

概 率 论

伊 藤 清

科 学 出 版 社

51.71
233

概 率 論

伊 藤 清 著

刘 璋 温 譯

3/C646/1.4.

二

科 学 出 版 社

伊 藤 清
確 率 論

岩波书店, 东京, 1958

(第三次印刷)

內 容 簡 介

本书是一本研究近年来获得飞速发展的概率論, 特别是随机过程論的专著。此书始終貫穿着 Колмогоров 公理系, 較全面系統地總結了近二、三十年来的研究成果。

全书由三个部分組成。第一部分(头三章)叙述概率論的基本理論; 第二部分(后四章)为本书重点, 詳尽地闡述随机过程論: 可加过程、Wiener 过程、平稳过程和 Марков 过程; 第三部分是三个簡短的附录, 对理解本书所必需的測度論的知識, 給予簡洁的叙述。

本书可供概率論專門化以及邻近学科的高年級学生、研究生和数学科学工作者閱讀。

概 率 論

伊 藤 清 著
刘 瑞 溫 譯

*

科学出版社出版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业營業許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1963 年 10 月第 一 版

1963 年 10 月第一次印刷

(京) 0001—5, 200

书号: 2847 字数: 322, 000

开本: 850×1168 1/32

印张: 12 3/16 插頁: 3

定价: 2.60 元

序 言

概率論的問題，涉及的面非常廣泛。根據問題的种类，各自建立直觀認識的原理，並從此進行演繹推理，這種狀態一直繼續下來，而且到了今天，這個傾向好像仍然存在。但是，對於這種狀態，人們不能不說概率論是幾個分科的集合。欲使概率論被看做一個完整的體系，就必須樹立一個根本原理作為按問題的种类而建立的原理的進一步的基礎，並從此闡明整個概率論的問題。

這種原理首先由 A. H. Колмогоров 的名著：Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ergeb. d. Math., Berlin, 1933) 給出。這就是所謂 Колмогоров 公理系。他在該書中根據這一公理簡潔地推導了概率論的基礎部分——到大數法則為止，並且指出了概率論作為一個數學分支應有的方向。

儘管如此，朝着上述 Колмогоров 的方向來闡明近二、三十年來飛速發展的 probability 論，特別是隨機過程論的顯著成果，還會遇到不少困難。但是由於許多學者的研究，現在這些問題在大體上已經直接或間接地獲得了解決。

因此，前些時候我一直在想，如果把这些研究加以整理，把始終一貫地根據 Колмогоров 公理系推導出來的 probability 論最近的成果，寫成一本書，那末，對 probability 論的研究工作者來說，可能會有所幫助。正巧岩波書店委托我寫“現代數學”叢書中的“probability 論”，我有機會達成平素的願望，感到非常高興。但是寫成書後，遺憾的是，此書不能說是已經充分地達到了預期的目的。

probability 論的主要內容，包括最近的发展，我想，在原理上大概已為本書講盡，但是關於許多具體問題的深入研究，我們不得不割愛了。因為照樣介紹許多學者按照他們自己的觀點寫的論文，這違反本書的趣旨，可是若想貫徹本書一貫的觀點來敘述，則必須克服

不少技术上的困难,而这又是著者力量所不及的。但是著者相信,唸完本书的讀者,对于那些具体問題应摆在本书內的什么地方,以及如何来对待它們才好,一定会做出答案。

为了符合本书的目的,著者相当重視推理的严格性,并且尽量指出必要的条件。然而对于生成算子和扩散方程,我們尚未找到令人滿意的簡洁条件,而加上复杂条件恐怕反而会妨碍对本質的了解,所以有不少地方只做一些形式的計算。著者猜想,如果 L. Schwartz 关于广义函数的抛物型偏微分方程理論在某种程度上完成了的話,那末对于这些問題将会得到严格而且完美的闡述。

恩师弥永昌吉教授不但慫恿我写此书,而且为了写成此书还給我很多的方便。我在名古屋大学执教期間,承蒙前輩吉田耕作教授的許多教导,这对写成此书有很大的帮助。在印刷上我格外麻煩了岩波书店的根岸荣次先生。今在此表示深切的感謝。

著 者

1952 年于京都

目 录

第一章 基本概念	1
§ 1. 测度論式概率論的概要	1
§ 2. 事件的概率	7
§ 3. 独立事件叙列	11
§ 4. k 維分布	15
§ 5. 随机变数的均值与分布	20
第二章 随机矢量及其分布	29
§ 6. 泛函数 $L(f; \Phi)$	29
§ 7. 分布函数	32
§ 8. 特征函数	35
§ 9. 矩、均值、方差、协方差与相关系数	40
§ 10. 例	44
§ 11. k 維分布的收敛	46
§ 12. 随机矢量的收敛	56
§ 13. 随机矢量的独立性	60
第三章 独立随机变数的和	66
§ 14. 独立随机变数叙列的存在定理与卷积	66
§ 15. Bernoulli 的大数法則	68
§ 16. 强大数法則	70
§ 17. 无規則性	73
§ 18. 大数法則的精确化与迭对数法則	81
§ 19. 中心极限定理	88
§ 20. 統計分布	94
§ 21. 无穷維随机矢量与 Колмогоров 的 0-1-法則	96
§ 22. 具有独立随机变数为項的无穷級数的收敛	99
第四章 可加过程	108
§ 23. 随机变数族的存在定理	108

§ 24. 随机过程	111
§ 25. 可加过程	114
§ 26. 正态可加过程	119
§ 27. Poisson 过程	126
§ 28. 无穷可分分布法则	132
§ 29. Lévy 过程 (1) 存在定理	136
§ 30. 无穷维随机矢量的独立性	145
§ 31. Lévy 过程 (2) 构造定理	149
§ 32. Lévy 过程 (3) 分解定理	162
第五章 Wiener 过程	180
§ 33. 正态型随机变数族 (1) 定义与性质	180
§ 34. 正态型随机变数族 (2) 存在定理	186
§ 35. 正态随机测度	192
§ 36. Wiener 积分	195
§ 37. 从 Wiener 过程导出直线上的正态随机测度	199
§ 38. Wiener 过程的 Fourier 展开	200
§ 39. Wiener 的构造法	208
§ 40. Wiener 过程的诸量的分布	211
§ 41. Wiener 过程的迭对数法则 (1)	217
§ 42. 射影不变性	220
§ 43. Wiener 过程的迭对数法则 (2)	224
第六章 平稳过程	227
§ 44. 平稳过程的定义	227
§ 45. 自协方差与 Хинчин 定理	231
§ 46. 随机过程的微分与积分	234
§ 47. 平稳过程的例	236
§ 48. 正交测度	243
§ 49. 弱平稳过程的谱分解 (1)	246
§ 50. 弱平稳过程的谱分解 (2)	253
§ 51. 弱平稳过程的谱分解 (3)	256
§ 52. 强平稳过程的个体各态遍历定理	259
§ 53. 强平稳过程各态遍历性	266
§ 54. 强平稳过程的一般调和与分析	272

§ 55. 平稳数列、Колмогоров 的内插与外推	276
第七章 Марков 过程	279
§ 56. 条件概率 (1)	279
§ 57. 条件概率 (2)	280
§ 58. 条件概率与独立性	290
§ 59. Марков 过程的定义	292
§ 60. Марков 过程的例	300
§ 61. 生成算子 (1) 总論	302
§ 62. 生成算子 (2) 特殊情形的詳細討論	306
§ 63. Колмогоров-Feller 方程	315
§ 64. 随机积分	318
§ 65. 随机微分	326
§ 66. 随机微分方程	333
§ 67. 扩散問題	343
§ 68. 時間齐次的 Марков 过程	352
§ 69. Ornstein-Uhlenbeck 的 Brown 运动	355
附录	359
1. 定义测度的泛函数	359
2. 概率空間的无穷直积	366
3. 无穷維矢量空間上的 Borel 集与 Baire 函数	371
参考文献	379
索引	380

第一章 基本概念

§ 1. 測度論式概率論的概要

概率論是研究偶然現象的數學理論，而它的邏輯推理方面的抽象化，就是測度論式的概率論。概率邏輯推理的本質，自二十世紀初以來，隨着集合論和 Lebesgue 積分論的發展，才漸漸地被認為帶有測度論的特性，但是，用明確的形式把它表達出來，而且在整個概率論中貫穿着這個觀點，應該說是從 A. H. Колмогоров 的著作[1]開始的。

設 Ω 為任意的空間， $\mathcal{B}$ 為其上的可加族。也就是說，設 $\mathcal{B}$ 為 Ω 的一族子集，滿足下列三個條件：

$$(B.1) \quad \Omega \in \mathcal{B},$$

$$(B.2) \quad A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B},$$

$$(B.3) \quad A_n \in \mathcal{B}, n = 1, 2, \dots \text{ (有窮個或者可數無窮個)}$$

$$\Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{B}.$$

設 $P(A)$ 為對 $A \in \mathcal{B}$ 定義的集合函數。如果這個集合函數滿足下列三個條件，則稱 P 為 $\Omega(\mathcal{B})$ 上的概率分布：

$$(P.1) \quad 0 \leq P(A) \leq 1,$$

$$(P.2) \quad \text{(完全)可加性: } A = \sum_n A_n \text{ (有窮或者可數無窮直和)}$$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_n P(A_n),$$

$$(P.3) \quad P(\Omega) = 1.$$

把 Ω , $\mathcal{B}$ 和 P 匯集在一起，就叫做概率空間 $\Omega(\mathcal{B}, P)$ 。

因為概率分布是特殊的 Lebesgue 測度，所以概率空間也可以看做測度空間的特殊情形。因此，不言而喻，在概率空間上也可以

定义测度论中的下列概念：可测集合、可测函数、除测度 0 的集合以外、在几乎所有的点上、Lebesgue 积分以及 $L^p(Q, B, P)$ 等。

在测度论式的概率论中，人们以一个概率空间 $\Omega = \Omega(B, P)$ 作为考虑的基础。

考虑 Ω 上的变元 ω 。这个变元叫做**概率参数** (probability parameter, parameter of distribution)。

关于 ω 的条件 $\alpha = \alpha(\omega)$ 叫做 $\Omega(P)$ 上的**事件**，而 $\alpha(\omega)$ 的成立叫做事件 α 的**出现**。由等价条件所表达的事件，可以看做是**同一的**。使 $\alpha(\omega)$ 出现的那些 ω 的全体叫做 $\alpha(\omega)$ 的**外延**，记作 $[\alpha]$ 或者 $[\alpha]_\omega$ 。若用记号来表达，则

$$(1) [\alpha] = [\alpha]_\omega = \{\omega; \alpha(\omega)\}.$$

显然

$$(2) \alpha = \beta \iff [\alpha] = [\beta],$$

因而事件(条件)与其外延(集合)是一一对应关系。又因 Ω 的任意集合 A 是事件： $\omega \in A$ 的外延，所以

事件与 Ω 的子集是一一对应的对应关系 $\alpha \longleftrightarrow [\alpha]$ 。

因此，只要不怕混淆，就把 α 和 $[\alpha]$ 同一看待，并把 Ω 的子集也叫做事件。这样一来，人们很自然地把事件 α 的**概率**定义为

$$(3) P(\alpha) = P([\alpha]).$$

α 的概率 $P(\alpha)$ ，仅当 $[\alpha]$ 是可测集合的情形，亦即当 $[\alpha] \in B$ 时才能定义。这时 α 叫做**可测事件**。

概率参数 ω 的可测实函数叫做 Ω 上的**随机变数**。 $X(\omega)$ 对于 $\omega = \omega_0$ 的值 $X(\omega_0)$ 叫做 X 对于 $\omega = \omega_0$ 的**样本值**。如可测函数的情形一样，也允许随机变数取 $\pm \infty$ ，但是没有特别声明时，总假设它在几乎所有的点上取有穷值。

当给定随机变数 $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega)$, $Z = Z(\omega)$, $\dots$ 时，关于它们的条件

$$\alpha = \alpha(X, Y, Z, \dots) = \alpha(X(\omega), Y(\omega), Z(\omega), \dots)$$

显然也可以看做是关于 ω 的条件，因而这个条件可以看做 Ω 上的

事件。特別，若它是可測事件，則可以求它的概率 $P(\alpha)$ 。

例 1. 設 $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{B} = \Omega$ 中的 Borel 子集全体, $P =$ 普通的 Lebesgue 测度(但只考虑属于 $\mathcal{B}$ 的集合), 那末确定了概率空間 $\Omega(\mathcal{B}, P)$ 。这在本书中叫做 **Wiener 概率空間**¹⁾。

$$X(\omega) \equiv \omega, \quad Y(\omega) \equiv 1 - \omega$$

都是这个概率空間上的随机变数。事件

$$\alpha = (X \leq Y)$$

的外延是

$$[\alpha]_\omega = \{\omega; X(\omega) \leq Y(\omega)\} = \{\omega; \omega \leq 1 - \omega\} = [0, 1/2],$$

因此

$$P(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

例 2²⁾。扔銅板两次, 随着第一次扔出正面或反面而設 $X=1$ 或 $X=0$, 第二次扔出正面或反面而設 $Y=1$ 或 $Y=0$ 。 $X=1$, $Y=1$ 意味着两次都扔出正面。如果銅板的正面和反面是对称的, 那末应该有

$$\begin{aligned} (4) \quad P(X=1, Y=1) &= P(X=1, Y=0) = \\ &= P(X=0, Y=1) = \\ &= P(X=0, Y=0). \end{aligned}$$

这种 X, Y 的一个**数学模型**可如下造出: 令 $\Omega = \Omega(\mathcal{B}, P)$ 为 Wiener 概率空間。定义 $X = X(\omega)$ 和 $Y = Y(\omega)$ 如下:

	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
$0 \leq \omega < 1/4$	1	1
$1/4 \leq \omega < 1/2$	1	0
$1/2 \leq \omega < 3/4$	0	1
$3/4 \leq \omega < 1$	0	0.

于是

$$\alpha = (X=1, Y=1), \quad \beta = (X=1, Y=0),$$

1) 参看 R. E. A. C. Paley & N. Wiener [2], Chap. IX, Random Functions.

2) 添有*号的不是数学上的例子, 而是实例。

$$\gamma = (X = 0, Y = 1), \quad \delta = (X = 0, Y = 0)$$

的外延是

$$[\alpha] = [0, 1/4), \quad [\beta] = [1/4, 1/2),$$

$$[\gamma] = [1/2, 3/4), \quad [\delta] = [3/4, 1),$$

所以

$$(5) \quad P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = P(\delta) (= 1/4),$$

于是(4)成立.

上述的模型只不过是满足(4)的模型中的一个,此外还可以考虑许许多多同样的模型. 例如設

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = 2^{\Omega}$, $P(A) = \bar{A}/4$, $\bar{A}$ 是 A 的点的个数, 便得到概率空間 $\Omega(B, P)$, 而若在这个概率空間上定义 $X(\omega)$, $Y(\omega)$ 为

	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
$\omega = 1$	1	1
$\omega = 2$	1	0
$\omega = 3$	0	1
$\omega = 4$	0	0,

則上面的 α, β, γ 和 δ 的外延分別为 $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ 和 $\{4\}$, 由此(5)成立.

例 3*: 反复地扔对称的骰子时所出現的点数記为 $X_1, X_2, \dots$. 那末由骰子的对称性, 应有

$$(6) \quad P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) = 6^{-n}$$

$$(n = 1, 2, \dots; \quad k_1, k_2, \dots = 1, 2, \dots, 6).$$

这种 $X_1, X_2, \dots$ 的一个数学模型可如下造出: 令 $\Omega = \Omega(B, P)$ 为 Wiener 概率空間. 用六进位法把 $\omega \in \Omega$ 展开为

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{6^n} \quad (\omega_1, \omega_2, \dots = 0, 1, 2, \dots, 5).$$

若对上面的 ω 定义

$$X_n = X_n(\omega) = \omega_n + 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

則

$$\alpha = (X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n^* = k_n)$$

的外延是區間

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{k_{\nu}-1}{6^{\nu}} \leq \omega < \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{k_{\nu}-1}{6^{\nu}} + \frac{k_n}{6^n},$$

又因其長度是 6^{-n} , 故得 $P(\alpha) = 6^{-n}$, 於是(6)成立。

例 4*. 以同樣的方法對同一個量進行 n 次獨立觀察, 並令觀察值為 $X_1, X_2, \dots, X_n$. 那末依 **Gauss** 的誤差理論¹⁾得到

$$(7) \quad P(a < X_i < b) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2(x-m)^2} dx,$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

此處 m 表示真值, h 表示觀察的精度。所謂觀察是獨立的, 即指

$$(8) \quad P(a_i < X_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n) = \\ = \prod_{i=1}^n P(a_i < X_i < b_i).$$

為了構造這種 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的模型, 設 $\Omega = R^n, B = B^n$, 並定義 P 為

$$P(E) = \frac{h^n}{\pi^{n/2}} \int_E \dots \int e^{-h^2 \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} dx_1 \dots dx_n.$$

欲證明 P 是 $R^n(B^n)$ 上的概率分布, 只須證明 $P(R^n) = 1$ 即可。由熟悉的关系式:

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2(x-m)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

得到

$$P(R^n) = \frac{h^n}{\pi^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} dx_1 \dots dx_n = \\ = \frac{h^n}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2(x_i - m)^2} dx_i.$$

1) 末綱 [3].

若对 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega (= R^n)$ 定义

$$X_i(\omega) = \omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则这满足条件(7)和(8).

(7)的证明: 设

$$\alpha = (a < X_i < b),$$

则

$$[\alpha] = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n); a < \omega_i < b\}$$

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \frac{h^n}{\pi^{n/2}} \int_a^b \dots \int_a^b e^{-h^2 \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} dx_1 \dots dx_n = \\ &= \frac{h^n}{\pi^{n/2}} \int_a^b e^{-h^2 (x_i - m)^2} dx_i \prod_{i \neq i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 (x_i - m)^2} dx_i = \\ &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2 (x - m)^2} dx \quad (\because (9)). \end{aligned}$$

(8)的证明: 设

$$\beta = (a_i < X_i < b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n),$$

则

$$[\beta] = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n),$$

$$\begin{aligned} P(\beta) &= \frac{h^n}{\pi^{n/2}} \int_{[\beta]} e^{-h^2 \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} dx_1 \dots dx_n = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{a_i}^{b_i} e^{-h^2 (x_i - m)^2} dx_i = \\ &= \prod_{i=1}^n P(a_i < X_i < b_i). \end{aligned}$$

例 5*. 坛内盛 N 个球, 其中 M 个是红球, 其余 $(N - M)$ 个是白球. 从坛里顺次抽出 n 个球, 按其色彩标上号码 $X_1, X_2, \dots, X_n$. $X_i = 1$ 表示第 i 次抽出的球是红球, $X_i = 0$ 表示那是白球. 这时必须区别每抽出一球是否退回坛里, 也就是要对**还原抽样**和**非还原抽样**这两种情形加以区别.

对还原抽样的情形

$$(10) \quad P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) =$$

$$= \left(\frac{M}{N}\right)^s \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-s}$$

$(k_1, k_2, \dots, k_n = 1 \text{ 或者 } 0, \text{ 其中有 } s \text{ 个等于 } 1).$

对非还原抽样的情形

$$\begin{aligned} (11) \quad & P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) = \\ & = \frac{M(M-1)\dots(M-s+1)(N-M)(N-M-1)\dots(N-M-n+s+1)}{N(N-1)\dots(N-n+1)}. \end{aligned}$$

今构造 $\{X_i\}$ 的模型. 令 Ω 为从 $1, 2, \dots, N$ 取出 n 个元的不同排列的全体. 但假设在还原抽样的情形允许重复排列, 而在非还原抽样的情形则不允许重复排列. 又设

$$B = 2^{\bar{\Omega}}, \quad P(A) = \bar{A}/\bar{\Omega}.$$

若对 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega$ 定义

$$X_i(\omega) = 1(\text{当 } \omega_i \leq M), \quad = 0(\text{当 } \omega_i > M),$$

则容易证明 $\{X_i(\omega)\}$ 满足(10)或者(11).

§ 2. 事件的概率

以概率空间 $\Omega = \Omega(B, P)$ 作为考虑的基础. 我们在上节已经叙述过, 事件可以由 Ω 的子集来表达.

由全空间 Ω 所表达的事件叫做**全事件**. 全事件是恒出现的事件, 其概率等于 1.

由空集合 $\emptyset$ 所表达的事件叫做**空事件**. 空事件是决不出现的事件, 其概率等于 0.

当 $A \subseteq B$ 时, 事件 A 叫做事件 B 的**子事件**. 若用条件的语言来表达, 则所谓事件 $\alpha(\omega)$ 是事件 $\beta(\omega)$ 的子事件, 就是指

$$\alpha(\omega) \Rightarrow \beta(\omega).$$

从测度的性质推出

概率的单调性: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$

当给定事件序列 $A, B, C, \dots$ 时, 它们的和集

$$S = A \cup B \cup C \cup \dots$$

叫做 $A, B, C, \dots$ 的**和事件**. 如集合的情形一样, 特别若 $A, B,$

$C, \dots$ 是互不相交的集合, 則叫做**互不相容**的事件, 这时和集 S 特別叫做 $A, B, C, \dots$ 的**直和**, 記作

$$S = A + B + C + \dots.$$

若用条件的語言来表达, 則所謂事件 $\sigma(\omega)$ 是事件叙列 $\alpha(\omega), \beta(\omega), \gamma(\omega), \dots$ 的和, 就是指

$$\sigma(\omega) \Leftrightarrow \alpha(\omega) \text{ 或者 } \beta(\omega) \text{ 或者 } \gamma(\omega) \text{ 或者 } \dots.$$

又所謂 $\alpha(\omega), \beta(\omega), \gamma(\omega), \dots$ 是互不相容事件, 就是指在它們之間任何两个事件都相互矛盾.

从測度的可加性推出

概率的(完全)可加性: 如果 $A_1, A_2, \dots$ (有穷个或者可数无穷个) 是可測的, 那末 $S = \cup_n A_n (= A_1 \cup A_2 \cup \dots)$ 也是可測的, 并且

$$P(S) \leq \sum_n P(A_n),$$

特別当 $A_1, A_2, \dots$ 为互不相容时,

$$P(S) = \sum_n P(A_n).$$

对事件叙列 $A, B, C, \dots$, 交集 $M = A \cap B \cap C \cap \dots$ (或者記作 $ABC \dots$) 叫做事件 $A, B, C, \dots$ 的**交事件**. 最多为可数个可測事件的交事件是可測的. 若用条件的語言来表达, 則所謂 $\mu(\omega)$ 是 $\alpha(\omega), \beta(\omega), \dots$ 的交事件, 就是指

$$\mu(\omega) \Leftrightarrow \alpha(\omega) \text{ 并且 } \beta(\omega) \text{ 并且 } \dots.$$

因此 $\alpha(\omega), \beta(\omega), \dots$ 的交事件也記作 $(\alpha(\omega), \beta(\omega), \dots)$.

对事件 A, A^c 叫做 A 的**余事件**. 若用条件的語言来表达, 則所謂 $\alpha(\omega)$ 的余事件, 就是指 $\alpha(\omega)$ 的否定条件 $\alpha^c(\omega)$. 因为 $A + A^c = \Omega$, 所以由概率的可加性推出

$$\text{全概率的定理: } P(A) + P(A^c) = 1.$$

对事件 A 和 $B, A - B = A \cap B^c$ 叫做 A 和 B 的**差事件**. 由概率的可加性以及 $A = (A - B) + A \cdot B$ 推出

概率的可減性: 如果 A, B 是可測的, 那末 $A - B$ 也是可測

的,并且

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B),$$

特别当 $A \supseteq B$ 时

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

对事件(可数无穷)叙列 $\{A_n\}$, 由上限集合 $\overline{\lim} A_n$ 和下限集合 $\underline{\lim} A_n$ 所表达的事件分别叫做**上限事件**和**下限事件**. 如集合的情形一样, 当两者相等时, 简称为**极限事件**.

因为 $\overline{\lim} A_n$ 是属于 A_n 中的无穷多个集合的全体, 所以事件叙列 $\{a_n(\omega)\}$ 的上限事件可由条件

$$a_n(\omega), n = 1, 2, \dots \text{中的无穷个}^1) \text{条件成立}$$

来表达. 同样, 因为 $\underline{\lim} A_n$ 是属于 A_n 中某个号数以后的集合的全体, 所以事件叙列 $\{a_n(\omega)\}$ 的下限事件可由条件

$$\text{某个号数}^2) \text{以后的 } a_n(\omega) \text{ 都成立}$$

来表达. 如在集合论中所熟悉的那样

$$A_n \subseteq A_{n+1}, n = 1, 2, \dots \Rightarrow \lim A_n = \bigcup_n A_n,$$

$$A_n \supseteq A_{n+1}, n = 1, 2, \dots \Rightarrow \lim A_n = \bigcap_n A_n,$$

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,$$

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n,$$

$$\overline{\lim} A_n \supseteq \underline{\lim} A_n,$$

$$A_n = B_n, n \geq n_0 \Rightarrow \overline{\lim} A_n = \overline{\lim} B_n, \underline{\lim} A_n = \underline{\lim} B_n.$$

由测度论中的 Lebesgue-Fatou 定理推出

概率的 Lebesgue-Fatou 定理:

$$P(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} P(A_n) \leq \overline{\lim} P(A_n) \leq P(\overline{\lim} A_n),$$

1) 随 ω 的不同, 这无穷个也不同.

2) 随 ω 的不同, 这个号数也不同.