概率论

伊藤清

科学出版社

概　率　論

伊　藤　清　著
刘　璋　温　譯

科　学　出　版　社

伊 藤 清
確 率 論
岩 波 书 店，东京，1958
（第三次印刷）

內 容 簡 介

本书是一本研究近年来获得飞速发展的概率論，特别是随机过程論的专著．此书始終貫穿着 Колмогоров 公理系，較全面系統地总結了近二、三十年来的研究成果．

全书由三个部分組成．第一部分（头三章）叙述概率論的基本理論；第二部分（后四章）为本书重点，詳尽地闡述随机过程論：可加过程、Wiener 过程、平稳过程和 Марков 过程；第三部分是三个簡短的附录，对理解本书所必需的測度論的知識，給予簡洁的叙述．

本书可供概率論专門化以及邻近学科的高年級学生、研究生和数学科学工作者閱讀．

概 率 論

伊 藤 清 著
刘 璋 温 譯

*

科 学 出 版 社 出 版 （北京朝阳門大街 117 号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1963 年 10 月第 一 版	书号：2847 字数：322,000
1963 年 10 月第一次印刷	开本：850×1168 1/32
（京）0001—5,200	印张：12 3/16 插頁：3

定价： 2.60 元

序　言

概率論的問題，涉及的面非常广泛．根据問題的种类，各自建立直观訊識的原理，并从此进行演繹推理，这种状态一直継續下来，而且到了今天，这个傾向好象仍然存在．但是，对于这种状态，人們不能不說概率論是几个分科的集合．欲使概率論被看做一个完整的体系，就必須树立一个根本原理作为按問題的种类而建立的原理的进一步的基础，并从此闡明整个概率論的問題．

这种原理首先由 A. H. Колмогоров 的名著：Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ergeb. d. Math., Berlin, 1933)給出．这就是所謂 Колмогоров 公理系．他在該书中根据这一公理簡洁地推导了概率論的基础部分——到大数法則为止，并且指出了概率論作为一个数学分支应有的方向．

尽管如此，朝着上述 Колмогоров 的方向来闡明近二、三十年来飞速发展的概率論，特别是随机过程論的显著成果，还会遇到不少困难．但是由于許多学者的研究，現在这些問題在大体上已經直接或間接地获得了解决．

因此，前些时候我一直在想，如果把这些研究加以整理，把始終一貫地根据 Колмогоров 公理系推导出来的概率論最近的成果，写成一本书，那末，对概率論的研究工作者来說，可能会有所帮助．正巧岩波书店委托我写“現代数学”丛书中的“概率論”，我有机会达成平素的愿望，感到非常高兴．但是写成书后，遺憾的是，此书不能說是已經充分地达到了預期的目的．

概率論的主要內容，包括最近的发展，我想，在原理上大概已为本书講尽，但是关于許多具体問題的深入研究，我們不得不割爱了．因为照样介紹許多学者按照他們自己的观点写的論文，这违反本书的趣旨，可是若想貫徹本书一貫的观点来叙述，則必須克服

不少技术上的困难，而这又是著者力量所不及的．但是著者相信，唸完本书的讀者，对于那些具体間題应摆在本书內的什么地方，以及如何来对待它們才好，一定会做出答案．

为了符合本书的目的，著者相当重視推理的严格性，并且尽量指出必要的条件．然而对于生成算子和扩散方程，我們尙未找到令人滿意的簡洁条件，而加上复杂条件恐怕反而会妨碍对本質的了解，所以有不少地方只做一些形式的計算．著者猜想，如果 L. Schwartz 关于广义函数的抛物型偏微分方程理論在某种程度上完成了的話，那末对于这些間題将会得到严格而且完美的闡述．

恩师弥永昌吉教授不但慫恿我写此书，而且为了写成此书还給我很多的方便．我在名古屋大学执教期間，承蒙前輩吉田耕作教授的許多教导，这对写成此书有很大的帮助．在印刷上我格外麻煩了岩波书店的根岸荣次先生．今在此表示深切的感謝．

著　者

1952年于京都

目　　录

第一章 基本概念

§1. 測度論式概率論的概要

概率論是研究偶然現象的数学理論，而它的邏輯推理方面的抽象化，就是測度論式的概率論．概率邏輯推理的本質，自二十世紀初以来，随着集合論和 Lebesgue 积分論的发展，才漸漸地被認为带有測度論的特性，但是，用明确的形式把它表达出来，而且在整个概率論中貫穿着这个观点，应該說是从 A. H. Колмогоров 的著作[1]开始的．

設 $\boldsymbol{\Omega}$ 为任意的空間，$\boldsymbol{B}$ 为其上的可加族．也就是說，設 $\boldsymbol{B}$ 为 Ω 的一族子集，满足下列三个条件：

(B.1) $\Omega \in \boldsymbol{B}$,

(B.2) $A \in \boldsymbol{B} \Rightarrow A^c \in \boldsymbol{B}$,

(B.3) $A_n \in \boldsymbol{B}$, $n = 1, 2, \cdots$（有穷个或者可数无穷个）

$\Rightarrow \bigcup_n A_n \in \boldsymbol{B}$.

設 $P(\cdot A)$ 为对 $A \in \boldsymbol{B}$ 定义的集合函数．如果这个集合函数满足下列三个条件，則称 P 为 $\Omega(\boldsymbol{B})$ 上的概率分布：

(P.1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$,

(P.2) （完全）可加性：$A = \sum_n A_n$（有穷或者可数无穷直和）

$\Rightarrow P(A) = \sum_n P(A_n)$,

(P.3) $P(\boldsymbol{\Omega}) = 1$.

把 $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{B}$ 和 P 汇集在一起，就叫做概率空間 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$.

因为概率分布是特殊的 Lebesgue 測度，所以概率空間也可以看做測度空間的特殊情形．因此，不言而喻，在概率空間上也可以

定义測度論中的下列概念：可測集合、可測函数、除測度 0 的集合以外、在几乎所有的点上、Lebesgue 积分以及 $L^p(\Omega, \boldsymbol{B}, P)$ 等。

在**測度論式的概率論**中，人們以一个概率空間 $\Omega = \Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 作为考慮的基础。

考慮 Ω 上的变元 ω。这个变元叫做**概率参数**（probability parameter, parameter of distribution）。

关于 ω 的条件 $\alpha = \alpha(\omega)$ 叫做 $\Omega(P)$ 上的**事件**，而 $\alpha(\omega)$ 的成立叫做事件 α 的**出現**。由等价条件所表达的事件，可以看做是**同一的**。使 $\alpha(\omega)$ 出現的那些 ω 的全体叫做 $\alpha(\omega)$ 的**外延**，記作 $[\alpha]$ 或者 $[\alpha]_\omega$。若用記号来表达，則

(1)　$[\alpha] = [\alpha]_\omega = \{\omega; \alpha(\omega)\}$.

显然

(2)　$\alpha = \beta \Longleftrightarrow [\alpha] = [\beta]$,

因而事件(条件)与其外延(集合)是一一对应关系。又因 Ω 的任意集合 A 是事件：$\omega \in A$ 的外延，所以

事件与 Ω 的子集是一对一的对应关系 $\alpha \longleftrightarrow [\alpha]$.

因此，只要不怕混淆，就把 α 和 $[\alpha]$ 同一看待，并把 Ω 的子集也叫做事件。这样一来，人們很自然地把事件 α 的**概率**定义为

(3)　$P(\alpha) = P([\alpha])$.

α 的概率 $P(\alpha)$，仅当 $[\alpha]$ 是可測集合的情形，亦即当 $[\alpha] \in \boldsymbol{B}$ 时才能定义。这时 α 叫做**可測事件**。

概率参数 ω 的可測实函数叫做 Ω 上的**随机变数**。$X(\omega)$ 对于 $\omega = \omega_0$ 的值 $X(\omega_0)$ 叫做 X 对于 $\omega = \omega_0$ 的**样本值**。如可測函数的情形一样，也允許随机变数取 $\pm\infty$，但是沒有特别声明时，总假設它在几乎所有的点上取有穷值。

当給定随机变数 $X = X(\omega), Y = Y(\omega), Z = Z(\omega), \cdots$ 时，关于它們的条件

$$\alpha = \alpha(X, Y, Z, \cdots) = \alpha(X(\omega), Y(\omega), Z(\omega), \cdots)$$

显然也可以看做是关于 ω 的条件，因而这个条件可以看做 Ω 上的

事件. 特别,若它是可测事件,则可以求它的概率 $P(\alpha)$.

例 1. 設 $\Omega=[0,1)$, $\boldsymbol{B}=\Omega$ 中的 Borel 子集全体, $P=$ 普通的 Lebesgue 测度(但只考虑属于 $\boldsymbol{B}$ 的集合),那末确定了概率空間 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$. 这在本书中叫做 **Wiener 概率空間**[1].

$$X(\omega)\equiv\omega, \quad Y(\omega)\equiv 1-\omega$$

都是这个概率空間上的随机变数. 事件

$$\alpha=(X\leqslant Y)$$

的外延是

$$[\alpha]_\omega=\{\omega;\, X(\omega)\leqslant Y(\omega)\}=\{\omega;\, \omega\leqslant 1-\omega\}=[0,1/2],$$

因此

$$P(\alpha)=\frac{1}{2}.$$

例 2*[2]. 扔銅板两次,随着第一次扔出正面或反面而設 $X=1$ 或 $X=0$,第二次扔出正面或反面而設 $Y=1$ 或 $Y=0$. $X=1$, $Y=1$ 意味着两次都扔出正面. 如果銅板的正面和反面是对称的,那末应該有

$$(4)\quad \begin{aligned} P(X=1, Y=1)=P(X=1, Y=0)&=\\ =P(X=0, Y=1)&=\\ =P(X=0, Y=0)&. \end{aligned}$$

这种 X, Y 的一个**数学模型**可如下造出:令 $\Omega=\Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 为 Wiener 概率空間. 定义 $X=X(\omega)$ 和 $Y=Y(\omega)$ 如下:

	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
$0\leqslant\omega<1/4$	1	1
$1/4\leqslant\omega<1/2$	1	0
$1/2\leqslant\omega<3/4$	0	1
$3/4\leqslant\omega<1$	0	0.

于是

$$\alpha=(X=1, Y=1), \quad \beta=(X=1, Y=0),$$

---

1) 参看 R. E. A. C. Paley & N. Wiener [2], Chap. IX, Random Functions.

2) 添有＊号的不是数学上的例子,而是实例.

$$\gamma = (X = 0, Y = 1), \quad \delta = (X = 0, Y = 0)$$

的外延是

$$[\alpha] = [0, 1/4), \qquad [\beta] = [1/4, 1/2),$$
$$[\gamma] = [1/2, 3/4), \quad [\delta] = [3/4, 1),$$

所以

(5) $P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = P(\delta)(= 1/4)$,

于是 (4) 成立.

上述的模型只不过是满足(4)的模型中的一个,此外还可以考虑許許多多同样的模型. 例如設

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\boldsymbol{B} = 2^{\Omega}$, $P(A) = \bar{\bar{A}}/4$, $\bar{\bar{A}}$ 是 A 的点的个数, 便得到概率空間 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$, 而若在这个概率空間上定义 $X(\omega)$, $Y(\omega)$ 为

	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
$\omega = 1$	1	1
$\omega = 2$	1	0
$\omega = 3$	0	1
$\omega = 4$	0	0,

则上面的 α, β, γ 和 δ 的外延分别为$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$和$\{4\}$,由此(5)成立.

例 3*. 反复地扔对称的骰子时所出現的点数記为 $X_1, X_2, \cdots$. 那末由骰子的对称性,应有

(6) $P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \cdots, X_n = k_n) = 6^{-n}$

$$(n = 1, 2, \cdots; \quad k_1, k_2, \cdots = 1, 2, \cdots, 6).$$

这种 $X_1, X_2, \cdots$的一个数学模型可如下造出: 令 $\Omega = \Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 为 Wiener 概率空間. 用六进位法把 $\omega \in \Omega$ 展开为

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{6^n} \quad (\omega_1, \omega_2, \cdots = 0, 1, 2, \cdots, 5).$$

若对上面的 ω 定义

$$X_n = X_n(\omega) = \omega_n + 1, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则

$$a=(X_1=k_1,\ X_2=k_2,\ \cdots,\ X_n=k_n)$$

的外延是区間

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{k_\nu-1}{6^\nu}\leqslant\omega<\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{k_\nu-1}{6^\nu}+\frac{k_n}{6^n},$$

又因其长度是 6^{-n}, 故得 $P(a)=6^{-n}$, 于是(6)成立.

例 4*. 以同样的方法对同一个量进行 n 次独立观察,并令观察值为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$. 那末依 **Gauss 的誤差理論**[1)]得到

$$(7)\quad P(a<X_i<b)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-h^2(x-m)^2}dx,$$

$$i=1,2,\cdots,n,$$

此处 m 表示**眞值**, h 表示观察的**精度**. 所謂观察是独立的,卽指

$$(8)\quad P(a_i<X_i<b_i,\ i=1,2,\cdots,n)=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P(a_i<X_i<b_i).$$

为了构造这种 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的模型,設 $\Omega=R^n$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^n$, 并定义 P 为

$$P(E)=\frac{h^n}{\pi^{n/2}}\int\underset{E}{\cdots}\int e^{-h^2\sum\limits_1^n(x_i-m)^2}dx_1\cdots dx_n.$$

欲証明 P 是 $R^n(\boldsymbol{B}^n)$ 上的概率分布, 只須証明 $P(R^n)=1$ 卽可. 由熟悉的关系式:

$$(9)\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2(x-m)^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

得到

$$P(R^n)=\frac{h^n}{\pi^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2\sum\limits_1^n(x_i-m)^2}dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\frac{h^n}{\pi^{n/2}}\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2(x_i-m)^2}dx_i.$$

---

1) 末綱 [3].

若对 $\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)\in\Omega(=R^n)$ 定义

$$X_i(\omega)=\omega_i,\quad i=1, 2, \cdots, n,$$

则这满足条件(7)和(8).

(7)的証明:設

$$\alpha=(a<X_i<b),$$

则

$$[\alpha]=\{\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n);\ a<\omega_i<b\}$$

$$P(\alpha)=\frac{h^n}{\pi^{n/2}}\int\underset{a<x_i<b}{\cdots}\int e^{-h^2\sum\limits_1^n(x_i-m)^2}dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\frac{h^n}{\pi^{n/2}}\int_a^b e^{-h^2(x_i-m)^2}dx_i\prod_{j\neq i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2(x_j-m)^2}dx_j=$$

$$=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-h^2(x-m)^2}dx\quad(\because(9)).$$

(8)的証明:設

$$\beta=(a_i<X_i<b_i,\quad i=1, 2, \cdots, n),$$

则

$$[\beta]=(a_1, b_1)\times(a_2, b_2)\times\cdots\times(a_n, b_n),$$

$$P(\beta)=\frac{h^n}{\pi^{n/2}}\int\underset{[\beta]}{\cdots}\int e^{-h^2\sum\limits_1^n(x_i-m)^2}dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\prod_{i=1}^n\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{a_i}^{b_i}e^{-h^2(x_i-m)^2}dx_i=$$

$$=\prod_{i=1}^n P(a_i<X_i<b_i).$$

例 5*. 坛內盛N个球,其中M个是紅球,其余$(N-M)$个是白球. 从坛里順次抽出 n 个球,按其色彩标上号碼 $X_1, X_2, \cdots, X_n$. $X_i=1$ 表示第 i 次抽出的球是紅球,$X_i=0$ 表示那是白球. 这时必須区别每抽出一球是否退回坛里, 也就是要对**还原抽样**和**非还原抽样**这两种情形加以区别.

对还原抽样的情形

(10) $P(X_1=k_1, X_2=k_2, \cdots, X_n=k_n)=$

$$= \left(\frac{M}{N}\right)^s \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-s}$$

$(k_1, k_2, \cdots, k_n = 1$ 或者 0, 其中有 s 个等于 $1)$.

对非还原抽样的情形

$$(11) \quad P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \cdots, X_n = k_n) = \\ = \frac{M(M-1)\cdots(M-s+1)(N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+s+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}.$$

今构造 $\{X_i\}$ 的模型. 令 Ω 为从 $1, 2, \cdots, N$ 取出 n 个元的不同排列的全体. 但假設在还原抽样的情形允許重复排列, 而在非还原抽样的情形則不允許重复排列. 又設

$$\boldsymbol{B} = 2^{\Omega}, \quad P(A) = \bar{\bar{A}}/\bar{\bar{\Omega}}.$$

若对 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \Omega$ 定义

$$X_i(\omega) = 1(\text{当 } \omega_i \leqslant M), \quad = 0(\text{当 } \omega_i > M),$$

則容易証明 $\{X_i(\omega)\}$ 滿足(10)或者(11).

§2. 事件的概率

以概率空間 $\Omega = \Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 作为考慮的基础. 我們在上节已經叙述过,事件可以由 Ω 的子集来表达.

由全空間 Ω 所表达的事件叫做**全事件**. 全事件是恆出現的事件,其概率等于 1.

由空集合 $\varnothing$ 所表达的事件叫做**空事件**. 空事件是决不出現的事件,其概率等于 0.

当 $A \subseteq B$ 时,事件 A 叫做事件 B 的**子事件**. 若用条件的語言来表达,則所謂事件 $\alpha(\omega)$ 是事件 $\beta(\omega)$ 的子事件,就是指

$$\alpha(\omega) \Rightarrow \beta(\omega).$$

从測度的性質推出

概率的单調性: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.

当給定事件叙列 $A, B, C, \cdots$ 时,它們的和集

$$S = A \cup B \cup C \cup \cdots$$

叫做 $A, B, C, \cdots$ 的**和事件**. 如集合的情形一样,特别若 $A, B,$

C, ⋯是互不相交的集合，则叫做**互不相容**的事件，这时和集 S 特别叫做 A, B, C, ⋯的**直和**，記作

$$S = A + B + C + \cdots.$$

若用条件的語言来表达，则所謂事件 $\sigma(\omega)$ 是事件叙列 $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, $\gamma(\omega)$, ⋯的和，就是指

$$\sigma(\omega) \Longleftrightarrow \alpha(\omega) \text{ 或者 } \beta(\omega) \text{ 或者 } \gamma(\omega) \text{ 或者} \cdots.$$

又所謂 $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, $\gamma(\omega)$, ⋯是互不相容事件，就是指在它們之間任何两个事件都相互矛盾.

从测度的可加性推出

概率的(完全)可加性：如果 A_1, A_2, ⋯(有穷个或者可数无穷个)是可測的，那末 $S = \bigcup_n A_n (= A_1 \cup A_2 \cup \cdots)$ 也是可測的，并且

$$P(S) \leqslant \sum_n P(A_n),$$

特别当 A_1, A_2, ⋯为互不相容时，

$$P(S) = \sum_n P(A_n).$$

对事件叙列 A, B, C, ⋯，交集 $M = A \cap B \cap C \cap \cdots$(或者記作 $ABC\cdots$)叫做事件 A, B, C,⋯的**交事件**. 最多为可数个可測事件的交事件是可測的. 若用条件的語言来表达，则所謂 $\mu(\omega)$ 是 $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, ⋯的交事件，就是指

$$\mu(\omega) \Longleftrightarrow \alpha(\omega) \text{ 并且 } \beta(\omega) \text{ 并且} \cdots.$$

因此 $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, ⋯的交事件也記作 $(\alpha(\omega), \beta(\omega), \cdots)$.

对事件 A, A^c 叫做 A 的**余事件**. 若用条件的語言来表达，则所謂 $\alpha(\omega)$ 的余事件，就是指 $\alpha(\omega)$ 的否定条件 $\alpha^c(\omega)$. 因为 $A + A^c = \Omega$，所以由概率的可加性推出

全概率的定理：$P(A) + P(A^c) = 1$.

对事件 A 和 B, $A - B = A \cap B^c$ 叫做 A 和 B 的**差事件**. 由概率的可加性以及 $A = (A - B) + A \cdot B$ 推出

概率的可减性：如果 A, B 是可測的，那末 $A - B$ 也是可測

的，并且

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cdot B),$$

特别当 $A\supseteq B$ 时

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

对事件（可数无穷）叙列 $\{A_n\}$，由上限集合 $\overline{\lim}\ A_n$ 和下限集合 $\underline{\lim}\ A_n$ 所表达的事件分别叫做**上限事件**和**下限事件**. 如集合的情形一样，当两者相等时，簡称为**极限事件**.

因为 $\overline{\lim}\,A_n$ 是属于 A_n 中的无穷多个集合的全体，所以事件叙列 $\{\alpha_n(\omega)\}$ 的上限事件可由条件

$\alpha_n(\omega),\ n=1,2,\cdots$ 中的无穷个[1]条件成立

来表达. 同样，因为 $\underline{\lim}\,A_n$ 是属于 A_n 中某个号数以后的集合的全体，所以事件叙列 $\{\alpha_n(\omega)\}$ 的下限事件可由条件

某个号数[2]以后的 $\alpha_n(\omega)$ 都成立

来表达. 如在集合論中所熟悉的那样

$$A_n\subseteq A_{n+1},\quad n=1,2,\cdots\Rightarrow\lim A_n=\bigcup_n A_n,$$

$$A_n\supseteq A_{n+1},\quad n=1,2,\cdots\Rightarrow\lim A_n=\bigcap_n A_n,$$

$$\overline{\lim}\,A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n=\lim_{k\to\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n,$$

$$\underline{\lim}\,A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n=\lim_{k\to\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n,$$

$$\overline{\lim}\,A_n\supseteq\underline{\lim}\,A_n,$$

$$A_n=B_n,\ n\geqslant n_0\Rightarrow\overline{\lim}\,A_n=\overline{\lim}\,B_n,\ \underline{\lim}\,A_n=\underline{\lim}\,B_n.$$

由測度論中的 Lebesgue-Fatou 定理推出

概率的 Lebesgue-Fatou 定理:

$$P(\underline{\lim}\,A_n)\leqslant\underline{\lim}\,P(A_n)\leqslant\overline{\lim}\,P(A_n)\leqslant P(\overline{\lim}\,A_n),$$

1）随 ω 的不同，这无穷个也不同.

2）随 ω 的不同，这个号数也不同.