

高等数学教程

第三卷 第一分册

B. И. 斯米尔诺夫 著

聶灵沼 丁石孙 王萼芳译



人民教育出版社

简装本说明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少，本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

高等数学教程

第三卷 第一分册

В. И. 斯米尔诺夫著

聂灵沼 丁石孙 王萼芳译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

重庆新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0332 开本 787×1092 1/32 印张10 12/16
字数279,000 印数72,501—152,500 定价(6) ¥0.80

1954年9月新1版 1979年8月重庆第18次印刷

• 第四版序言

在这一版中,由于补充了新的材料,第三卷分成两部分。第一部分包括关于綫性代数,二次型理論和群論的全部材料。在这一部分中主要的补充是关于群論的。在編写这些补充材料的过程中,Д. К. 法捷耶夫給了我很大的帮助。特别是关于轉动群与劳倫次群單純性的闡明,按結構常数来建立群与群上的积分 [70, 81, 87, 88, 89, 90] 这些部分的材料的說明是属于他的。对于他在这本书的准备工作中所給予的帮助我表示极大的謝意。

В. И. 斯米尔諾夫

第一分册目次

第四版序言

第一章 行列式与方程组的解法..... 1

§ 1. 行列式及其性质 1

1. 行列式的概念 (1) 2. 排列 (6) 3. 行列式的基本性质 (11)

4. 行列式的计算 (17) 5. 例 (18) 6. 关于行列式乘法的定理 (25)

7. 长方形表 (28)

§ 2. 方程组的解法 32

8. 克兰姆定理 (32) 9. 方程组的普遍情形 (34) 10. 齐次方程组 (39) 11. 线性型 (42) 12. n 维矢量空间 (44) 13. 数量积 (51) 14. 齐次方程组的几何解释 (53) 15. 非齐次方程组的情形 (56) 16. 格拉姆行列式, 阿达马不等式 (59) 17. 常系数线性微分方程组 (63) 18. 函数行列式 (67) 19. 隐函数 (71)

第二章 线性变换和二次型.....75

20. 三维空间中的坐标变换 (75) 21. 实三维空间的一般线性变换 (79) 22. 共变的和逆变的仿射矢量 (87) 23. 张量的概念 (89)

24. 仿射正交张量的例子 (92) 25. n 维复空间的情形 (94) 26. 矩阵计算的基础 (99) 27. 矩阵的特征值与化矩阵成标准形式 (104)

28. U 变换和正交变换 (111) 29. 彭雅科夫斯基不等式 (116)

30. 数量乘积和模的性质 (118) 31. 矢量的正交化手续 (119) 32. 化二次型为平方和 (121) 33. 特征方程有重根的情形 (126) 34. 例 (131)

35. 二次型的分类 (133) 36. 雅科比公式 (137) 37. 同时化两个二次型成平方和 (138) 38. 微振动 (140) 39. 二次型特征值的极值性质 (142)

40. 厄密特矩阵和厄密特型 (144) 41. 可交换的厄密特矩阵 (150) 42. 化 U 矩阵成对角形式 (153) 43. 投影矩阵 (157) 44. 矩阵的函数 (161) 45. 无限维空间 (164)

46. 矢量的收敛 (170) 47. 完全正交矢量组 (174) 48. 无限多个变数的线性变换 (179) 49. 函数空间 (183) 50. 函数空间和空间 H 的关系 (186) 51. 线性函数运算符 (190)

第三章 群论基础和群的线性表示197

52. 线性变换群(197) 53. 正多面体群(200) 54. 劳伦次变换(203) 55. 置换(211) 56. 抽象群(216) 57. 子群(219)
58. 类和正规子群(223) 59. 例(226) 60. 群的同构和准同构(228) 61. 例(230) 62. 测地投影(232) 63. U 群和转动群(234) 64. 一般线性群和劳伦次群(240) 65. 群的线性变换表示(244) 66. 基本定理(248) 67. 阿倍尔群和一阶表示(253)
68. 两个变数的 U 群的线性表示(255) 69. 转动群的线性表示(262)
70. 关于转动群的单纯性的定理(266) 71. 拉普拉斯方程和转动群的线性表示(267) 72. 矩阵的直接乘积(273) 73. 群的两个线性表示的合成(276) 74. 群的直接乘积和它的线性表示(279) 75. 转动群的线性表示的合成 $D_j \times D_j$ 的分解(282) 76. 正交的性质(288)
77. 品格(292) 78. 群的正则表示(295) 79. 有限群表示举例(297) 80. 两个变数的线性群的表示(299) 81. 关于劳伦次群的单纯性的定理(303) 82. 连续群, 结构常数(305) 83. 无穷小变换(309) 84. 转动群(313) 85. 无穷小变换与转动群的表示(315) 86. 劳伦次群的表示(320) 87. 辅助公式(323) 88. 根据结构常数来建立群(325) 89. 群上的积分(327) 90. 正交性质例子(331)

第一章 行列式与方程組的解法

§ 1. 行列式及其性质

1. 行列式的概念 我們从解一个简单的代数問題,即从解一次方程組的問題来开始这一节。由于对这种問題的研究,我們获得了行列式的重要概念。

讓我們从研究一些最简单的特殊情形来开始。先取具有两个未知数的两个方程所成的方程組:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$$

未知数的系数 a_{ik} 带有两个指标,第一个指标說明这个系数出现在那一个方程中,而第二个說明它是那一个未知数的系数。

大家知道,这方程組的解具有下面的形式:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

再看由具有三个未知数的三个方程所成的方程組:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3,$$

这里我們仍用上面的关于系数的标记法,将头两个方程改写成下列形式:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}x_3,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}x_3.$$

按上面的公式,由这两个方程解未知数 x_1 与 x_2 , 即得

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{13}x_3)a_{22} - a_{12}(b_2 - a_{23}x_3)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$x_2 = \frac{a_{11}(b_2 - a_{23}x_3) - (b_1 - a_{13}x_3)a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

把这两个表达式代入方程组的最后一个方程中, 即得一个仅含未知数 x_3 的方程。最后解这个方程, 即得 x_3 的最终表达式:

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}. \quad (1)$$

我们来详细地研究一下这表达式的结构。首先看到, 将分母中未知数 x_3 的所有系数 a_{i3} 各用常数项 b_i 替换即得分子。这样, 还待阐明的只是组成分母的规律了。分母不含有常数项而是纯粹由方程组的系数组成的。先让我们把这些系数按它们在原来方程组中的位置写成一个正方形的表:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

这个表含有三行与三列。 a_{ik} 这些数叫做它的元素。 a_{ik} 的第一个指标表示它所在的行的序数, 而第二个则表示它所在的列的序数。现在写出(1)式的分母:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (3)$$

我们看到, 它是由六项组成的, 其中每一项是(2)中三个元素的乘积, 而且每个乘积含有每一行和每一列的元素。实际上, 这些乘积具有下面的形式:

$$a_{1p}a_{2q}a_{3r}, \quad (4)$$

其中 p, q, r 是整数 $1, 2, 3$ 的某一个一定的排列。如此, 正如所有第一指标一样, 所有第二指标也正是整数 $1, 2, 3$ 的全体, 因而乘积 (4) 确实含有每行和每列的一个元素。为要得到 (3) 式中所有的项, 只需要在乘积 (4) 中就第二指标 p, q, r 取所有可能的不同的排列。第二指标的所有可能的排列显然有以下六种:

$$1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 3, 2, 1. \quad (5)$$

由是, 我們即得 (3) 式的六项。但是我們看到, 乘积 (4) 在 (3) 式中出現时, 有一些带正号, 而另一些則带負号。于是只要再說明選擇正負号所依据的法則了。如我們所見, 带正号的那些乘积 (4) 的第二指标形成下列的排列:

$$1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2. \quad (5_1)$$

而带負号的那些乘积的第二指标形成下列排列:

$$1, 3, 2; 2, 1, 3; 3, 2, 1. \quad (5_2)$$

現在來說明排列 (5_1) 与排列 (5_2) 的区别。在一个排列中, 比較每一对数, 如果大的在小的前面, 則叫做一个逆序。我們来計算 (5_1) 中諸排列的逆序个数。其中第一个排列沒有逆序, 就是說逆序的个数为零。再看第二个排列, 逐次比較每一数与其后各数的大小, 我們看出, 这里有两个逆序。即一个是 2 在 1 前面, 一个是 3 在 1 前面。同样, 不难看到, (5_1) 中的第三个排列含有两个逆序。总之, 可以說在 (5_1) 中的所有排列都含有偶数个逆序。用完全同样方法来研究 (5_2) 中的排列, 我們看到, 它們都含有奇数个逆序。現在, 我們可以把表达式 (3) 中的正負号法則叙述如下: 乘积 (4) 中, 凡是第二指标所成排列的逆序数是偶数的, 出現在表达式 (3) 中时, 沒有任何改变。凡是第二指标所成排列的逆序数为奇数的, 出現在表达式 (3) 中时, 冠以負号。表达式 (3) 叫做对应于数表 (2) 的三阶行列式。現在不难把它推广到任意阶行列式的情形。

假定有 n^2 个数, 安排在一个 n 行 n 列的正方形的表內:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (11)$$

由上面直接可知,为要闡明行列式的性质,必須对排列的性质有較深的認識。我們立即轉向这个問題。

2. 排列 假設有任意的 n 个元素,把它們按一定的次序排列起来,我們把这叫做由这 n 个元素形成的一个排列。首先我們来証明,这样的不同的排列恰有 $n!$ 个。当 $n=2$ 时,这是显然的,因为两个元素可以形成两个不同的排列。当 $n=3$ 时,这只要数一下排列(5)的个数即可直接推知,那里的数 1, 2, 3 就是元素。不难知道,(5)已給出了由三个元素而成的所有可能的排列。現在用归納法来証明我們的論断对于任何的正整数 n 总是对的。假定我們的論断对某一个 n 成立,由此来証明它对于 $n+1$ 个元素也成立。就是說,假定 n 个元素产生 $n!$ 个排列,讓我們来考虑任何的 $n+1$ 个元素产生的排列。把这 $n+1$ 个元素記作:

$$C_1, C_2, \dots, C_{n+1}.$$

首先注意第一个元素为 C_1 的那些排列。为了要得到所有可能的这样的排列,应当把 C_1 放在第一个位置,然后写下其余 n 个元素的所有可能的排列。按照假定这样的排列的个数是 $n!$ 。因此,由 $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$ 形成的以元素 C_1 为首的排列总数是 $n!$ 。完全一样,由 $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$ 形成的以元素 C_2 为首的排列总数也是 $n!$ 。总的說来, $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$ 的不同排列总数等于

$$n!(n+1) = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) = (n+1)!,$$

这样,就証明了以上的論断。

当然,我們可以把从 1 开始的一些整数取作元素,以后我們就这样做。在一个排列中对調两个元素的位置,这样一个动作就叫做一个对換。显然可直接看出,由某一个排列經過一些对換可以得到任何一个其他的排列。例如,取四个元素的两个排列

1, 3, 4, 2; 2, 4, 1, 3。

由这里第一个排列經下列一串对換就得到第二个排列:

1, 3, 4, 2 $\rightarrow$ 2, 3, 4, 1 $\rightarrow$ 2, 4, 3, 1 $\rightarrow$ 2, 4, 1, 3。

为了把第一个排列变成第二个排列,这里我們用了三个对換。如果我們換个方式来施行对換,也可能由其他的方法利用对換把第一个排列变成第二个排列,換句話說,就是把第一个排列变成第二个排列所需要的对換的个数并不是一个确定的数。虽然可以用不同数目的对換把一个排列变成另一个排列。但是可以証明一件重要的事实:对于两个給定的排列,这些不同的对換数目或者全是偶数或者全是奇数。这也就是說这些数目总有同一的奇偶性。为了說明这一点,我們引用前一小节用过的逆序概念。試看由 n 个元素 $1, 2, \dots, n$ 形成的排列。按照递升的次序排列起来的排列

$$1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

叫做基本排列。如果一个排列中两元素的相互次序与它們在基本排列(12)中的相互次序相反(就是說大的在小的左边),这就叫做該排列中的一个逆序。凡逆序的数目为偶数的排列叫做第一类排列,而逆序数目为奇数的排列叫做第二类排列。下面这个定理对以下的論述来讲是基本的。

由一个对換而引起的逆序数目的改变是一个奇数。

取定某一个排列

$$a, b, \dots, k, \dots, p, \dots, s, \quad (13)$$

并且假設,我們把 k 与 p 的对換施于这个排列,就是說在排列中对調这两个元素的相互位置。經過这样的对換之后,元素 k 与 p 对于在 k 之左或在 p 之右的元素的相互位置保持不变。只有这排列中介于 k 与 p 之間的那些元素与 k, p 的相互位置有所改变,当然 k 与 p 的彼此相互位置也有所改变。我們来計算逆序改变的总数。假設在排列(13)中 k 与 p 之間总共有 m 个元素,并且設这些中間

元素与 k 比較得到 α 个順序与 β 个逆序, 又設它們与 p 比較得到 α_1 个順序与 β_1 个逆序, 显然有

$$\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 = m. \quad (14)$$

施行对換的結果, 順序变成逆序而且逆序变成順序。更确切地說, 如果元素 k 与某一个中間元素在对換前它是順序, 則在对換后就变成逆序, 而且反过来也对。对于元素 p 也是一样。因此, k 与 p 对于中間元素的逆序数目在对換之前总共是 $\beta + \beta_1$, 而在对換之后总共是 $\alpha + \alpha_1$, 就是說逆序数的改变是

$$\gamma = (\alpha + \alpha_1) - (\beta + \beta_1).$$

利用 (14), 这个数目可改写成

$$\gamma = (\alpha + \alpha_1) - (m - \alpha + m - \alpha_1) = 2(\alpha + \alpha_1 - m),$$

由此直接推出, 这个数 γ 是一个偶数。現在来看元素 k 与 p 的相互位置。如果在对換之前它們作成一個順序, 則在对換之后它們作成一個逆序, 而且反过来也对, 这就是說, 这里的逆序数的改变等于 1。因此, 由于对換而引起的逆序改变的总数是一个奇数。

現在来叙述从这定理所得到的一些推論。

系 I. 如果写出全部 $n!$ 个排列, 并且对于每一个排列作两个固定元素的对換, 例如 1 与 3 的对換。則全部第一类排列都变成第二类排列, 反过来也是如此, 总的說来, 我們仍然得到 $n!$ 个排列的全体。由此直接推出, 第一类与第二类排列的数目相等。

系 II. 任何一个排列都可以由基本排列經過一些对換得到。从上面定理直接推出, 凡可由基本排列用偶数个对換得到的那些排列作成第一类, 而凡可由基本排列用奇数个对換得到的那些排列則作成第二类。

系 III. 基本排列的选择完全可以任意。不用排列 (12) 而用其他任何一个排列作为基本排列都是可以的, 在这情况下, 規定逆序时, 自然就应当以該排列与这个基本排列比較, 就是說, 应当以

..., n , 于是我們应当把这个排列看作基本排列。它是由原来的基本排列用一个对换而得到的, 因此, 它原来是属于第二类的。所以原来的第二类排列对于这个新的基本排列而言成了第一类的排列而且反过来也是如此。因此, 对应于表(15)的行列式就是在公式(8)中出現的那些項的一个和, 但是, 由于剛才談到的第二指标所造成的排列的类的变更, 这个新和的各项的正負号与和(8)中相当項的正負号相反, 就是說, 当两列对調时, 行列式的值改号。对一二两列对調的情形我們已經証明了这个性质。对于任意两列对調的情形上述的証明也仍然适用, 例如, 下面的等式成立:

$$\begin{vmatrix} 1, 0, 3 \\ 2, 7, 6 \\ 5, 3, 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1, 3, 0 \\ 2, 6, 7 \\ 5, 0, 3 \end{vmatrix}.$$

第二个行列式是由第一个經二三两列对調而得到的。

現在再說明行列式的一个性质。取定和(8)中的某一項

$$(-1)^{[p_1, p_2, \dots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}. \quad (16_1)$$

只要調換上面乘积中的因子, 我們可以得到第二指标的 遞升排列, 这时第一指标形成某个排列 $q_1, q_2, \dots, q_n$, 上式就可以写成

$$(-1)^{[p_1, p_2, \dots, p_n]} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}. \quad (16_2)$$

从(16₁)到(16₂)的过程可以借一些因子間的对換来完成。每一个这样的对換不仅是第一指标所成的排列的对換同时也是第二指标所成的排列的对換。如果从(16₁)过渡到(16₂)所需要的对換的个数是偶数, 則由此可以推得, 排列 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 属于第一类。因为它既然可借偶数个对換变成基本排列 $1, 2, \dots, n$, 显然可知, 它也可借偶数个对換从基本排列得到。而且, 此时排列 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 也属于第一类, 因为它是借同样的偶数个对換从基本排列得到的。由同样的理由, 如果 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 属于第二类, 則

$q_1, q_2, \dots, q_n$ 也属于第二类。由此推出,

$$(-1)^{[p_1, p_2, \dots, p_n]} = (-1)^{[q_1, q_2, \dots, q_n]},$$

因此我們有

$$(-1)^{[p_1, p_2, \dots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n} = (-1)^{[q_1, q_2, \dots, q_n]} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \dots a_{q_n n}.$$

总之, 如果我们比较和(8)与和(10)的对应项, 则可看出, 这两个和恰好全同, 在和(10)中行所起的作用正如在和(8)中列所起的作用。由我們的討論直接推得, 如果在表中所有的行用列代替而且所有的列用行代替, 但不改变它們的次序, 則此表的行列式的值不变。

例如, 下列两个三阶行列式相等:

$$\begin{vmatrix} 2, & 3, & 5 \\ 7, & 0, & 1 \\ 2, & 1, & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 7, & 2 \\ 3, & 0, & 1 \\ 5, & 1, & 6 \end{vmatrix}.$$

3. 行列式的基本性质 I. 首先叙述剛才証明过的性质——当用列替代行时, 行列式的值不变。以后凡对于列已經証明了的一切結果对于行都也适用而且反过来也对。

II. 在前一小节中我們看出, 两列互换只改变行列式的正負号。这对于行也是一样, 就是說, 两行(列)互换, 行列式的值只改变它的正負号。

III. 如果行列式具有两相同的行, 則当它們互换之后, 一方面行列式没有什么改变, 另一方面, 根据 II, 行列式改变正負号, 那就是說, 如用 Δ 表行列式的值, 遂有 $\Delta = -\Delta$ 即 $\Delta = 0$ 。总之, 如果行列式有两行(或列)相同, 則它的值等于零。

IV. 变数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的沒有常数項的一次多項式叫做这些变数的綫性齐次函数, 就是說它可以表成下面的形式:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

其中系数 a_i 与 x_i 无关。这样的函数具有下面两个很明显的性质:

