高等数学讲义

下　　册

邵士敏　蒋定华　编

中央广播电视大学出版社

高等数学讲义

下册

邵士敏　蒋定华　编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

朝阳新华印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32　印张10　千字225

1984年4月第1版　1986年5月第2次印刷

印数 235,001—405,000

书号 13300·15　　定价 1.35 元

目　　录

第十章　多元函数微分学

简单地说，多元函数就是自变量多于一个的函数．多元函数概念及其微分学是一元函数及其微分学的推广和发展，它们有着许多类似之处，但有的地方也有着重大的差别．从一元发展到二元，有些地方是有重大差别的，然而从二元发展到三元以至更多元函数，就没有什么本质区别了．因此，我们重点讲述二元函数及其微分学，而只是稍微提及三元函数和更多元函数的情形．本章的重点是偏导数、全微分的概念和计算。

§1　多元函数、极限及连续性

1. 多元函数

在一元函数微积分中，讨论的是只有一个自变量和一个因变量的函数．而实际上，这种函数往往是一种特殊或简化的情形，在一个问题中往往有更多的变量．我们考察几个典型的例子．

例1　设三角形的底边长为 a，底边上的高为 h，那么三角形的面积 S 为

$$S=\frac{1}{2}ah$$

在这一问题中就有三个变量：a、h 和 S. 当 a 和 h 每取定为某一组值时，就有一确定的面积值 S.

如果高 h 固定不变，当 a 取定为某一值时，就有一确定的面积值 S. 这时就只有一个自变量 a 和一个因变量 S，即在高固定不变条件下面积 S 是底边长 a 的一元函数，这是一种特殊情形.

例2　具有一定质量的理想气体，其体积 V、压力 p、绝对温度 T 满足气态方程

$$V=\frac{RT}{p}\quad (R\text{ 是常数})$$

在这一问题中有三个变量 V、p、T. 当 p 和 T 每取定为某一组值时, 按照上面的关系, 就有一确定的体积 V.

如果温度固定不变, 即考虑等温过程. 当 p 取定为某一值时, 就有一确定的体积 V, 即对于等温过程, 体积 V 是压力 p 的一元函数.

例 3 考虑大气的温度分布, 在每一点处有温度 T 的值, 在空间直角坐标系中点可用 (x,y,z) 表示, 当 (x,y,z) 每取定一组值时, 就有一确定的温度值 T. 这里有四个变量, 比前两个例子的变量更多一些. 进一步可以考虑依赖于时间 t 的温度分布, 这时又多了一个变量 t, 当 (x,y,z,t) 每取定一组值时, 就有一个确定的温度值 T.

从这样一些问题中即可抽象出多元函数的概念.

定义 1 (二元函数) 在一问题中有三个变量 x、y 和 z, 当 x、y 在某一范围 D 内每取定一组值时, 按照一定的对应关系, 都有一确定的 z 值与它们对应, 则称 z 是 x、y 的二元函数, 记作

$$z=f(x,y)\qquad (x,y)\in D$$

其中 x、y 称为自变量, z 又称为因变量, 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域. 函数 z 的取值范围称为函数的值域.

从这个定义可以看到, 这与一元函数概念没有多大区别, 只是自变量多了一个.

在平面上建立了直角坐标系后, (x,y) 每取定一组值, 在 xy 平面上就可用一点表示, 二元函数的定义域 D 通常就是 xy 平面上的一个区域.

找二元函数的定义域的方法与一元函数中是类似的, 就是找使函数有意义的自变量的范围, 不过画出定义域的图形要复杂一

些.

例 4 求二元函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的定义域.

解 由根式函数的要求容易知道该函数的定义域为

$$x^2+y^2\leqslant a^2$$

定义域通常是用不等式表示的,在 xy 平面上它表示哪一块区域呢? 一般,先画等式 $x^2+y^2=a^2$ 表示的线,这条线把平面分成两部分,在圆内的点上有 $x^2+y^2<a^2$,在圆外的点上有 $x^2+y^2>a^2$. 所以 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 即为包括圆周的圆内部区域(见图 10.1).

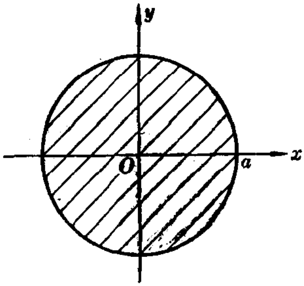

图 10.1

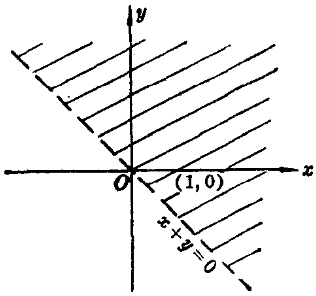

图 10.2

例 5 求二元函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域.

解 该函数要求 $x+y>0$, 此即定义域.

作图时,仍先画出等号成立的线 $x+y=0$, 这条线把平面分成两半,必然一半是 $x+y>0$ 的,另一半是 $x+y<0$. 到底是哪一半呢? 可用一已知点试一试. 已知(1,0)点在右上半平面,将 $x=1$, $y=0$ 代入 $x+y>0$, 恰好满足此不等式,可知(1,0)在 $x+y>0$ 的区域内,即 $x+y>0$ 是右上半平面,如图 10.2 所示的阴影部分. 由于区域 $x+y>0$ 不包括 $x+y=0$ 这条线, 故 $x+y=0$ 在图中用虚线表示.

例 6 求二元函数 $z=\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ 的定义域.

解 此函数的定义域应为这两项各自定义域的公共部分

$$\begin{cases}|x|\leqslant|a|\\x-y>0\end{cases}$$

$|x|\leqslant|a|$为 $x=|a|$ 和 $x=-|a|$ 这两条线之间的部分，而 $x-y>0$ 为直线 $x-y=0$ 的右下半平面，公共部分为图 10.3 所示的阴影部分。

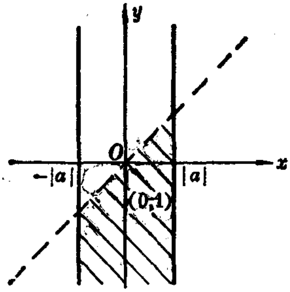

图 10.3

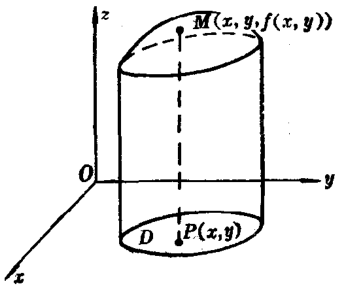

图 10.4

二元函数的几何意义是空间中一曲面．从上一章学过的空间解析几何中已可以看到这一点．这里再从函数的角度看一看．

设二元函数

$$z=f(x,y)\quad (x,y)\in D.$$

在定义域 D 中每取定一点 $P(x,y)$，按照函数关系就可得一 z 值，空间中点 $M(x,y,f(x,y))$ 的坐标满足函数式 $z=f(x,y)$．当 $P(x,y)$跑遍定义域 D，相应的点$M(x,y,f(x,y))$就描绘出一曲面，这一曲面上点的坐标都满足函数式 $z=f(x,y)$，因此这个曲面就是二元函数 $z=f(x,y)$的图形（见图 10.4）．

例 7 作二元函数 $z=1-x-y$ 的图形．

解 从空间解析几何可知它的图形是平面．只须找出它在三个坐标轴上的截距，就很容易画出此平面（见图 10.5）．

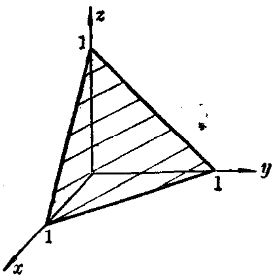

图 10.5

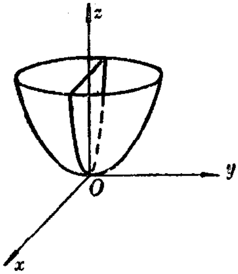

图 10.6

例 8 作 $z=x^2+y^2$ 的图形.

解 这是一开口向上的椭圆抛物面，定义域为全平面. 图形见图 10.6.

例 9 作 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$的图形.

解 定义域为 $x^2+y^2\leqslant 1$,即单位圆的内部. 值域为 $0\leqslant z\leqslant 1$. 球心在原点半径为 1 的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=1$$

解出 z 为

$$z=\pm\sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

其中取＋号的一支表示上半球面, 取－号的一支表示下半球面. 所以, 要作的图形是上半球面(见图 10.7).

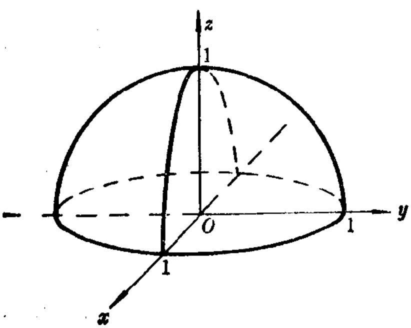

图 10.7

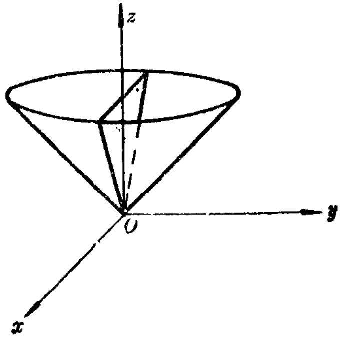

图 10.8

例 10 作 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图形.

解 定义域为全平面,图形为上半圆锥(见图 10.8).

从二元函数的概念很容易推广到三元函数和更多元函数，定义都是基本相同的，只是自变量个数不同. 有三个自变量的函数就是三元函数

$$u=f(x,y,z)$$

一般地,有 n 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数就是 n 元函数

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

三元函数的定义域通常是一空间区域. 如

$$u=\sqrt{a^2-(x^2+y^2+z^2)}$$

的定义域为 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$，这是一半径为 a 的球的内部. 又如 $u=\dfrac{1}{x-y+z-2}$的定义域为 $x-y+z-2\neq 0$，即除平面 $x-y+z-2=0$ 外的全空间. 三元函数没有几何意义，由于三元函数中有四个变量,在我们生活的三维空间中就不能直观地表示它,如果硬要说它有图形的话，那是在四维空间中. 四元以上的函数就连定义域也没有图形了.

2. 二元函数的极限

对于二元函数，应考虑 $x\to x_0$、$y\to y_0$ 时 $f(x,y)$的极限问题，或者按几何意义来说，当点 $P(x,y)$ 趋向于一定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$的极限问题.

这种极限的朴素概念也可说成是,当 $P(x,y)$充分接近 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 与某一常数 A 充分接近，则称当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$时 $f(x,y)$的极限为 A.

与一元函数的极限比较，“$f(x,y)$与 A 充分接近”这句话没有多大区别,区别在于 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$较为复杂. 一元函数极限，$x\to x_0$ 的方式很简单,分为从左边、从右边趋向于 x_0 即可. 在二元

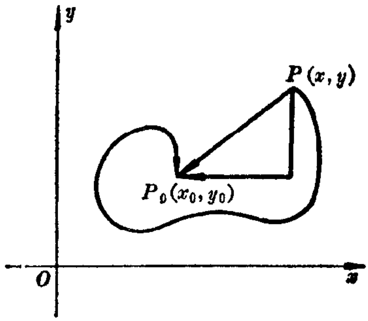

图 10.9

函数的极限问题中，$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$的方式就很多，P 可以取直线趋向于 P_0，可以取折线趋向于 P_0，甚至可以取一条希奇古怪的路径趋向于 P_0.（见图 10.9）．要是 $f(x,y)$ 的极限存在的话，应是以任意方式 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$都以同一数 A 为极限．

$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$的方式有无穷多种，但有一点是共同的，不管以什么方式，只要 $P(x,y)$趋向于 $P_0(x_0,y_0)$，就要 $P(x,y)$与 $P_0(x_0,y_0)$之间的距离

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

趋向于零．引进 $\rho\to 0$ 表示二元函数的极限过程是至关重要的，它简化了二元函数的极限，使得我们可仿照一元函数的极限定义给出二元函数极限的定义．

定义 2 设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的附近有定义（可不包括 P_0 点）．若对于任意给定的正数 ε，都存在正数 δ，使得当 $0<\rho<\delta$（$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$）时，就有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$时 $f(x,y)$以 A 为极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=A$$

或
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

这个定义中 $0<\rho<\delta$ 也可以改成 $|x-x_0|<\delta$ 和 $|y-y_0|<\delta$，而 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$，这两种表述方式是等价的.

例 11 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0$.

证 此时 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 任给 $\varepsilon>0$，要使
$$|\sqrt{x^2+y^2}-0|<\varepsilon$$
即要
$$\rho<\varepsilon$$
取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<\rho<\delta$ 时，就有
$$|\sqrt{x^2+y^2}-0|<\varepsilon$$
根据定义 2，即有
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0$$

注意，在定义 2 中，只要 $0<\rho<\delta$，即不管以什么方式 $P\to P_0$，就有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$. 也就是说，P 沿任何路线趋于 P_0，$f(x,y)$ 都有同一个极限值 A. 考虑 P 沿某些路线趋于 P_0，对于证明一个函数极限存在是没有什么用处的，但对证明某一函数极限不存在是大有用处的. 根据上面的讨论，只要找到两条路线，P 沿这两条路线趋向于 P_0 时 $f(x,y)$ 的极限不同，就可得出结论：$P\to P_0$ 时 $f(x,y)$ 的极限不存在.

例 12 考察二元函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
当 $P(x,y)\to O(0,0)$ 时极限是否存在?

证 考虑 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于 $O(0,0)$，于是

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

取 $k=0$，即沿 x 轴趋向 $O(0,0)$时，极限为 0；取 $k=1$，即沿 $y=x$ 趋向 $O(0,0)$时，极限为$\frac{1}{2}$. 所以，当 $P(x,y)\to O(0,0)$时 $f(x,y)$ 的极限不存在.

三元函数以至于 n 元函数的极限都可仿照二元函数极限去定义.

3. 二元函数的连续性

二元函数连续性概念与一元函数连续性概念是一样的.

定义 3 设二元函数 $z=f(x,y)$在 $P_0(x_0,y_0)$点及其附近有定义，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$点连续.

定义 3 中的极限式子可换成一等价形式. 首先它等价于

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[f(x,y)-f(x_0,y_0)]=0$$

然后令 $\Delta x=x-x_0$、$\Delta y=y-y_0$，那么 $x\to x_0$、$y\to y_0$ 即为 $\Delta x\to 0$、$\Delta y\to 0$，因此

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

即为函数 z 的改变量，也称全增量，用 Δz 表示. 这样最后写成等价形式

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

即当自变量的改变量都趋向于零时函数的全增量也趋向于零，这个函数就在该点连续. 这种等价形式的连续定义在后面将用到.

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域D的每一点处都连续则称

$$z=f(x,y)$$
在区域D上连续.

区域D上的连续函数的几何意义为一连续曲面. 象前面例7、例8、例9、例10所列的函数，它们的图形都是连续曲面.

二元连续函数也具有一元连续函数所具有的性质. 连续函数经过四则运算和复合仍保持连续性，由此仍可得出"多元初等函数在其定义域内连续"的重要结论. 这里不再详述.

§2 偏 导 数

二元函数虽然有两个自变量，但有时要考虑函数对某一个自变量的变化率. 这时另一个自变量是不变的，实际上就是一元函数，可以利用一元函数的导数概念，得到二元函数对某一个自变量的变化率，这就是二元函数的偏导数.

1. 一阶偏导数

定义1 设二元函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)及其附近有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称极限值为$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处对x的偏导数(或称偏微商)，记作

$$f'_x(x_0,y_0)\qquad z'_x\Big|_{(x_0,y_0)}\qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\qquad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

若极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称极限值为$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处对y的偏导数(或称偏微商)，记作

$$f'_y(x_0,y_0)\qquad z'_y\Big|_{(x_0,y_0)}\qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

从定义中可以看到，固定 $y=y_0$，z 对 x 的导数就是 z 对 x 的偏导数；固定 $x=x_0$，z 对 y 的导数就是 z 对 y 的偏导数. 与一元函数所不同的地方只是 z 有对 x 的偏导数还有对 y 的偏导数.

如果在区域 D 内的每一点 (x,y) 处，$z=f(x,y)$ 对 x 和对 y 的偏导数存在，则称 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内偏导数存在. 此时，$f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 仍是 x、y 的二元函数，称为 $f(x,y)$ 的对 x 与对 y 的偏导函数，也简称为偏导数.

从偏导数概念可知，只须用一元函数的微商法，即可求出多元函数的偏导数.

例 1 求 $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$ 的偏导数.

解 对 x 偏导时，y 暂时看成常数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

对 y 偏导时，x 暂时看成常数

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

例 2 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解 这是一个三元函数，偏导数的定义与计算法与二元函数一样. 对 x 偏导时，y、z 不变

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

由于 r 中 x、y、z 是对称的，即两变量互换后，函数不变. 因此，用变量轮换的办法，即可得出另外两个偏导数

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

例 3 求 $z=x^y$ 的偏导数.

解 对 x 偏导时，y 不变，这时是幂函数，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$$

对 y 偏导时，x 不变，这时是指数函数

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$$

例 4 设 $z=\ln(1+x^2+y^2)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$在点(1, 2)处的值.

解 先求偏导函数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

再将(1, 2)代入，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}\qquad\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\frac{2}{3}$$

现在来考察一下偏导数的几何意义．既然偏导数基本上就是一元函数的导数，那么偏导数的几何意义似乎也应是某条曲线的切线斜率，不过并没有直接给出这条曲线.

在空间直角坐标系中，二元函数 $z=f(x,y)$的图形为一曲面．考察 $f'_x(x_0,y_0)$．我们注意到，此时 y 固定取 y_0，这在几何上就是

$$\begin{cases}z=f(x,y)\\y=y_0\end{cases}$$

即为曲面 $z=f(x,y)$与平面 $y=y_0$ 的交线，这条曲线在 $x=x_0$ 处的切线对 x 轴的斜率即为 $f'_x(x_0,y_0)$，即

$$f'_x(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\alpha$$

这里，α 为由正 x 轴转到切线的角(见图 10.10).

同理，$f'_y(x_0,y_0)$的几何意义就是：曲面 $z=f(x,y)$被 $x=x_0$ 所截得的曲线在 $y=y_0$ 处的切线对 y 轴的斜率.

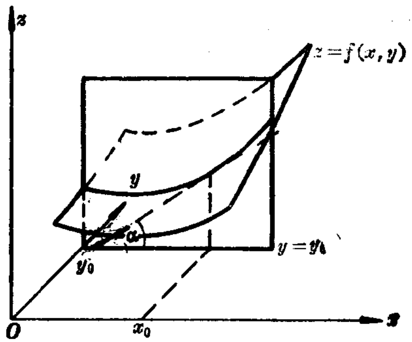

图 10.10

一个一元函数可导必定连续，二元函数的偏导数与连续是否具有这种关系呢？我们考察两个例子.

例 5 设有二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

考察它在(0, 0)点的连续性与偏导数.

这个函数正是上一节例 12 所研究的函数，那里已经得到 $P(x,y)\to O(0,0)$ 时函数极限不存在，自然在(0, 0)点不连续.

在(0, 0)点两个偏导数是否存在呢？固定 $y=0$

$$f(x,0)=\frac{0}{x^2+0}=0 \quad (x\neq 0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

因此，$f'_x(0,0)$存在. 同样可证 $f'_y(0,0)$存在.

例 6 设有二元函数

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

考察它在(0, 0)点的连续性与偏导数.

这个函数正是上一节例 11 所研究的函数，那里已经得到