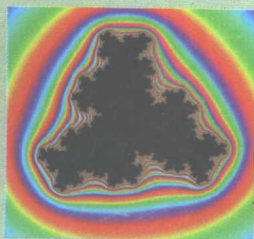
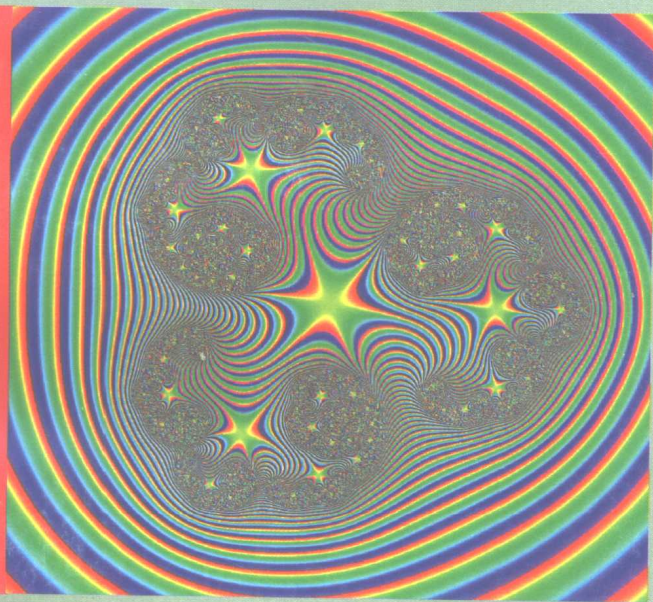


高中 学生数学课外阅读系列

数列与极限

SHULIE
YU
JIXIAN

刘 文 编著



上海教育出版社

高中学生数学课外阅读系列

数 列 与 极 限

刘 文 编著

上 海 教 育 出 版 社

高中学生数学课外阅读系列

数 列 与 极 限

刘 文 编著

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

(邮政编码:200031)

各地新华书店经销

商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4 字数 84,000

1999 年 5 月第 1 版 2000 年 10 月第 2 次印刷

印数 5,201—9,250 本

ISBN 7-5320-6368-2/G·6523 定价: 4.30 元

如有质量问题,请与公司管理部联系。T: 56628900 $\times$ 813

目 录

一、数列	1
1. 数列的概念	1
2. 等差数列	8
3. 高阶等差数列	18
4. 等比数列	31
5. 其它数列的求和举例	38
二、数列的极限	58
1. 数列极限的概念	58
2. 无穷小与无穷大	63
3. 数列极限的运算法则	68
4. 数列极限计算举例	77
5. 无穷级数	82
三、函数的极限	92
1. 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限	92
2. 函数的左极限和右极限	96
3. 函数在无穷远点处的极限	99
4. 函数 $f(x)$ 趋于无穷大的情况	102
5. 函数极限的运算法则	107
6. 利用变量替换求极限	113
练习题答案	119

一、数 列

1. 数列的概念

按照一定次序排列的一连串的数,叫做数列.例如:

- 1) 把自然数的倒数按由大到小的次序排列起来,就得到

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

- 2) 把 -1 的 1 次幂, 2 次幂, 3 次幂, $\dots$ 依次排列起来, 就得到

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

- 3) 把 30 的正因数按从小到大的次序排列起来, 就得到

$$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.$$

- 4) 把全体素数按由小到大的次序排列出来, 就得到

$$2, 3, 5, 7, 11, \dots$$

- 5) 把数 1 重复排列出来, 就得到

$$1, 1, 1, \dots$$

对于一个数列, 在这一串数中, 其中的每一个数叫做该数列的项. 并且, 给数列的项编上次序: 在第 1 个位置上的数叫做数列的第 1 项, 第 2 个位置上的数叫做数列的第 2 项, $\dots$, 在第 n 个位置上的数叫做数列的第 n 项. 在一个数列中, 项数一经确定, 这一位置上的数就应完全确定了.

数列的第 n 项用附有下标(表示项数)的字母(如 a_n)来表示. 当 $n=1$ 时, a_1 就表示数列的第 1 项; $n=2$ 时, a_2 就表

示数列的第2项,……于是,数列的一般形式是

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

并且,整个数列可简记成 $\{a_n\}$.

现在来考虑数列的分类:

如果按照项的个数来分,对于一个数列,如果在某一项的后面不再有任何项,这个数列就叫做有穷数列;如果在任何一项的后面都有跟随着的项,这个数列就叫做无穷数列.在上述例子中,数列3)是有穷数列,其它几个数列都是无穷数列.

如果按照项与项之间的大小关系来分,对于一个数列,如果从第2项起,每一项都不小于它的前面的一项(即 $a_{n+1} \geq a_n$),这样的数列就叫做递增数列;如果从第2项起,每一项都不大于它前面的一项(即 $a_{n+1} \leq a_n$),这样的数列就叫做递减数列.

在上述例子中,3)、4)、5)是递增数列,而1)、5)则是递减数列.

递增数列和递减数列又统称为单调数列.除了单调数列外,对于一个数列,如果从第2项起,有些项大于它的前一项,有些项却小于它的前一项,这样的数列就叫做摆动数列;如果一个数列的每一项都相等,这数列就叫做常数数列.

例如,在上面的例子中,2)是摆动数列,5)是常数数列.

对于一个数列,如果每一项的绝对值都小于某一个正数(即 $|a_n| < M$,这里 M 是某一正实数),这个数列就叫做有界数列;假定不存在这样的正数,这种数列便叫做无界数列.

例如,在上面的例子中,数列4)是无界数列,其余数列都是有界数列.

怎样来表示一个数列呢?

在前述例子中,写出一个数列的各项的构成方法,固然可以表示一个数列,但是,这样做未免太麻烦,而且对稍复杂一些的数列,将难以表达清楚.为此,我们来寻求通过式子来表示一个数列的方法.

首先使我们想到的是,假如可以建立一个由项数 n 来确定 a_n 的公式,就可通过一个简单公式表示出一个数列的一切项了.例如,前述数列 1), 即自然数的倒数按由大到小的次序排列起来而形成的数列:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

注意到

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

就可通过归纳,得出该数列的第 n 项的一个公式

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

这种用项数 n 来表示该数列的相应的项的公式,称为数列的通项公式.

对于一个数列,它的通项公式

$$a_n = f(n),$$

可看成是自变量 n 取自然数值的函数,这种函数称为整标函数.

有了通项公式,就可以根据项数 n 来求得该数列的任意一个项,这就可以用通项公式来表示一个数列了.我们把通项公式为 $f(n)$ 的数列记成 $\{f(n)\}$. 例如,前述例子中,数列 1)、2)、5), 可以运用通项公式分别简记为

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \{(-1)^n\}, \{1\}.$$

对于一个数列,怎样来求得它的通项公式呢?

对于任何有穷数列,都可以写出它的通项公式.例如,设

$$a_1, a_2, a_3$$

是由三项组成的数列,不难验证

$$a_n = a_1 \frac{(n-2)(n-3)}{(1-2)(1-3)} + a_2 \frac{(n-1)(n-3)}{(2-1)(2-3)} + a_3 \frac{(n-1)(n-2)}{(3-1)(3-2)}$$

是它的通项公式.容易看出,这种构造通项公式的方法,可以推广到任意有穷数列的情况.对于一个具有 n 个项的数列,运用这种方法得到的通项公式将是一个 $n-1$ 次多项式.当然,对于某些特殊数列,根据各项出现的规律,有可能写出简单的通项公式.

对于无穷数列,问题要复杂一点.

首先,并非对所有的无穷数列都能写出它的通项公式.例如,对于数列 4),人们至今无法写出它的通项公式.

对于一个无穷数列,如果已经知道了这个数列的各项的构成方法,如果其中仅涉及初等运算,我们是求出这个数列的通项公式的.而如果仅仅知道一个数列的前几项,尽管可以运用归纳的方法写出它的一个通项公式,但答案可能不是唯一的.例如下述数列:

$$1, 4, 7, 10, \dots$$

注意到该数列中从第二项起,后一项减去前一项的差都是 3,所以可以认为这个数列的通项公式是

$$a_n = 1 + 3(n-1).$$

但是,也可以写出另一些通项公式,使得以这个通项公式确定的数列的前 4 项也是 1, 4, 7, 10. 例如,令

$$a'_n = 1 + 3(n-1) + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

容易验证,

$$a'_1 = 1, a'_2 = 4, a'_3 = 7, a'_4 = 10.$$

当 $n > 4$ 时,应用公式 a_n 和 a'_n 算出的结果就不同了,例如

$$a_5 = 1 + 3(5 - 1) = 13,$$

$$\begin{aligned} a'_5 &= 1 + 3(5 - 1) + (5 - 1)(5 - 2)(5 - 3)(5 - 4) \\ &= 37. \end{aligned}$$

这就表明,仅给出一个无穷数列的前有限项,并不足以确定这个数列.通常,对于这种已知数列的前几项而要写出通项公式的问题,尽管答案不唯一,只要符合题设条件,都应该说是正确的.当然,应该善于发现规律性,写出一个比较简单的通项公式.

[例 1] 写出数列

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

的一个通项公式.

解 在这个数列中,1 与 0 交错地出现.我们知道,当 n 取正整数时, $(-1)^{n+1}$ 交错地取值 1 与 -1,因此 $1 + (-1)^{n+1}$ 交错地取值 2 与 0,于是得出所求数列的通项公式可以是

$$a_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}.$$

除了用通项公式表示一个数列外,还可以采用递归的方法来表示一个数列.如果有一组递推公式,例如:

$$a_1 = 2,$$

$$a_2 = 3,$$

$$a_{i+2} = 3a_{i+1} - 2a_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

我们便可依次算出

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \times 3 - 2 \times 2 = 5,$$

$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \times 5 - 2 \times 3 = 9,$$

$\vdots$

因此,采用一组递推公式,同样可以表示一个数列.

一般地,用递推公式:

$$a_1 = \alpha_1, a_2 = \alpha_2, \cdots, a_r = \alpha_r,$$

$$a_{i+r} = f(a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{i+r-1}) \quad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

表示的数列,叫做递归数列.其中, r 元函数 f 称为这一数列的定义函数, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 叫做初始值, r 叫做这一递归数列的阶数.

当 f 是一线性函数时,即 $a_{i+r} = c_1 a_i + c_2 a_{i+1} + \cdots + c_r a_{i+r-1}$,则称这一递归数列为线性递归数列.

[例2] 菲波那契数列是指:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$$

从第3项起,它的每一项等于它的前两项之和.写出菲波那契数列的递归表示式.

解 根据菲波那契数列的各项的构成方法,可把这一数列采用递归方法表示如下:

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1,$$

$$a_{i+2} = a_{i+1} + a_i \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

例2表明,菲波那契数列是二阶线性递归数列.

对于递归数列,能不能改用通项来表示呢?

对于线性递归数列,求其通项是有一般方法可循的.下面以二阶线性递归数列为例来加以说明.设其定义函数为 $p_1 a_{n+1} + p_2 a_n$,其通项为 $f(n)$,则整标函数 $f(n)$ 应满足方程:

$$f(n+2) = p_1 f(n+1) + p_2 f(n).$$

可以证明:如果 $f_1(n), f_2(n)$ 是上函数方程的解,则它们的线性组合 $f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)$ 也是上函数方程的解

(其中 c_1, c_2 为常数); 并且, 可以求出形如 $f(n) = x^n$ 的特解, 其中 x 由下法确定: 以 $f(n) = x^n$ 代入原函数方程:

$$x^{n+2} = p_1 x^{n+1} + p_2 x^n,$$

即

$$x^2 - p_1 x - p_2 = 0,$$

因此, 只要 x 满足上代数方程 (称为该递归数列的特征方程) 即可. 设 x_1 和 x_2 为上述特征方程的两个根, 且 $x_1 \neq x_2$, 则原函数方程的一般解可写成^①

$$f(n) = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n.$$

其中系数 c_1, c_2 由初始条件确定.

例如, 由例 2 知, 菲波那契数列的特征方程为

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

它的解为

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

故满足递推公式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 的整标函数为

$$f(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

由初始条件: $a_1 = 1, a_2 = 1$, 即有

$$f(1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} c_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} c_2 = 1,$$

$$f(2) = (3+\sqrt{5}) c_1 + (3-\sqrt{5}) c_2 = 1.$$

可从中解出

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

① 如果特征方程取得重根, 情况将有所不同.

所以菲波那契数列的通项公式为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

[例3] 求如下线性递归数列的通项公式:

$$a_1 = 2, a_2 = 3,$$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

解 解该线性递归数列的特征方程:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

得 $x_1 = 1, x_2 = 2$. 故得:

$$a_n = c_1 + c_2 2^n.$$

以初始条件代入, 即令 $n = 1, 2$, 得

$$c_1 + 2c_2 = 2,$$

$$c_1 + 4c_2 = 3.$$

可从中解出 $c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2}$. 所以, 所求通项公式为

$$a_n = 1 + 2^{n-1}.$$

不难知道, 上述求二阶线性递归数列的通项的方法, 可以推广到 r 阶线性递归数列, 只是相应的特征方程为一元 r 次代数方程 $x^r - p_1 x^{r-1} - \cdots - p_{r-1} x - p_r = 0$.

2. 等 差 数 列

如果一个数列, 从第二项起, 每一项减去它前一项所得的差都等于一个常数, 这个数列就叫做等差数列. 这个常数叫做这个等差数列的公差, 通常用字母 d 表示.

例如, 等差数列

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots,$$

$$3, 1, -1, -3, -5, \dots$$

的公差分别为 3 和 -2. 运用递推公式, 可把这两数列分别表示成

$$a_1 = 2, a_2 = 5,$$

$$a_{i+2} = a_{i+1} + (a_{i+1} - a_i) = 2a_{i+1} - a_i;$$

$$b_1 = 3, b_2 = 1,$$

$$b_{i+2} = 2b_{i+1} - b_i;$$

其中 $i = 1, 2, \dots$. 一般地, 首项为 α , 公差为 $d = \beta - \alpha$ 的等差数列可表示成:

$$a_1 = \alpha, a_2 = \beta,$$

$$a_{i+2} = 2a_{i+1} - a_i. \quad (i = 1, 2, \dots)$$

所以, 等差数列是二阶递归数列, 它的定义函数为

$$f(a_i, a_{i+1}) = 2a_{i+1} - a_i.$$

根据以上定义, 对于等差数列

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

有

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

$$\dots\dots\dots$$

依此类推, 就得到等差数列的通项公式:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

有了通项公式, 就可以采用通项公式表示一个等差数列:

$$\{a_1 + (n - 1)d\}.$$

易知, 三数 a, b, c 成等差数列的充要条件是

$$2b = a + c.$$

此时,称 b 为 a 、 c 的等差中项.

[例 1] 在 a 、 b 之间插入 n 个数,使它们和原来两数成等差数列.

解 在 a 、 b 之间插入 n 个数而形成的等差数列中,首项是 a ,而第 $n+2$ 项即是 b .代入等差数列的通项公式,得:

$$b = a + (n+1)d.$$

可从中解出 d :

$$d = \frac{b-a}{n+1}.$$

于是,所求的 n 个数是

$$\frac{b-a}{n+1}, \frac{2(b-a)}{n+1}, \dots, \frac{n(b-a)}{n+1}.$$

例 1 告诉我们,运用等差数列的通项公式,如果在 a_1 , a_n , n , d 四个量中已知三个量,即可求出第四个量,并可求出数列的一切项.在解这一类型题目时(即不涉及数列的求和),往往先解出公差 d 是个关键.

[例 2] 设 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 是某等差数列中的两个项,试证明此数列中的任一项都不是有理数.

证明 用反证法.设 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 与有理数 a ,分别为首项为 a_1 ,公差为 d 的等差数列中的第 l 、 m 、 n 项,即

$$\sqrt{2} = a_1 + (l-1)d,$$

$$\sqrt{3} = a_1 + (m-1)d,$$

$$a = a_1 + (n-1)d.$$

从上三式中消去 a_1 、 d ,即有:

$$\frac{\sqrt{3}-a}{m-n} = \frac{\sqrt{2}-a}{l-n}.$$

因为 a 是有理数,故由上式有

$$\sqrt{3} = r_1\sqrt{2} + r_2,$$

其中 r_1, r_2 是有理数.两边平方,得

$$3 = 2r_1^2 + 2r_1 r_2\sqrt{2} + r_2^2,$$

于是

$$\sqrt{2} = \frac{3 - 2r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}.$$

上式中,右端为有理数,左端为无理数,这就产生了矛盾.由此即证得了此数列的任一项都不是有理数.

[例3] 设正数 $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ 成等差数列,证明

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}. \end{aligned}$$

证明 设公差为 d ,则

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{n} = d.$$

从而有

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d}.$$

所以

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{d} [(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) \\ & \quad + \dots + (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}}{d} = (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}) \left(\frac{a_{n+1} - a_1}{n} \right)^{-1} \\
&= \frac{n(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1})(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_1})}{(a_{n+1} - a_1)(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_1})} \\
&= \frac{n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_1}}.
\end{aligned}$$

[例 4] 设 x, y, z 成等差数列, 证明

$$y^2 + yz + z^2, z^2 + zx + x^2, x^2 + xy + y^2$$

也成等差数列.

证明 由假设 x, y, z 三数成等差数列, 即有

$$2y = x + z,$$

于是

$$\begin{aligned}
&(y^2 + yz + z^2) + (x^2 + xy + y^2) \\
&= \frac{1}{2}[4y^2 + 2y(x + z) + 2x^2 + 2z^2] \\
&= \frac{1}{2}[(x + z)^2 + (x + z)^2 + 2x^2 + 2z^2] \\
&= 2(z^2 + zx + x^2),
\end{aligned}$$

这就证得了 $y^2 + yz + z^2, z^2 + zx + x^2, x^2 + xy + y^2$ 也成等差数列.

[例 5] 设 p 个素数 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 构成递增等差数列, 且 $a_1 > p$. 证明: 如果 p 为素数, 则公差 d 能被 p 整除.

证明 因为 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 都是素数, 且都大于 p , 故其中任一数都不能被 p 整除. 而 $a_1, a_2, \dots, a_p$ 被 p 除时只能取 $p - 1$ 个不同的余数, 根据抽屉原则, 至少有两个数被 p 除得的余数相同, 设这两个数为 a_i 与 a_j ($i > j$), 于是

$$a_i - a_j = (i - j)d$$

能被 p 整除. 但 $0 < i - j < p$ 且 p 为素数, 故 d 能被 p 整除.

下面我们来推导等差数列的求和公式.

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和, 即

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

显然, 也可以将 S_n 写为

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1.$$

而数列 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ 可看成是首项为 a_n , 公差为 $-d$ 的等差数列.

根据等差数列的通项公式, 可将上两式写为:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d];$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + [a_n - (n-1)d].$$

把以上两式相加, 得

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) \\ &= n(a_1 + a_n). \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

以等差数列的通项公式代入上式, 则求和公式可写成另一形式:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d].$$

为了书写方便, 我们常用希腊字母 Σ (读作“西格马”) 表示求和. 例如, 前 10 个自然数的和可表示为

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \sum_{k=1}^{10} k.$$

一般地, 设 a_k 是某数列的通项, 则 $\sum_{k=1}^n a_k$ 表示这个数列的第 1 项一直加到第 n 项的和, $\sum_{k=2}^n a_k$ 表示从第 2 项起, 一直加