表示乘积，因此矢量间的数量积也叫做矢量间的点积.

因为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|\cos(\widehat{\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}})=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2,$$

---

① 数量积又称内积.