数学分析习题集题解

曹 敏 谦

上海交通大学应用数学系

本解答系根据李荣涞译 Б.П.吉米多维奇著“数学分析习题集”（修订本）而作。第10分册包括第六章多变量函数的微分法。

目　　录

第六章（续）　多变量函数的微分法

第六章（续） 多变量函数的微分法

§5. 几何上的应用

1°. **切线和法平面** 在曲线

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)$$

上的一点 $M(x,\ y,\ z)$ 的切线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}。$$

在此点的法平面方程为

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0。$$

2°. **切平面和法线** 曲面 $z=f(x,\ y)$ 上点 $M(x,y,z)$ 处的切平面方程为

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y)。$$

在点 M 处的法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1}。$$

若曲面的方程给成隐函数的形式 $F(x,\ y,\ z)=0$，则切平面方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0。$$

法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}。$$

3°. **平面曲线族的包线** 含一个参数的曲线族 $f(x,y,\alpha)=0$（α 为参数）的包线满足方程组：

$$f(x, y, \alpha)=0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha)=0。$$

4°. **曲面族的包面** 含一个参数的曲面族 $F(x,y,z,\alpha)=0$ 的包面满足方程组：

$$F(x, y, z, \alpha)=0, \quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha)=0。$$

在含两个参数的曲面族 $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0$ 的情形，其包面满足下面的方程组：

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0, \quad \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta)=0,$$

$$\Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta)=0。$$

对下列曲线写出在已知点的切线和法平面方程（3528-3532 题）：

3528. $x=a\cos\alpha\cos t$, $y=a\sin\alpha\cos t$, $z=a\sin t$；在点 $t=t_0$。

解：
$$\frac{dx}{dt}=-a\cos\alpha\sin t,$$

$$\frac{dy}{dt}=-a\sin\alpha\sin t, \qquad \frac{dz}{dt}=a\cos t。$$

故切线方程为

$$\frac{x-a\cos\alpha\cos t_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-a\sin\alpha\cos t_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-a\sin t_0}{\cos t_0}。$$

法平面方程为

$$-\cos\alpha \sin t_0(x-a\cos\alpha\cos t_0)$$
$$-\sin\alpha \sin t_0(y-a\sin\alpha\cos t_0)$$
$$+\cos t_0(z-a\sin t_0)=0,$$

即 $$z-a\sin t_0=\cos\alpha \operatorname{tg} t_0(x-a\cos\alpha\cos t_0)$$
$$+\sin\alpha \operatorname{tg} t_0(y-a\sin\alpha\cos t_0)。$$

3529. $x=a\sin^2 t$, $y=b\sin t\cos t$,

$z=c\cos^2 t$；在点 $t=\frac{\pi}{4}$。

解： $\frac{dx}{dt}=a\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=b\cos 2t$,

$$\frac{dz}{dt}=-c\sin 2t。$$

在点 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线的方向数为 a，0，$-c$。

故切线方程为

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{a}=\frac{y-\frac{b}{2}}{0}=\frac{z-\frac{c}{2}}{-c},$$

即 $$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1, \\ y=\frac{b}{2}。\end{cases}$$

在点 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的法平面方程为

$$a\left(x-\frac{a}{2}\right)-c\left(z-\frac{c}{2}\right)=0,$$

即 $$ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)。$$

3530 $y=x$, $z=x^2$；在点 $M(1, 1, 1)$。

解：$\left.\frac{dy}{dx}\right|_M=1$，$\left.\frac{dz}{dx}\right|_M=2x\Big|_M=2$。

在点M的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}。$$

在点M的法平面方程为

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+2(z-1)=0,$$

即
$$x+y+2z=4。$$

3531. $x^2+z^2=10$，$y^2+z^2=10$；在点 $M(1,1,3)$

解：令 $F\equiv x^2+z^2-10=0$，

$\Phi\equiv y^2+z^2-10=0$，则

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{matrix}\right|_M=\left|\begin{matrix}0 & 2z\\ 2y & 2z\end{matrix}\right|_M=-12,$$

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{matrix}\right|_M=\left|\begin{matrix}2z & 2x\\ 2z & 0\end{matrix}\right|_M=-12,$$

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{matrix}\right|_M=\left|\begin{matrix}2x & 0\\ 0 & 2y\end{matrix}\right|_M=4。$$

故切线方程为 $$\frac{x-1}{-12}=\frac{y-1}{-12}=\frac{z-3}{4},$$

即 $$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}。$$

法平面方程为 $3(x-1)+3(y-1)-(z-3)=0$,

即 $3x+3y-z=3$。

3532. $x^2+y^2+z^2=6$, $x+y+z=0$;

在点 $M(1,\ -2,\ 1)$。

解: 令 $F\equiv x^2+y^2+z^2-6=0$,

$\Phi\equiv x+y+z=0$, 则

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{matrix}\right|_M=\left|\begin{matrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{matrix}\right|_M=-6,$$

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{matrix}\right|_M=\left|\begin{matrix}2z & 2x\\ 1 & 1\end{matrix}\right|_M=0,$$

$$\left|\begin{matrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{matrix}\right|_M=\left|\begin{matrix}2x & 2y\\ 1 & 1\end{matrix}\right|_M=6。$$

故切线方程为 $\frac{x-1}{-6}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{6}$,

即 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$。

法平面方程为

$$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)-1\cdot(z-1)=0,$$

即 $x-z=0$。

3533. 在曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上求出一点，此点的切线是平行于平面 $x+2y+z=4$ 的。

解：曲线在任意点$M(x, y, z)$的切线方程为

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{2t}=\frac{Z-z}{3t^2}。$$

要使这条切线与已给平面平行，则其条件为

$$1\cdot 1+2\cdot 2t+1\cdot 3t^2=0,$$

即 $$3t^2+4t+1=0, \quad t=-\frac{1}{3}, \ -1。$$

对应于 $t=-\frac{1}{3}$ 时曲线上的点为

$M_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$，对应于 $t=-1$ 时曲线上的点为

$M_2(-1, 1, -1)$。

故知曲线上 M_1 和 M_2 两点处的切线与所给平面平行。

3534. 证明：螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ 的切线与 Oz 轴形成定角。

证：$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t, \quad \frac{dy}{dt}=a\cos t,$$

$$\frac{dz}{dt}=b。$$

设螺旋线与 Oz 轴的交角为 ψ，则

$$\cos\psi=\frac{-a\sin t\cdot 0+a\cos t\cdot 0+b\cdot 1}{\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}$$

$$=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \psi=\text{常数}。$$

故螺旋线的切线与 Oz 轴交成定角。

3535. 证明：曲线

$$x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t$$

与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同。

证：将 $x=ae^t\cos t$，$y=ae^t\sin t$，$z=ae^t$ 代入锥面方程，可知已给曲线在锥面上。

锥面上经过点$(x,\ y,\ z)$的母线方程为

$$\frac{X}{ae^t\cos t}=\frac{Y}{ae^t\sin t}=\frac{Z}{ae^t},$$

其中$(X,\ Y,\ Z)$为点的流动坐标。

曲线在点$(x,\ y,\ z)$的切线的方向数为

$$\frac{dx}{dt}=ae^t(\cos t-\sin t),$$

$$\frac{dy}{dt}=ae^t(\sin t+\cos t),$$

$$\frac{dz}{dt}=ae^t。$$

设切线与母线的交角为 ψ，则

$$\cos\psi=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$=\frac{2a^2e^{2t}}{\sqrt{6}\,a^2e^{2t}}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

故得
$$\psi=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}=\text{常数}。$$

3536. 证明：斜驶线

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}\quad(k=\text{常数})$$

（其中 φ—地球上点的经度，ψ—地球上点的纬度）与地球的一切子午线相交成定角。

证：设地球的半径为 R，则子午线的参数方程为

$$\begin{cases} x=R\cos\psi\cos\varphi, \quad y=R\cos\psi\sin\varphi, \quad z=R\sin\psi, \\ \varphi=\varphi_0, \end{cases}$$

即
$$x=R\cos\psi\cos\varphi_0, \quad y=R\cos\psi\sin\varphi_0,$$
$$z=R\sin\psi。$$

设斜驶线与子午线交于(φ_0, ψ_0)。

子午线在(φ_0, ψ_0)的切线方程为

$$\frac{x-R\cos\psi_0\cos\varphi_0}{-R\sin\psi_0\cos\varphi_0}=\frac{y-R\cos\psi_0\sin\varphi_0}{-R\sin\psi_0\sin\varphi_0}$$

$$=\frac{z-z_0}{R\cos\psi_0}。$$

斜驶线的方程为

$$\begin{cases} x=R\cos\psi\cos\varphi, \quad y=R\cos\psi\sin\varphi, \quad z=R\sin\psi, \\ \varphi=\dfrac{1}{k}\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\psi}{2}\right)。 \end{cases}$$

$$\frac{d\varphi}{d\psi}=\frac{1}{2k}\frac{\sec^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\psi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\psi}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{k\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\psi\right)}=\frac{1}{k\cos\psi}。$$

$$\frac{dx}{d\psi}=-R\left(\sin\psi\cos\varphi+\frac{d\varphi}{d\psi}\cos\psi\sin\varphi\right)$$

$$=-R\left(\sin\psi\cos\varphi+\frac{\sin\varphi}{k}\right),$$

$$\frac{dy}{d\psi}=-R\left(\sin\psi\sin\varphi-\frac{d\varphi}{d\psi}\cos\psi\cos\varphi\right)$$

$$=-R\left(\sin\psi\sin\varphi-\frac{\cos\varphi}{k}\right),$$

$$\frac{dz}{d\psi}=R\cos\psi。$$

故于点$(\varphi_0,\ \psi_0)$的切线方向数为

$$-R\left(\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k}\right),$$

$$-R\left(\sin\psi_0\sin\varphi_0-\frac{\cos\varphi_0}{k}\right),\quad R\cos\psi_0。$$

设斜驶线与地球子午线的交角为θ，则

$$\cos\theta=\frac{\sin\psi_0\cos\varphi_0\left(\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k}\right)}{\sqrt{\sin^2\psi_0\cos^2\varphi_0+\sin^2\psi_0\sin^2\varphi_0+\cos^2\psi_0}}$$

$$\frac{+\sin\psi_0\sin\varphi_0\left(\sin\psi_0\sin\varphi_0-\frac{\cos\varphi_0}{k}\right)+\cos^2\psi_0}{\sqrt{\left(\sin\psi_0\cos\varphi_0+\frac{\sin\varphi_0}{k}\right)^2+\left(\sin\psi_0\sin\varphi_0-\frac{\cos\varphi_0}{k}\right)^2+\cos^2\psi_0}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}=\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}=\text{常数}。$$

故知斜驶线与地球的子午线交成定角。

3537. 已知曲线

$$z=f(x,\ y),\qquad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha},$$

其中f为可微分的函数。求曲线上$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$点的切线

与 Oxy 平面所成角的正切。

解法 1：令 $F=z-f(x,\ y)$，

$$\Phi=\frac{x-x_0}{\cos\alpha}-\frac{y-y_0}{\sin\alpha},$$

则两曲面 $F=0$ 和 $\Phi=0$ 的交线于点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}-\dfrac{\partial f}{\partial y} & 1\\ -\dfrac{1}{\sin\alpha} & 0\end{vmatrix}_0}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ 0 & \dfrac{1}{\cos\alpha}\end{vmatrix}_0}$$

$$=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}-\dfrac{\partial f}{\partial x} & -\dfrac{\partial f}{\partial y}\\ \dfrac{1}{\cos\alpha} & -\dfrac{1}{\sin\alpha}\end{vmatrix}_0}.$$

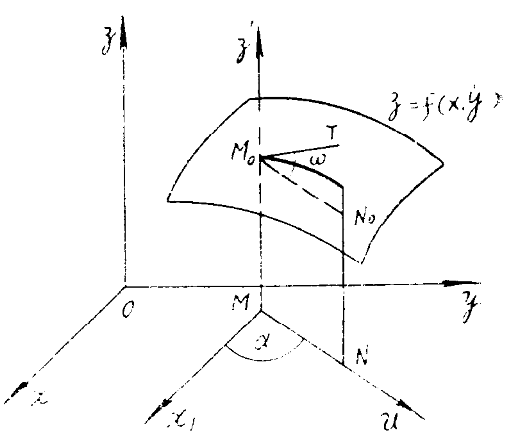

图 3537 题

即 $$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0\sin\alpha}。$$

问题要求的是这条切线 M_0T 与直线 M_0N_0 的交角的正切 $\operatorname{tg}\omega$（见图）。直线 M_0N_0 的方程为

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{z-z_0}{0}。$$

把原点移到 $M(x_0,\ y_0,\ 0)$，且将平面 $\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}$ 与 Oxy 平面的交线作为 u 轴，这里 MN 与 Ox 轴的交角为 α。

过 M 且平行于 z 轴的直线作为 z' 轴。于是切线 M_0T 落在平面 uMz' 上，因此 $\operatorname{tg}\omega$ 就是直线 M_0T 在平面 uMz' 的斜率。设 u 轴上的点 N 关于 Mu 轴的坐标为 u，而关于 Oxy 平面的坐标为 $(x,\ y)$，则

$$u=\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}。$$

故在 uMz' 平面上，M_0T 的方程为

$$u=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0\sin\alpha}，即$$

$$z-z_0=\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0\sin\alpha\right]u。$$

由此得 $\operatorname{tg}\omega=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0\sin\alpha。$

解法 2：已给曲线是曲面 $z=f(x,\ y)$ 与平行于 z 轴的平面 $\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}$ 的交线。这曲线上过 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 的切线与 Oxy 平面的交角为 $\angle N_0M_0T$。

根据方向导数的几何意义，$\operatorname{tg} N_0M_0T$ 就是点 M 沿 MN 方向上的方向导数，故

$$\operatorname{tg} N_0M_0T=\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_0\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_0\sin\alpha。$$

3538. 求函数

$$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

在点 $M(1,\ 2,\ -2)$ 沿曲线

$$x=t,\quad y=2t^2,\quad z=-2t^4$$

在此点的切线方向上的导数。

解： 曲线 $x=t$，$y=2t^2$，$z=-2t^4$ 在任一点 t 的切线方向数为 $\frac{dx}{dt}=1$，$\frac{dy}{dt}=4t$，$\frac{dz}{dt}=-8t^3$。

故在点 $M(1,\ 2,\ -2)$ 的方向数为 1，4，-8；因此在点 M 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{9},\quad \cos\beta=\frac{4}{9},\quad \cos\gamma=-\frac{8}{9}。$$

又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}。$$

故

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cos\beta$$

$$+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cos\gamma$$

$$=\frac{8}{27}\times\frac{1}{9}-\frac{2}{27}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{27}\left(-\frac{8}{9}\right)$$

$$=-\frac{16}{243}。$$

写出下列曲面上已知点的切面和法线方程（3539-3547题）：

3539. $z=x^2+y^2$；在点 $M_0(1, 2, 5)$。

解： $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=2x\Big|_{M_0}=2$，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=2y\Big|_{M_0}=4。$$

在点 M_0 的切面方程为

$$z-5=2(x-1)+4(y-2),$$

即 $$2x+4y-z-5=0;$$

法线方程为 $$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}。$$

3540. $x^2+y^2+z^2=169$；在点 $M_0(3, 4, 12)$。

解： $2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$， $2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=-\frac{x}{z}\Big|_{M_0}=-\frac{1}{4},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-\left.\frac{y}{z}\right|_{M_0}=-\frac{1}{3}。$$

切面方程为

$$z-12=-\frac{1}{4}(x-3)-\frac{1}{3}(y-4),$$

即 $$3x+4y+12z=169。$$

法线方程为 $$\frac{x-3}{-\frac{1}{4}}=\frac{y-4}{-\frac{1}{3}}=\frac{z-12}{-1},$$

即 $$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12},$$

也即 $$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}。$$

3541. $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$；在点 $M_0\left(1,\ 1,\ \frac{\pi}{4}\right)$。

解： $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}。$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=-\frac{1}{2},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=\frac{1}{2}。$$

切面方程为

$$z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1),$$

即 $$z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y)。$$

法线方程为 $$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1},$$