

00411

数 学 分 析 原 理

第二卷 第一分册

格·马·菲赫金哥尔茨著

丁 寿 田 译

人 民 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的非赫金哥尔茨(Г. М. Фихтенгольц)著“数学分析原理”(Основы математического анализа)第二卷1957年第二版译出。

全书共二卷。第二卷中译本分二分册出版。第一分册的内容是：级数，非正常积分，带参变数的积分以及隐函数与函数行列式。

本书可作为综合大学和师范学院数学系参考书。

简 装 本 说 明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

数 学 分 析 原 理

第二卷 第一分册

格·马·菲赫金哥尔茨著

丁 寿 田 译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0318 开本 787×1092 1/32 印张 7

字数 172,000 印数 35,001—235,000 定价(6) ¥0.56

1962年5月第1版

1979年2月北京第9次印刷

第二卷第一分冊目录

第十五章 数項級數.....1

§ 1. 导引.....1

234. 基本概念.....1

235. 简单定理.....3

§ 2. 正項級數的收斂性.....6

236. 正項級數收斂性条件.....6

237. 級數比較定理.....8

238. 例.....10

239. 哥西檢驗法及达朗貝

尔檢驗法.....12

240. 拉貝檢驗法.....15

241. 麦克洛林-哥西积分檢

驗法.....18

§ 3. 任意級數的收斂性.....21

242. 收斂性原理.....21

243. 绝对收斂性.....22

244. 交錯級數.....24

§ 4. 收斂級數的性質.....27

245. 可結合性.....27

246. 绝对收斂級數的可交

換性.....28

247. 非绝对收斂級數的情

形.....30

248. 級數乘法.....32

§ 5. 无穷乘积.....36

249. 基本概念.....36

250. 简单定理. 与級數的关

系.....38

251. 例.....41

§ 6. 初等函数的展为幂級數.....43

252. 戴劳級數.....43

253. 指数函数及主要三角

函数的級數展开式.....46

254. 欧拉公式.....47

255. 反正切的展开式.....49

256. 对数級數.....50

257. 斯替尔灵公式.....52

258. 二項式級數.....54

259. 关于余项研究的一个箋注56

§ 7. 用級數作近似計算.....57

260. 問題的提出.....57

261. π 的計算.....59

262. 对数的計算.....60

第十六章 函数序列及函数

級數.....63

§ 1. 均匀收斂性.....63

263. 导言.....63

264. 均匀收斂性及非均匀

收斂性.....64

265. 均匀收斂性条件.....68

§ 2. 級數和的函数性質.....70

266. 級數和的連續性.....70

267. 正項級數的情形.....73

268. 逐項取极限.....74

269. 級數的逐項积分.....77

270. 級數的逐項微分.....79

271. 无导数連續函数一例.....81

§ 3. 幂級數及多項式級數.....83

272. 幂級數收斂区間.....83

273. 幂級數和的連續性.....87

274. 收斂区間端点上的連

續性.....89

275. 幂級數的逐項积分.....91

276. 幂級數的逐項微分.....92

277. 幂級数作为戴劳級数	94
278. 連續函数展为多項式 級数	95
§ 4. 級数簡史	99
279. 牛頓及萊卜尼茲时期	99
280. 級数理論的形式发展 时期	102
281. 严密理論的建立	106
第十七章 非正常积分	110
§ 1. 带无限积分限的非正常积分	110
282. 带无限积分限的积分 定义	110
283. 积分学基本公式的应 用	112
284. 与級数的相似性. 簡單 定理	113
285. 正函数情形的积分收 敛性	115
286. 一般情形的积分收敛 性	117
287. 更精致的檢驗法	119
§ 2. 无界函数的非正常积分	122
288. 无界函数积分定义	122
289. 积分学基本公式应用	124
290. 积分收敛性条件及檢 驗法	126
§ 3. 非正常积分的变换及計算	129
291. 非正常积分的分部积 分法	129
292. 非正常积分中的变数 替换	130
293. 积分的技巧計算法	132
第十八章 带参变量的积分	137
§ 1. 基本理論	137
294. 問題的提出	137
295. 均匀趋于极限函数	137
296. 积分号下取极限	140

297. 积分号下的微分法	141
298. 积分号下的积分法	143
299. 积分限带参变量的情 形	145
300. 例	147
§ 2. 积分的均匀收敛性	148
301. 积分均匀收敛性定义	148
302. 均匀收敛性的条件及 充分檢驗法	150
303. 带有限积分限的积分	153
§ 3. 积分均匀收敛性的应用	154
304. 积分号下取极限	154
305. 积分依参变量的积分 法	158
306. 积分依参变量的微分 法	160
307. 关于带有限积分限的 积分的一个箋注	161
308. 一些非正常积分的計 算	162
§ 4. 欧拉积分	168
309. 第一类型欧拉积分	168
310. 第二类型欧拉积分	171
311. Γ -函数的簡單性質	172
312. 例	177
313. 关于两极限运算次序 对調的史話	179
第十九章 隐函数·函数行列 式	182
§ 1. 隐函数	182
314. 一元隐函数概念	182
315. 隐函数的存在及性質	184
316. 多元隐函数	188
317. 由方程組所定的隱函 数	190
318. 隐函数导数的計算	194
§ 2. 隐函数理論的一些应用	199

319. 相对极值·····	199
320. 拉格朗日不定乘数法·····	202
321. 例及习题·····	203
322. 函数独立性概念·····	206
323. 函数矩阵之秩·····	208

§ 3. 函数行列式及其形式的性 质·····	212
324. 函数行列式·····	212
325. 函数行列式的乘法·····	213
326. 函数矩阵的乘法·····	215

第二卷第二分册目录

第二十章 綫积分.....219

§ 1. 第一型綫积分.....219

327. 第一型綫积分.....219

328. 化为寻常定积分.....221

329. 例.....223

§ 2. 第二型綫积分.....226

330. 第二型綫积分定义.....226

331. 第二型綫积分的存在

及其計算.....228

332. 閉路綫的情形。平面的

定向法.....232

333. 例.....233

334. 两种类型綫积分間的

关系.....236

335. 在物理問題上的应用.....237

第二十一章 二重积分.....241

§ 1. 二重积分定义及簡單性質.....241

336. 柱体体积問題.....241

337. 化二重积分为累次积

分.....242

338. 二重积分定义.....245

339. 二重积分存在条件.....246

340. 可积函数类.....248

341. 可积函数及二重积分

的性質.....251

342. 积分作为可加性区域

函数。对区域的微分法.....254

§ 2. 二重积分的計算.....256

343. 化矩形区域上的二重

积分为累次积分.....256

344. 化曲綫区域上二重积

分为累次积分.....261

345. 力学上的应用.....267

§ 3. 格林公式.....271

346. 格林公式的推导.....271

347. 以綫积分表出面积.....274

§ 4. 綫积分与积分路綫无关的

条件.....276

348. 沿簡單閉界綫的积分.....276

349. 沿連結任意两点的曲

綫的积分.....278

350. 与恰当微分問題的联

系.....280

351. 在物理問題上的应用.....284

§ 5. 二重积分的变数替换.....286

352. 平面区域的变换.....286

353. 以曲綫坐标表出面积.....291

354. 补充說明.....294

355. 几何的推导法.....296

356. 二重积分中的变数更

换.....299

357. 与单积分的相似。定向

区域上的积分.....301

358. 例.....302

359. 史話.....305

第二十二章 曲面面积·面积

分.....308

§ 1. 双侧曲面.....308

360. 曲面的参变表示法.....308

361. 曲面之側.....312

362. 曲面的定向法及其側

的选定.....315

363. 逐段光滑曲面的情形.....318

§ 2. 曲面面积.....319

364. 希瓦尔兹的例.....	319
365. 显式方程所給曲面的 面积.....	321
366. 一般情形的曲面面积.....	323
367. 例.....	326
§ 3. 第一型面积分.....	328
368. 第一型面积分定义.....	328
369. 化为尋常二重积分.....	329
370. 第一型面积分在力学 上的应用.....	331
§ 4. 第二型面积分.....	334
371. 第二型面积分定义.....	334
372. 化为尋常二重积分.....	337
373. 斯托克斯公式.....	339
374. 斯托克斯积分应用于 空間綫积分的研究.....	343
第二十三章 三重积分	346
§ 1. 三重积分及其計算.....	346
375. 立体質量計算問題.....	346
376. 三重积分及其存在条 件.....	347
377. 可积分函数及三重积 分的性質.....	348
378. 三重积分的計算.....	350
379. 力学上的应用.....	354
§ 2. 奧斯脫罗格拉德斯基公式.....	356
380. 奧斯脫罗格拉德斯基 公式.....	356
381. 奧斯脫罗格拉德斯基 公式的几个应用实例.....	358
§ 3. 三重积分变数更換.....	362
382. 空間区域的变换.....	362
383. 体积表为曲线坐标.....	364
384. 几何的推导法.....	368
385. 三重积分的变数更換.....	369
386. 例.....	370
387. 史話.....	373

§ 4. 場論初步.....	374
388. 数量与矢量.....	374
389. 数量場与矢量場.....	374
390. 沿給定方向的导数。 梯度.....	375
391. 通过曲面的矢量流量.....	378
392. 奧斯脫罗格拉德斯基 公式。发散量.....	379
393. 矢量的循环量。斯托 克斯公式。旋轉量.....	381
§ 5. 多重积分.....	384
394. m 維体的体积与 m 重 积分.....	384
395. 例.....	385
第二十四章 傅立叶級数	388
§ 1. 导言.....	388
396. 周期量与調和分析.....	388
397. 决定系数的欧拉-傅立 叶方法.....	391
398. 直交函数系.....	394
§ 2. 函数的傅立叶級数展开式.....	396
399. 問題的提出。狄里希 萊积分.....	396
400. 基本預备定理.....	399
401. 局部化原理.....	401
402. 函数的傅立叶級数表 示法.....	402
403. 非周期函数的情形.....	404
404. 任意区间的情形.....	406
405. 只含余弦或只含正弦 的展开式.....	407
406. 例.....	410
407. 連續函数展开为三角 多項式級数.....	416
§ 3. 傅立叶积分.....	418
408. 傅立叶积分作为傅立 叶級数的极限情形.....	418

409. 預备說明	420
410. 用傅立叶积分表出函数	
数	422
411. 傅立叶公式的种种形式	423
412. 傅立叶变换	425
§ 4. 三角函数系的封閉性与完备性	428
413. 函数的平均逼近。傅立叶级数段的极值性质	428
414. 三角函数系的封閉性	431
415. 三角函数系的完备性	436
416. 广义封閉性方程	437
417. 傅立叶级数的逐项积分	437
418. 几何的解釋	439
§ 5. 三角级数簡史	444
419. 弦振动問題	444

420. 达朗贝尔及欧拉的解法	445
421. 戴劳及但尼尔·貝努里的解法	447
422. 关于弦振动問題的爭論	450
423. 函数的三角展开式。系数的决定	451
424. 傅立叶级数收敛性証明及其他問題	453
425. 結尾語	455

附录 数学分析进一步发展

概况	457
I. 微分方程	457
II. 变分法	458
III. 复变函数論	462
IV. 积分方程論	465
V. 实变函数論	468
VI. 泛函分析	472

第十五章 数項級数

§ 1. 导引

234. 基本概念 設給了一个无穷数(序)列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

由这些数所組成的記号

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (2)$$

叫做一个无穷級数(或簡称級数), 而(1)中各数則称为級数之項。

(2)也常常利用总和号写成这样:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (2a)$$

这里序号 n 历取 1 至 ∞ 一切整数值^①。

我們来把級数的項逐一相加而組成这些和(和的个数无穷):

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ \dots, A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

并称其为級数的部分和或級数节。这个部分和序列 $\{A_n\}$ 我們將恒与級数(2)并列: 記号(2)的作用也就在表明該序列的产生。

級数(2)的部分和 A_n 在 $n \rightarrow \infty$ 时的有限或无限极限

$$A = \lim A_n$$

就叫做該級数之和而写成

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

如此使記号(2) 或(2a) 具有了数的意义。如果一个級数具有有限

① 但級数項的下标,也可不由 1 开始, 而由 0 或任何大于 1 的自然数开始有时更为方便。

的和，則稱其為收斂級數，反之（即和等於 $\pm\infty$ 或根本沒有和時），則稱其為發散級數。

如此，級數(2)的收斂性問題按定義就等價於序列(3)的有限極限存在問題。反之，任意取一個序列

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots,$$

則其有限極限存在問題可以化為

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots, \quad (4)$$

這樣一個級數的收斂性問題，它的部分和恰好就是該序列之項。此時級數之和與序列之極限合而為一。

換句話說，無窮級數及其和的研究就是序列及其極限的研究的一種新的形式。但這種形式，讀者可以從以後的敘述中看出，無論在確定極限的存在還是在計算極限時都表現難以估計的優點。因此無窮級數在數學分析及其應用中成為一種重要的研究工具。

例 1) 無窮級數的一個極簡單的例子乃是（讀者所熟悉的）幾何級數：

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

它的部分和($q \neq 1$ 時)是

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

如果幾何級數的公比 q 的絕對值小於 1，則[如我們所知，30 段 6)] s_n 有有限極限

$$s = \frac{a}{1 - q},$$

即該級數收斂而 s 是它的和。

在 $|q| \geq 1$ 時該幾何級數給我們一個發散級數的例子。如果 $q \geq 1$ ，則其和將成 $+\infty$ 或 $-\infty$ （視 a 的正負號而定）；在其他情形則和根本不存在。我們指出一個有趣的級數，它在 $a=1$ ， $q=-1$ 時得出：

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \equiv 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots \textcircled{1}$$

① 如果級數某項 a 為負數： $a = -b$ ($b > 0$)，則將 $\dots + (-b) + \dots$ 寫成 $\dots - b + \dots$ 。但要注意，在此級數該項仍為 $-b$ 而不是 b 。

其部分和交錯着等于 1 或 0。

2) 不准确定級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

是发散的,事实上,級数的項虽递减而其第 n 个部分和

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

則隨 n 而增至无穷。

3) 最后,我們給出一个值得一提的例子,它由变数

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

得出,我們在 49 段已經指出这个变数趋于超越数 e 。也就是說, e 是下面无穷級数之和:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

回忆 49 段所講 e 的近似計算,从这个例子,讀者可以看出繼續导入越来越小的校正数的好处,这种好处就在于这些校正数是把用部分和数的形式表示出的 e 的近似值来逐步地加以改进。

235. 简单定理 如果在級数(2)里舍去前 m 項,則得一級数:

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \quad (5)$$

称为級数(2) m 項后的余項。

1°. 如果級数(2)收斂,則其任何余項(5)也收斂;反之,由余項(5)的收斂也可推出原級数(2)的收斂。

我們固定 m 并以 A'_k 表示級数(5)的第 k 部分和:

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k}.$$

于是显然有

$$A'_k = A_{m+k} - A_m. \quad (6)$$

如果級數(2)收斂而 $A_n \rightarrow A$, 則在 k 无限增大时对和 A'_k 也存在有一个有限极限

$$A' = A - A_m \quad (7)$$

这就表示級數(5)是收斂的。

反之, 如果給出了級數(5)是收斂的而 $A'_k \rightarrow A'$, 則令 $k = n - m$ ($n > m$ 时)而改写等式(6)为:

$$A_n = A_m + A'_{n-m};$$

由此可以看出, 在 n 无限增大时, 部分和 A_n 有极限

$$A = A_m + A', \quad (8)$$

即級數(2)收斂。

換句話說, 在一个級數的开头舍弃其有限多項或添补一些新項, 都不会影响該級數的性质(指其收斂性或发散性而言)。

如果級數(5)收斂的話, 我們将其和的記号 A' 改用 α_m 来表示, 如此可以在記号上表現出余項是由哪一項以后所取的。于是公式(8)和(7)可改写如下:

$$A = A_m + \alpha_m, \quad \alpha_m = A - A_m. \quad (9)$$

如果 m 增至无穷, 則 $A_m \rightarrow A$ 而 $\alpha_m \rightarrow 0$ 。如此:

2°. 若級數(2)收斂, 則其第 m 項后余項之和 α_m 随 m 的增大而趋于 0。

我們提一提收斂級數的一些簡單性質:

3°. 如果收斂級數各項乘以同一倍数 c , 則級數仍保持其收斂性, 而其和則乘以 c 。

事实上, 級數

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots$$

的部分和 $\bar{A}_n$ 显然等于

$$\bar{A}_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cA_n$$

而有极限 cA 。

4°. 两个收敛级数

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

与

$$B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

可逐項施行加或减, 所得级数

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots$$

也收敛, 而其和各等于 $A \pm B$ 。

如果 A_n, B_n 及 C_n 表示上述各级数之部分和, 则显然有

$$\begin{aligned} C_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_n \pm B_n \end{aligned}$$

取极限得

$$\lim C_n = \lim A_n \pm \lim B_n,$$

这就证明了我们的断言。

最后, 我们注意:

5°. 收敛级数的公項 a_n 必趋于 0。

这可以用很初等的方法来证明: 既然 A_n 有 (因而 A_{n-1} 也有) 有限极限 A , 则

$$a_n = A_n - A_{n-1} \rightarrow 0.$$

上述命题包含了级数收敛的必要条件, 今后常常要用到它。这个条件如不成立, 则级数必定发散。但是要注意, 这条件对于级数的收敛性是不充分的。换句话说, 即使实现了这个条件, 级数还是可以发散。级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

就是一个例子 [这是 234 段 2) 讨论过的]; 读者以后还可找到许多这类例子。

§ 2. 正項級数的收斂性

236. 正項級数收斂性条件 現在我們来解决如何判定級数收斂或发散的問题。对于非負項的級数这个問题最容易解决; 为簡單起見这种級数我們將簡称为正項級数。

設

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (\text{A})$$

是一个正項級数, 即 $a_n \geq 0 (n=1, 2, 3, \cdots)$. 于是显然有

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n,$$

也就是說, A_n 是 n 的上升函数。回忆一下单調函数的极限定理[44段], 我們立即得出下列关于正項級数的基本定理:

定理. 正項級数(A)必有和; 此和在其部分和有上界时是有限的(因此該級数也就收斂); 在相反的情形則該和是无限的(从而級数发散)。

正項級数的所有实用的收斂和发散檢驗法归根到底全都建立在这个簡單定理上。但只在很少的情形下能直接应用它来判断級数的性質。我們来举几个这种例子。

1) 試看級数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

它就是所謂調和級数①

显然我們有不等式:

① 由第二項起, 每項都是两个相邻項的調和平均数。所謂 c 是 a 与 b 的調和平均数乃指它們之間有如下关系:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

如果將該調和級數由第二項起依次分段, 每段依次为 2, 4, 8, ... 項:

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_2; \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{2^2}; \underbrace{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{15}}_{2^3}; \cdots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^k - 1}}_{2^{k-1}}; \cdots,$$

則每段之和都將大於 $\frac{1}{2}$; 這只要在(1)中依次令 $n=2, 4, 8, \dots, 2^{k-1}, \dots$ 就可明白。我們以 H_n 表示調和級數的第 n 個部分和; 於是顯然

$$H_k > k \cdot \frac{1}{2}.$$

可見部分和無上界, 故該級數有無限和。

我們還在此提一下, H_n 隨着 n 的增大而非常遲緩地增大。例如歐拉曾算過,

$$H_{1000} = 7.48\cdots, \quad H_{10000000} = 14.39\cdots, \text{ 等等。}$$

以後我們還有機會對和 H_n 的增長情況作更精確的描述 [238 段, 4)]。

2) 現在我們來看更一般的級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots,$$

這裡 s 是任意的實數; 它包含前一級數為其特例 ($s=1$ 時)。

由於它與級數(1)相似, 故也稱為調和級數。

既然在 $s < 1$ 時該級數每項都大於級數(1)的相應項, 則在這情形部分和也當然沒有上界, 所以該級數發散。

現在我們來看 $s > 1$ 的情形; 為便利起見令 $s = 1 + \sigma$, 而 $\sigma > 0$ 。與(1)相比, 我們這回有

$$\frac{1}{n^s} + \frac{1}{(n+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^s} < n \cdot \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma}. \quad (2)$$

也如前例將級數各項依次分段:

$$\underbrace{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}}_2; \underbrace{\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}}_{2^2}; \underbrace{\frac{1}{8^s} + \cdots + \frac{1}{15^s}}_{2^3}; \cdots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{(2^{k-1})^s} + \cdots + \frac{1}{(2^{k-1})^s}}_{2^{k-1}}, \cdots,$$

由(2)不难証明, 这些和各小于下列几何級数的相应項:

$$\frac{1}{2^\sigma}, \frac{1}{4^\sigma} = \frac{1}{2^{2\sigma}}, \frac{1}{8^\sigma} = \frac{1}{2^{3\sigma}}, \cdots, \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma} = \frac{1}{2^{(k-1)\sigma}}, \cdots$$

在这情形显然, 无论取該級数的哪一个部分和, 它总小于常数

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2^\sigma}},$$

所以該級数收敛。

237. 級数比較定理 正項級数的收敛性或发散性常常可以跟另一个已知收敛或发散的級数的对比来确定。这种比較法以下列簡單定理为基础。

定理 1. 設給了两个正項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (\text{A})$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \quad (\text{B})$$

如果由某項起(比方說对 $n > N$) 不等式 $a_n \leq b_n$ 成立, 則由級数 (B) 的收敛性可推出級数 (A) 的收敛性, 或者这是同一回事——由級数 (A) 的发散性可推出級数 (B) 的发散性。

証明 因为舍弃級数的开头有限多項并不影响級数性質[235 段 1°], 我們不妨認為对 $n=1, 2, 3, \cdots$ 的一切值, 恒有 $a_n \leq b_n$ 而不减弱問題的一般性。設 A_n 及 B_n 各表示級数(A)及(B)的部分和, 如此有

$$A_n \leq B_n.$$

設級数(B)收敛; 于是按 236 段的基本定理知道和数 B_n 有界:

$$B_n \leq L (L \text{ 为常数}; n=1, 2, 3, \dots).$$

由前一不等式更不成問題有

$$A_n \leq L,$$

而这按同一定理就表示級数(A)是收斂的。

有时在实践上比較方便的是下面这个定理，它是由前一定理导出的：

定理 2. 如果极限

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K^{\text{①}} \quad (0 \leq K \leq \infty),$$

存在，则在 $K < \infty$ 时由級数(B)的收斂性可推知級数(A)的收斂性，而在 $K > 0$ 时由級数(B)的发散性可推知級数(A)的发散性 [如此，在 $0 < K < \infty$ 时两級数同时收斂或同时发散]。

证明 設級数(B)收斂而 $K < \infty$ 。取一任意的数 $\varepsilon > 0$ ，按极限的定义，对充分大的 n 我們将有

$$\frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon, \text{ 由此有 } a_n < (K + \varepsilon) b_n.$$

由 235 段 3° 知道，既然級数(B)收斂，則逐項乘以 $K + \varepsilon$ 所得出的級数 $\sum (K + \varepsilon) b_n$ 也就收斂。由此按前一定理推知級数(A)收斂。

如果級数(B)发散并且 $K > 0$ ，則在这情形反比 $\frac{b_n}{a_n}$ 有有限极限；級数(A)應該发散，因为，倘若它收斂，則按剛才所证，級数(B)也就該收斂了。

最后，我們还讲一个比較定理，它也是第一个定理的推論。

定理 3. 如果由級数某項起 (比方說对于 $n > N$) 不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}^{\text{②}}, \quad (3)$$

① 我們在此假設 $b_n \neq 0$ 。

② 在此 a_n 及 b_n 当然假設都异于 0。