科學圖書大庫

數學研究叢書(二)

近世代數之研究

譯者 鄧元平 劉睦雄
李誠輝 王敏男
校閱 劉世超 賴東昇

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年一月十七日再版

數學研究叢書(二)

近世代數之研究

基本定價 1.60

譯者 鄧元平 國立台灣大學理學士
劉睦雄 國立台灣大學理學碩士
李誠輝 國立台灣大學理學士
王敏男 美國坎薩斯州立大學研究
校閱 劉世超 賴東昇

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 7815250號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

目　錄

第一章　緒　論

(鄧元平譯)

這本書裏的六篇論文是由吾人選出來廣泛介紹近世代數思想的各方面。最先兩章，由 Saunders Madane 所寫，是概括介紹性的，大約全部着重在結合代數上。其餘四章介紹“具有非可結合運算之代數體系”的理論中各個方面的觀點。近代格子論（Lattice theory）和有限平面論，吾人在此不討論，將留給這套書册以後的部分。

由於第一篇論文在 1939 年一月的美國數學月刊上發表，Maclane因此得到Associations Chauvenet 奬。將 1938 年於支加哥大學Maclane 和我所發起的代數會議上的記錄摘出，其主要目的是把代數觀念和在會議中介紹的多種主題間的關連以及過去和現在代數思想之基本概念濃縮出精華來。其中介紹環的應用，環在代數函數論中之評價及局部群體論，結合代數之結構論，有理可除代數之整數論。關於代數結構的演說我發表於這篇文提出後八個月，對讀者的課外知識或許能有所啓發。

Maclane的第二篇論文（概論），1961 年爲這本書所寫，介紹了近來在有限群論中的進展。群論是早有的課題了，有許多很專門且困難的長久留下來的問題。這篇概論包括有促進近來進一步重要發展的體系中（近來）驚人的成就。事實上Maclane 的概論是由 John Thompson 和Walter Feit 早先提出之論文而來，這兩位先生現已證明了所有階爲奇數的群均爲可解。

這篇論文其次介紹在交換環上模（即加法交換群）之理論中的元素。這些是稱爲R－模之代數體系，其滿足成一向量空間之通常條件，不過純數是在交換環中而不是在體中。R－模之同態及張量乘積理論中的元素和所謂範疇（categories）均有介紹，附帶有“如何討論同調代數基本觀念”的根據。這個結果是純粹的代數問題，對它自己言則是有趣而重要的，不過它以代數結構之形式存在於代數托撲中是有用的。

同調代數在研究所謂局部環（local ring）上是一基本工具。即交換環R滿足其每一理想爲有限跨度（finitely spanned），且所有無反元素之元素所成的部份集合爲一理想。這個觀念於 1938 年首先由Krull所介紹。環的

部分類聚（subclass），即元素爲正規局部環（regular local ring）所成的集合，在研究代數幾何中的代數多樣性（algebraic varieties）上很重要，且同調代數事實上在研究此種環上最有用。如此我們找到一種代數工具（事實上爲發展拓撲）在研究代數幾何之代數體系上很重要。

這篇論文的其餘主題是Hopf代數與子代數。一個Hopf 代數爲同時是在交換環R上的一個模的結合環。又有一對偶環（dual ring）被稱爲子代數者。這些代數在拓撲研究中很重要，不過由假設之條件似乎還沒有產生結構方面的理論。

談論非結合體系的四篇論文中的第一篇，R.H. Bruck 用唯一的運算來討論。他考慮數學體系（Ⓢ, ·）由 $a, b, \cdots\cdots$ 元素所成之集合及一乘法運算 $a \cdot b = c$ 構成，滿足：若 a, b, c 中的任二者在Ⓢ中，其餘那個元素必是Ⓢ中唯一確定之一元素。這樣的一個體系被稱爲擬（亞）群。如果又有一單位元素 e，滿足對每一屬於Ⓢ之 a, $e \cdot a = a \cdot e = a$, 則此體系稱爲一個圈。Bruck也介紹了相關之主題 Steiner triple體系，然後引至 latin squares，此爲實際上介紹一有限擬群元素乘法的表。他也闡釋了擬群與幾何巢（geometric net）之關係，同時討論射影平面的特殊情形。

Bruck介紹了具有反元素特性之 loop 的觀念，同時將幾何上的所謂net與之相關連。Moufang loop及滿足其他型式的反元素法則的 loop也在此述及。在討論非結合整數的部分，有關neofield 的公設也介紹了，並與“一元素之冪乘法非可結合”的 loop 中元素冪之指數觀念相生關連。說明結束於在附帶言及之統計學及提示中的所謂Room designs之介紹。還有一個附錄提供對 order爲 n（整數）$n \geq 3$, $n \equiv 1$ 或 $n \equiv 3 \pmod 6$ 的 Steiner triple 體系之存在的證明。

其餘三篇與非結合環及代數有關係。由對這個主題的簡短概括之討論將很方便來爲這些篇章之討論起序。考慮一數學體系（A, +, ·）滿足如前所述環之條件，例如在Maclane的第二篇論文中的，但還附帶上乘法不一定可結合。如果這個體系又滿足是在體 F 上的向量空間（即 F－module），吾人稱它爲一 algebra。習慣上即稱環 A或 algebra A以代替吾人所指（A,+,·）體系。環A稱爲除環如果此數學體系包括了A的所有非零元素所成的部分集合A*，且A的乘法運算滿足爲一 loop。吾人稱 algebra A在𝔉上之次數爲 2，如果A有一單位元素 e（乘法運算之單位元素），且每一個 A 中之元素 a 爲一等式 $\phi(\lambda; a) = \lambda^2 + t(a)\lambda + f(a)e$ 之根，$t(a)$ 爲在A之坐標中的線性形式，$f(a)$ 則是此坐標中的二次形式。吾人謂A在 𝔉 上爲對合（involutorial）若在 $\mathfrak{F}$ 上有一個所謂共軛運算的非退化線性變換，由對應 $a \to \bar{a}$ 表出，滿足 $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ 及 $\bar{\bar{a}} = a$ 。最後：吾人稱一非結合環A是 alternative ring 如果對A的每個元素 x 及 y，下列關係成立：

(1) $$x(xy) = (xx)y, \qquad (yx)x = y(xx)$$

吾人的興趣主要是在所謂 composition algebra 上。也就是在 $\mathfrak{F}$ 上次數爲 2 的對合 alternative algebra，且對每個元素 a, $a + \bar{a} = \alpha e$, $a\bar{a} = \bar{a}a$ βe, $\alpha,\beta \in \mathfrak{F}$ 爲眞。則

$$(\lambda - a)(\lambda - \bar{a}) = \lambda^2 - \alpha\lambda + \beta e$$

是 a 所滿足之二次式。這種 algebra 能很容易的如下構成之。首先有一佈於體 $\mathfrak{F}$ 之 n 維 composction algebra $\mathfrak{G}$，將 $\mathfrak{G}$ 嵌入 $\mathfrak{F}$ 上的 $2n$ 維向量空間 B 中，B之元素爲 $a + bw$ 之形式，$a,b \in \mathfrak{G}$，定義 B 中之乘法爲

(2) $$(a + bw)(c + dw) = ac + \bar{d}b\tau + (da + b\bar{c})w$$

$a, b, c, d \in \mathfrak{G}$, τ 爲 $\mathfrak{F}$ 中之非零元素。吾人也爲 B 定義一共軛運算，由 $\mathfrak{G}$ 之運算來：

(3) $$\overline{a+bw} = \bar{a} - bw.$$

若$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ 爲佈於 $\mathfrak{F}$ 之 1 維 algebra，且其有 e 以爲單位元素並與 $\mathfrak{F}$ 同構。則B有一組由 e,μ 構成之基，滿足於 $\mathfrak{F}e$ 中 $u^2 = \lambda e \neq 0$, 且既爲可結合又爲可交換。若如此之 algebra 爲 $\mathfrak{G}$, 則新的 B 的維數是 4，且爲可結合而爲非可交換了。實際上，B有基元素（構成基之一組元素）：$e, u, v, uv = -vu$, 且 $u^2 = \lambda e \neq 0$, $v^2 = \mu e \neq 0$ 。如此推下去，吾人易證明 4 維之 $\mathfrak{G}$ 產生 8 維之B，B 具有基元素 $e, u, v, u\tau, w, uw, vw$ $(uv)w = -\mu(vw)$, 而非可結合了。(1)成立之證明易證之如下：因 $x + \bar{x} = \alpha e$ 吾人之關係式相當於

(4) $$x(\bar{x}y) = (\bar{x}x)y, \qquad (\bar{y}x)\bar{x} = \bar{y}(x\bar{x}).$$

吾人首先證明(3)對 B而言並不能定義一共軛運算，且於 $\mathfrak{A}e$ 中

$$(a + bw)(\bar{a} - bw) = a\bar{a} - \gamma b\bar{b}$$

$$(a + bw) + (\bar{a} - bw) = a + \bar{a}$$

如此(4)中第二關係式由第一式共軛而來。第一式則已由(2)得知。這樣構造並不止於 $n=8$，不過 16 維的體系非 alternative 了。

現在我們可談談最後三篇論文了。第一篇由Charles, W. Curtis所寫，借提及 division algebra以介紹對“容許組合”之二次形式討論的歷史過程。設 $\mathfrak{F}$ 是任何特徵數非 2 之體，(即一體於其中單位元素有特性 $1+1\neq 0$。每一係數爲佈於 $\mathfrak{F}$ 之二次形式因此能寫爲向量及矩陣乘積：

$$(5)\qquad f(x)=xAx',$$

$x=(x_1,x_2\cdots\cdots x_n)$ x 有佈於 $\mathfrak{F}$ 之獨立未定係數 $x_1,x_2\cdots x_n$ 爲其坐標，A 是佈於 $\mathfrak{F}$ 之非退化對稱矩陣。設 $y=(y_1,y_2\cdots y_n)$ y_i 爲佈於 $\mathfrak{F}$ 之獨立未定係數，滿足 $f(y)=yAy'$。則 $f(x)$ 稱爲容許組合若

$$(6)\qquad f(x)f(y)=f(z),$$

$$(7)\qquad z=(z_1,\cdots,z_n),\qquad z_k=\sum_{i,j=1}^{n}x_i\gamma_{ijk}y_j$$

且 n^3 個元素 γ_{ijk} 在 $\mathfrak{F}$ 中。我們可把 x,y 想作代表在佈於 $\mathfrak{F}$ 之 n 維向量空間Q之元素，則(7)定義一乘法運算 $x\cdot y=z$ 在 $\mathfrak{F}$ 上之 algebra $A_0=(Q,\cdot)$ 上。二次形式 $f(x)$ 可正規化以使其矩陣 A 爲對角線陣，故

$$(8)\qquad f(x)=\alpha_1x_1^2+\cdots+\alpha_nx_n^2\qquad(\alpha_i\neq 0,\ \alpha_i\in\mathfrak{F}).$$

吾人可證明 $\alpha_1=1$ 時(6)永遠成立。故有以 $e=(1,0,\cdots,0)$ 爲單位元素之所謂 isotopic algebra A，其同時有(6)之特性，$z=x\cdot y$ 且 $x\cdot y$ 是在此新 algebra A 中之乘積。

吾人所考慮的二次形式理論中的問題即是找尋二次形式爲容許組合之充分必要條件的問題。關於這個問題的答案是在algebra 中 $f(x)$ 之形式將是乘積 $x\bar{x}$，而A 必爲維數爲 1, 2, 4, 8的 composition algebra 中之一者。在他的論文中，Curtis 强調“$f(x)=x_1^2+\cdots+x_n^2$，$\mathfrak{F}$ 爲所有實數成的體”的情形。如此則A爲此體當 $n=1$ 時，或爲複數體，當 $n=2$ 時，或爲實四元素成的非交換性Hamilton algebra當 $n=4$ 時，而 $n=8$ 之 algebra 於 1845 年由A. Cayley所發現。於每一種這些情形下，algebra 均爲division algebra，且事實上 $x\bar{x}$ 爲範數 (norm)，且當 $x\neq 0$ 時不爲0。最先刺激去發明這些 algebra是爲了嚐試擴大實數體之觀念。擴張至複數體結果造成order 的失去，但是範數之存在多少補償了些。擴張至4 維體系造

成交換性之失去。至於8維者，則結合性失去。

Klei nfield所寫之論文多少起源於M.H.Stone在1939 年的演說。在那些Madison講詞中，Stone介紹了凸性論(convexity)，且述及這個理論所需之數學體系是一個ordered alternative ring。無限維的可結合的ordered ring是已知了，在一篇演說中，Stone舉出了ordered nonassociative but alternative ring的存在問題。Kleinfield的論文介紹他和Bruck有名的定理證明：即每一alternative division ring或爲可結合，或爲一8維之Cayley algebra。又因real Cayley algebra包含了一個unordered quaternion algebra，整個algebra不能是ordered了，故如此產生了對Stone之問題的一個否定的回答。

最後一篇論文是Lowell J. Paige所寫的關於Jordan algebra理論之闡釋。起始於一些非結合algebra：如radieal, simple與Semisimple algebra之觀念的一般特性，而繼續介紹適宜地由結合algebra之封閉的部分向量空間造出Lie algebra及Jordan algebra的程序。這些Jordan algebra稱爲是特殊的(special)。Paige也討論了特徵數爲0的Jordan algebra的構造理論，用追蹤論法來述說，此與Curtis論文有極大的關係，如下所述：若體$\mathfrak{F}$爲代數性地封閉，且每一個佈於$\mathfrak{F}$之Simple Jordan algebra $\mathfrak{H}$有一單位元素能被表爲冪等數e_i之和，$e = e_1 + e_2 + \cdots + e_t$且$e_i e_j = 0$, 若$i \neq j$；而任何一$e_i$皆非冪等數$f_i$, g_i $(f_i g_i = 0)$之和即$e_i = f_i + g_i$不成立。如此，t是唯一之整數，被稱爲$\mathfrak{F}$上$\mathfrak{H}$的次數。當$t > 2$，吾人可證明$\mathfrak{H}$實際上即爲所有t一列Hermition矩陣($B = \bar{B}'$)之集合$\mathfrak{H}_t$(矩陣之元在composition algebra $\mathfrak{G}$中)。反之，每一如此之$\mathfrak{H}$是一個Simple Jordan algebra，當$t > 3$，此algebra必爲可結合的。

這篇論文也包含一些關於free associative algebra, free Jordan algebra之摘要，及Albert-Paige定理證明之大概，此定理說如果$\mathfrak{G}$爲Cayley algebra，則exceptional Jordan algebra $\mathfrak{H}_3(\mathfrak{G})$不是任何speeial Jordan algebra之同態像。這篇論文結束於一些對尙未解出之問題的注意事項。

如Paige在論文中所述，Jordan algebra理論在Lie algebra研究中非常重要。此外，此理論的這個部分和exceptional Jordan algebra $\mathfrak{H}_3(\mathfrak{G})$有極密切的關係，故也與Cayley algebra(Curtis論文中的)有極密切之關係。且已由Hein field證明了其爲唯一的非可結合的Simple alternative ring，是故吾人最後的三篇論文是由與Lie algebra, Lie groups，及其他數學分支的關係上闡述了代數中各種課題間密切的相互關係。

第二章　代數學之某些時新進展

(劉睦雄譯)

抽象代數在新技巧之急速採取以及許多代數體系之新型式之引介下,在表面上或許使人感到迷惑，但實際已經集中於研究一些可資定義之方針上；函數域，線性代數，p 進域,李氏代數以及矩陣．在芝加哥大學所舉行關於代數之會議上已經明顯指出現今之方向以及關於此等領域研究之內在關係．在此，吾人試圖扼要整理某些在此次會議所產生之觀念及其相互間之關係．吾人並無意以此爲手冊或專題論文之型式，而僅做爲一般有趣數學刊物之調查而已．在經過加入必要之背景後，吾人將陳述所考慮問題之種類及所得到解答之型式．至於詳細結果之陳述，吾人將在末尾之書目中提及．在最後一節(12)中，吾人將陳述代數之一般定義及其基本問題之摘要．在此所蒐集之觀念，由於不可避免的省略作品中許多困難及技巧，對於有關之作者將致以歉意．

1.代數幾何，冪級數及賦值

代數與代數幾何之關係爲吾人樂於爭論之有趣題目.此乃由於Lefchetz將正式之冪級數應用至代數幾何之文章所激起[21]．代數與幾何之原有關係可敍述爲在幾何上之代數曲線能夠簡化爲在代數上某一相應之域；特別地，若 k 表爲所有複素數域.且若一曲線以平面上之不可約多項方程式 $f(x,y)=0$ 所定義，則其相應之域 K 爲所有形如 $z=y(x,y)/h(x,y)$,伴隨著二量 x 及 y 之複素數係數之有理函數 $k(x,y)$ 所成之集合．在此，吾人必需強調，x 及 y 並不能在域中以分析之意識將其當成變數而計算其值，僅能將其視爲一使得加、乘等有理運算便於操作之量，通常此操作均在有理組合 $f(x,y)$ 爲 0 之附帶條件下．相應於一曲線之“函數域”$k(x,y)$之作用有一值得考慮之益處：一曲線之雙有理變換，將許可其相應域不變．

在曲線 $f(x,y)=0$ 上一點 $x=a$，$y=b$ 之近傍，當 t 爲適當選擇之整數或爲 $x-a$ 之分式冪時，變數 y 能夠展開成形式爲

$$(1)\qquad y=b+b_1t+b_2t^2+\cdots,\qquad t=(x-a)^{\frac{1}{n}}$$

之一或多個級數．此級數(1)，稱爲Puiseux展開式．通常被視爲定義x之代數函數y之一元素或"循環"之收斂級數，但Lefschetz強調此展開式之完全正式之特性．主要之事實爲Puiseux級數(1)，若代入$f(x, y)$中，可得一爲t之等式$f(x, y)=0$．反之，任意級數(1)，若其滿足等式$f=0$，其必爲一相應於某一代數曲線之一Puiseux級數，或者，可換言之，可決定一代數函數$y(x)$在黎曼面上之一相應點P．在域$K=k(x, y)$上之任意有理函數$z=R(x, y)$，當經過級數y及x，$x=a+t^n$之代換後，將轉變成一t之冪級數：

$$z = t^{\nu}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots), \tag{2}$$

在此，整數ν可能爲正．負或零，而a_i爲屬於由所有複素數所成之係數域k中 所有如此可能之冪級數所成之集合，在一般正式之過程中可作加．除及乘等運算，故此集合將形成一域$k\{t\}$．在黎曼面上由(1)所決定之點P，亦可說是能產生一由函數域K之函數z至冪級數域$k\{t\}$之子集之一對一映射(2)．由於在域中某些函數之有理關係成立時，其相應之冪級數亦必成立，故此映射爲同構．

今將在冪級數之處理形式，應用至代數曲線上，甚至當由常數所成之域k非爲複素數域之古典狀況．但任意域k必具代數之閉合性，此爲在k上之每一多項方程式在k中必有解之意識下——亦即，任意域k，而在其內代數之基本定理成立者．Lefschetz指出在此基石上，許多一變數或二變數之代數函數之古典處理方式，如Picard或Weierstrass所呈現者，均能推展至純代數上．Abel之積分及其分類能藉著Abel之微分$g(x, y)dx$以代數之方式處理．更且，代數曲線之虧數爲一重要之不變式，以拓撲學而言，可視爲黎曼面上洞之數目（椒塩卷餅）．而在代數學，則可藉著此等積分，將其視爲"第一類"線性無關之微分式之最大數目．在本質拓撲之特性中，有一、二定理並不能推廣，但Lefschetz推測Riemann-Roch定理，在代數上，不僅能以一般算術之方法證明，且能以古典幾何之證明處理之[21]（參閱§23）．此正式級數之處理方式在分析之其他部門爲有效用的，尤其是在Dirichlet級數之代數函數之處理上格外顯著．

代數在幾何之應用之重要性，由於Zariski對某一定理之新證明乃被注重．其所證明之定理爲關於運用適當的雙有理變換可消去代數曲面之特異點．以前關於此定理較著名之證明爲Walker利用解析函數所證得．若代數曲面S在三度空間中以一單一齊次代數方程式$f(x_0, x_1, x_2, x_3)=0$所定義，

則其特異點爲在曲面上同時使得某一偏導函數爲零之點．在 n 維空間時，此定理需要曲面 S 能以一由 S 經過雙有理變換所得之曲面 S' 上之座標 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 所表示．而此雙有理變換乃在 y 爲 x 之有理函數，且 x 亦爲 y 之有理函數之意義下．在消去特異點時，所發生之困難之一爲當吾人非常小心利用一變換以便消去某一特異點時，可能在整個特異曲線上產生其他之特異點．Zariski 重複利用可避免特異曲線之“整閉苞”之方法來處理此困難．依據非齊次座標 $\xi_1 = x_1/x_0$，$\xi_2 = x_2/x_0$，$\xi_3 = x_3/x_0$，一有理函數 $\eta = \eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，若其滿足一多項式方程式

$$\eta^m + a_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\eta^{m-1} + \cdots + a_m(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

在此，首項係數爲 1，且其他係數爲 ξ_i 之多項式，則稱其爲“整”有理函數．非齊次整閉苞之方法爲一雙有理變換，其將座標 ξ_1, ξ_2, ξ_3 以整函數 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 替換，且使得所選擇關於 ξ_i 之每一整數均爲一以新座標 η_j 爲變數之多項式．經過此一過程後，已除去奇異曲線．而所遺留之孤立特異點 P 之一性質，端視在曲面上經過 P 點之曲線（或“分枝”）之種類而定，且如此之“分枝”可以在代數上以一某一相應之“賦值”表示．關於特異點之縮減在下述之情況下亦可生效．當吾人在 P 點之適當之分枝上應用“一致化輔助定理”，其將座標視爲二參數 u 及 v 之正則函數（整冪級數）——在此，參數 u 及 v 可選擇爲原有座標之有理函數（關於此等賦值，參閱 Zariski[36]）．

關於賦值之研究，不僅在代數幾何發生，甚至在代數數論及其他算術之問題亦涉及．若一代數函數 z 之冪級數展開式(2)，在點 P 上以 $a_0 t^\nu$ 爲首項，則在 P 點之次數或其值 $V(z)$ 可以該項之指數 ν 定義之．

(3) $$V(z) = \nu \quad \text{若} \quad z = a_0 t^\nu + a_1 t^{\nu-1} + \cdots \ (a_0 \neq 0).$$

當 z 於 $t=0$ 時有一零點，$V(z)$ 爲此零點之次數；當 z 於 $t=0$ 時有一極點，則 $V(z)$ 爲此極點之次數之負號．兩函數 z 及 w 之和及積之賦值，能具如下之性質：

(4) $$V(zw) = V(z) + V(w), \qquad V(z+w) \geq \min(V(z), V(w)).$$

定義於域 K 之任意實數值函數 $V(z)$，若具有上述之二性質，則稱爲該域之賦值．任意如此之 V 亦可轉變成“絕對值”$\|z\| = e^{-V(z)}$，附著相關之性質：

$$\|zw\| = \|z\| \cdot \|w\|, \quad \|z+w\| \leq \max(\|z\|, \|w\|).$$

第二性質甚至較在複數中一般之三角公理 $|z+w| \leq |z|+|w|$ 之性質強．因此 $\|z\|$ 之作用誠如 z 之絕對值，而關於此之極限能依一般之方式定義之．特別重要的是關於絕對值爲完備之域 K'，此爲在一 Cauchy 數列 $a_1, a_2, \cdots$，於域 K' 必有一極限 a 之意義下．舉例而言，由所有正式冪級數(2)所成之域 $K'=k\{t\}$，相關於由(3)所得之 $\|z\|=\exp(-V(z))$ 爲一典型之完備域．

在算術上，任意質數 p 決定整數之賦值 V_p，若 $V_p(n)$ 定義爲以 p 除 n 所得之最高冪數之指數，亦即

$$(5) \qquad V_p(p^v b)=v, \qquad n=p^v b \text{ , } b \text{ 與 } p \text{ 互質 .}$$

由有理數 n/m 所成之域 R，伴隨著此" p 進 "賦值 $V_p(n/m)=V_p(n)-V_p(m)$ 能夠留置於相關於 V_p 爲完備之較大 p 進數域 R_p 中．此數域 R_p 之結構由其留數（以 p 除之餘數）之行爲所決定，其本身亦成一域，乃所謂包含 p 元素 $0, 1, 2, \cdots, p-1$ 之 Galois 域．類似地，冪級數(3)之留數（以 t 除之餘數）亦形成一域，亦即其爲係數所成之域 k．對於其他伴隨著如賦值 V 之域 K，亦可得到留數類域．任意完備域 K，而其賦值函數 V 僅取整數值必須由其留數類域所決定．

誠如在 Galois 理論，如此域之結構以及其子域之形式完全依賴域之可能" 對稱性 "而定．在學術上，一域 F 之對稱性爲衆所週知之 "自同構 "：一從域至域本身而保持有理關係之映射．換言之，在 F 上之自同構 S 爲在域 F 上之一對一對應 $x \longleftrightarrow x^s$，而使得其和與積相應至和與積：

$$(6) \qquad (x+y)^s = x^s + y^s \text{ ; } \qquad (xy)^s = x^s y^s .$$

兩自同構 S 及 T 相繼作用後可得一新自同構 $x \leftrightarrow (x^s)^T$，稱爲此兩自同構之積 ST．在此積之定義下，F 之自同構所成之集合，將形成一群．對於某些完備域，如 p 進域，此群 G 爲 MacLane 所發現，此君亦發現 G 之某些子群，與 Hilbert 在質理想子環中所見之" 慣性 "及" 分歧 "群相當類似（參閱 MacLane [24]）.

2. 群之結構之格子表現

時新代數之透視已經證明群之結構，主要端賴其子群之個數及排列而定．適當之例爲 Jordan-Hölder 定理，其主張一群之相對正則子群所成之鏈均具相同之長度．一所給群之二子群 H 及 K 能以二種方式結合，一爲二子群

之交集$H \cap K$，另一爲其聯集$H \cup K$，此乃包含H及K之最小子群．相對於此二運算，此等子群將被稱爲形成一格子或結構（格）．一格子亦可藉著由交集及聯集所滿足之結合及其他律抽象地定義之[25,6]．

由於子群之格子表示群之許多性質，吾人必然提出如下之問題：群G之特性何時能爲子群之格所完全決定？由於G爲一抽象群，其子群格L將與G同構之任意群G'之子群格相同．吾人稱G與G'同構乃意指在群G之元素A與群G'之元素$A'=A^T$之間存在一對一對應T：$A \leftrightarrow A^T$，使得其積相應至積：

(7)　　若　$A \leftrightarrow A^T, B \leftrightarrow B^T$，則　$AB \leftrightarrow A^T B^T$.

在此同構T之下，G之每一子群H可映射至G'之子群H^τ，而H^τ爲由H之元素A之像點A^T所構成．此對應$H \longleftrightarrow H^\tau$爲$G$之子群與$G'$之子集間之一對一對應，使得其保持聯集與交集之關係：

(8)　　$(H \cap K)^\tau = H^\tau \cap K^\tau, \qquad (H \cup K)^\tau = H^\tau \cup K^\tau.$

反之，在G之子群H與G'之子群H'之間之一對一對應$H \leftrightarrow H'$，若其滿足性質(8)，則稱此對應爲G至G'之一子群同構．因此，很自然的問題將會發生：是否由於子群同構，將導致群G與G'必爲（元素間）之同構？對於此問題，肯定之回答，將意味著群之結構實際是由子群之格所決定．此答案並非時常爲肯定，在交換群之情況時，Baer 作了一個結論．若群爲某些已列出之型式之一，其均爲所謂"小"群，亦即在其本身具有相當少之子群之意義下，則其答案爲否定的．對於其餘之交換群，答案是肯定的；子群同構事實上亦爲同構，且在許多場合，僅有之子群同構爲由如上述之方式所得之同構所產生．

3. 推廣之四元數

於上世紀，根據加法及乘法之有理運算，除了不滿足乘法之結合律外，吾人發現一新體系，而以四元數之型態出現．一實四元數代數Q爲由四個基$1, i, j, ij$之所有線性組合Y所成之集合．亦即

(9)　　$$Y = y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 ij,$$

在此，分子$y_1, \cdots, y_4$爲實數．在如此元素上之有理運算爲純量乘積——Y與實數b之乘積爲由每一分子y_i與實數b之乘積；加法——二元素Y與Z之加法爲將相應之元素相加；乘法——二元素Y與Z之乘積爲利用一般之分配

與結合律及四個基之間之乘積．亦即

(10) $$i^2=-1\,,\quad j^2=-1\,,\quad ij=-ji$$

體系Q稱爲線性結合代數．因其對於上述三個運算具封閉性，且因此等運算滿足一般之代數律（除了交換律$YZ=ZY$）．由於Q之分子爲實數域之元素因此，體系Q爲在實數域上之代數．

Wedderburn 首先引介非在實數域上之線性代數．舉例而言，在有理數域上，吾人能得四元數代數$Q(\alpha,\beta)$爲包含所有如(9)之形式之元素，其分子爲有理數且滿足如下之乘法律：

(11) $$i^2=\alpha\,,\quad j^2=\beta\,,\quad ij=-ji\,,$$

在此，α及β均爲固定之有理數．相同之代數亦可以不同之單位基i'及j'利用不同之常數α'及β'而獲得．除此事實外，存在有許多本質上不同之四元數代數$Q(\alpha,\beta)$．實際而言，若由α及β所決定之"基本數"爲一致時，其所得之代數亦相同．Dickson 觀察到在有理數域及其他域上之可能代數簇及其重要性，由於其在這方面之成就，已使得在許多形式之域上之代數之遠大理論得以向前邁進．

代數之結構端視其子域及子代數而定．四元數之代數$Q(\alpha,\beta)$包含所有形如$x=y_1+y_2i$之元素所成之集合$R(\sqrt{\alpha})$．此集合爲一域；此乃由有理數域R中添加一滿足$i^2=\alpha$之元素i而獲得，至於$R(\sqrt{\alpha})$，包含所有係數在R中之i之有理函數．域$R(\sqrt{\alpha})$之每一元素$x=y_1+y_2i$有一共軛數$\bar{x}=y_1-y_2i$，且對應$x\leftrightarrow\bar{x}$爲域$R(\sqrt{\alpha})$至其本身之一對一對應．由於$\overline{x_1x_2}=\bar{x}_1\bar{x}_2$，$\overline{x_1+x_2}=\bar{x}_1+\bar{x}_2$，此對應保持和與積之運算．因此，在(6)之意義下，此對應爲域之自同構．藉著子域$R(\sqrt{\alpha})$，一般之四元數(9)可以表成

(12) $$Y=(y_1+y_2j)+j(y_3-y_4i)=x_1+jx_2\,,$$

在此，$x_1=y_1+y_2i$及$x_2=y_3-y_4i$均爲域$R(\sqrt{\alpha})$之元素．(11)之乘法律蘊含

$$x_1j=(y_1+y_2i)j=y_1j-y_2ji=j(y_1-y_2i)=j\bar{x}_1\,,$$

因此，吾人能藉著共軛數表出一新的乘法律：

(13) $$j^2=\beta\,,\quad xj=j\bar{x}\quad（對於R(\sqrt{\alpha})之元素x）．$$

此四元數之自同構之形成，對於一般化之推廣，具有潛在之可能性．

4.四元數之算術

若吾人在代數中可選擇一適當之整數集合J，正如一般之整數，形成一環，亦卽，此代數之子集J對於加法，減法及乘法具封閉性，則吾人在此代數中可考慮其算術．在二次代數域$K=R(\sqrt{\alpha})$中，每一元素$x=y_1+y_2\sqrt{\alpha}$滿足一有理係數之二次式

$$[\,t-(y_1+y_2\sqrt{\alpha})\,][\,t-(y_1-y_2\sqrt{\alpha})\,]$$
$$=t^2-2y_1t+(y_1^2-y_2^2\alpha)=0.$$

若此方程式之係數爲整數時，數x將稱爲整數．則所有整數所成之集合將形成一環．對於四元數，吾人可試圖得到相同之定義，此乃由於(12)式中之四元數Y滿足一其根爲$Y=x_1+jx_2$其其共軛數$\overline{Y}=\overline{x}_1-jx_2$之有理方程式，亦卽其滿足

(14) $$(t-Y)(t-\overline{Y})=t^2-2y_1t+N(Y)=0$$

在此，常數項$N(Y)=Y\overline{Y}$爲Y之範數，

(15) $$N(Y)=Y\overline{Y}=(x_1+jx_2)(\overline{x}_1-jx_2)=x_1\overline{x}_1-\beta x_2x_2\,.$$

利用前述關於整數之定義，若方程式(14)之係數爲有理整數時，則稱Y爲整數．不巧地，由此等整數Y所得之集合將不再成爲一環．此乃由於二整數之和並不一定爲一整數．

代之而起，吾人可考慮由所有四元數$Y=x_1+jx_2$所成之集合 $\mathfrak{g}$ 在此，域$R(\sqrt{\alpha})$之數x_1及x_2爲整數．此集合與j之選擇特別有關，但卻具有許多必要之性質：

(C)：$\mathfrak{g}$爲一環．

(R')：$\mathfrak{g}$之每一元素滿足一多項方程式［舉例而言，如方程式(14)］而此多項方程式之首項係數爲1，其餘之係數爲有理整數．

(U') $\mathfrak{g}$包含R之所有有理整數，且包含在R上之線性無關之元素，誠如在四元數代數$Q(\alpha,\beta)$所含之線性無關之元素．

最後之性質顯而易見，因$\mathfrak{g}$包含四個基元素$1,i,j$及ij．此等元素在代數之結構中，顯然爲線性無關．一代數之子集$\mathfrak{g}$，若具有(C),(R')及(U')三性質，則稱其爲此代數之序模．Dickson發現在一般代數中之整數集合中可適當地定義最大序模g——亦卽，存在一不包含於代數中之更大序模之序

模．每一序模至少包含於某一最大序模中；特別地，如上述關於四元數所定義之環 $\mathfrak{o}$，其本身並不一定爲最大序模，但吾人可將其推廣，而得一最大序模．

最大序模 $\mathfrak{D}$ 之算術性質亦端視序模之子體系之適當型式而定：此序模之理想子環．$\mathfrak{D}$ 之一子集 $\mathfrak{A}$ 若其滿足下述之二性質：(1) $\mathfrak{A}$ 之任二元素之差亦爲 $\mathfrak{A}$ 之元素；(2)對於 $\mathfrak{D}$ 之任意元素 b 及 $\mathfrak{A}$ 之任意元素 a，ba 亦爲 $\mathfrak{A}$ 之元素，則稱 $\mathfrak{A}$ 爲 $\mathfrak{D}$ 之左理想子環．吾人當然要求一理想子環必包含一有理整數．特別地，對於 $\mathfrak{D}$ 中之任意元素 a_0，b 爲 $\mathfrak{D}$ 之元素，則由形如 ba_0 之元素所成之集合（a_0）必爲一理想子環．此理想子環爲由 a_0 所產生之主理想子環．類似地，在任意環中，亦可考慮左及右理想子環．

5.二次形式及四元數

四元數代數反映了二次形式及 hermitian 形式之許多性質，此乃因四元數之範數本身即爲此種形式．在(15)式中所計算之範數 $N(Y)$ 爲變數 x_1 及 x_2 之簡單 hermitian 形式．直接藉著(9)式中之原有分子 $y_1, \cdots, y_4$，範數 $N(\bar{Y}) = Y\bar{Y}$ 附以 $\bar{Y} = y_1 - y_2 i - y_3 j - y_4 ij$ 將轉換成二次式

$$N(Y) = y_1^2 - \alpha y_2^2 - \beta y_3^2 + \alpha\beta y_4^2.$$

此 hermitian 形式之表示爲 Latimer 藉著理想子環之觀念所觀察到．在上面所述之整數序模 $\mathfrak{o}$ 具一基 1 及 j．此乃在 $\mathfrak{o}$ 包含 1 及 j 之所有線性組合 $x_1 + jx_2$ 之意義下，在此，整數係數 x_1 及 x_2 爲二次式域 $R(\sqrt{\alpha})$ 之元素．類似地，此環之任意左理想子環 $\mathfrak{a}$ 具一基 w_1 及 w_2，使得 $\mathfrak{a}$ 中之每一元素可表成 $xw_1 + yw_2$ 之形式，其中 x 及 y 爲 $R(\sqrt{\alpha})$ 之整數．此元素 $xw_1 + yw_2$ 之範數，除了一常數係數外，爲如

(16) $$a x\bar{x} + \bar{b}\bar{x}y + \bar{b}x\bar{y} + c y\bar{y}.$$

之形式．此形式由於與其共軛數相等 —— 其係數 a 及 c 爲有理整數，且交叉乘積之項具共軛係數 b 及 $\bar{b}$，故爲一 hermitian 形式．此形式之行列式 $b\bar{b} - ac$ 乃轉變成如乘積表(13)及(11)所用之常數 β．

對於一所給之基爲 w_1 及 w_2 之理想子環 a，將相應於在域 $R(\sqrt{\alpha})$ 上而其行列式爲 β 之 hermitian 形式；且反之亦然．若理想子環之基改變，吾人可得一等價於原有之新形式．此乃在其可由原有之基經過行列式爲 1 之線性齊次變換而得之意義下．因此，等價形式之類可與某些理想子環之類互相對