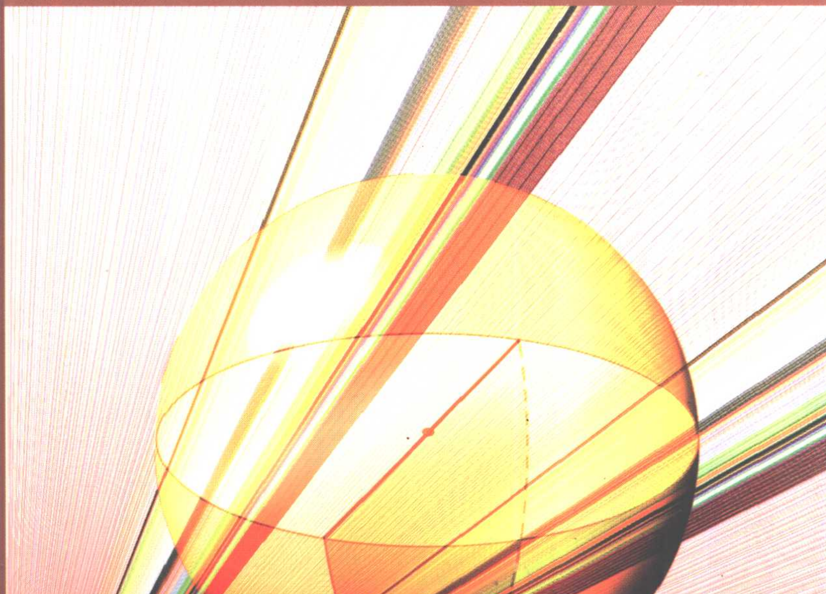
普通高等教育“九五”国家级重点教材

高等几何

罗崇善



高等教育出版社

普通高等教育"九五"国家级重点教材

高 等 几 何

罗崇善

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等几何/罗崇善. －北京:高等教育出版社,1999(2000重印)
ISBN 7－04－006970－9

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 罗…　Ⅲ. 高等几何－高等学校－教材
Ⅳ. 018

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第04959号

高等几何
罗崇善

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010－64054588	传　　真	010－64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	中国青年出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	1999年6月第1版
印　　张	9.5	印　　次	2000年3月第2次印刷
字　　数	230 000	定　　价	13.70元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题,请在所购图书销售部门联系调换.

内 容 提 要

本教材是普通高等教育“九五”国家级重点教材.全书按照教学基本要求编写,论证严谨、条理清晰,讲法深入浅出,突出几何直观性,重视高等几何对中学数学的指导作用.

本教材内容共分为七章:变换群与几何学、射影平面、射影变换、二次曲线的射影理论、射影几何的子几何、几何基础介绍、高等几何与中学几何.

适合于高等师范院校数学专业学生使用.

前　言

高等几何是高等师范院校数学专业的重要基础课之一.它的主要内容是具有悠久历史、至今仍富生命力的射影几何及其子几何.本书的选材和处理是围绕着开设本课程的下述两个基本目的进行的:一是使学生掌握几何学必要的基础知识,培养他们解决几何问题的能力,为进一步学习和研究作一些准备;二是使学生能以较高的观点理解中学几何教材,提高他们在中学几何教学中处理课内和课外产生的问题的能力,以适应中学教育从应试教育到素质教育转变的改革需要.

本书先从读者熟悉的欧氏几何的变换出发,介绍变换群与几何学关系的克莱因观点,作为全书的引论.再在克莱因观点的统率下,展开本课程的主要内容——射影几何.先介绍建立射影几何的园地——射影平面,其上的坐标、基本概念和基本原理,然后介绍各种射影变换,并且用射影变换去研究二次曲线.最后用射影几何的方法研究作为射影几何子几何的仿射几何、欧氏几何和非欧几何.螺旋式地将读者熟悉的欧氏几何和仿射几何上升到一个更高的境界,使他们对中学几何的认识有一个质的飞跃.

本书从几何上提出问题,有较多的直观讨论,解决问题则以解析法为主.为了缓解代数方法带来的繁琐计算,较多地使用了高等代数的知识,并在简化论证和计算上作了大量努力,使得叙述和论证较为简洁、明快,相应地,解题方法也较为简便.为了培养学生借助图形思考问题的能力和逻辑推理能力,本书也兼用综合法.解析法和综合法的交替使用,不仅对培养学生研究数学的能力有利,而且也使学生能较快地适应中学解析几何和初等几何的教学要求.

为适应面向21世纪的高师教学改革的需要，使数学专业的教学内容能更直接地为中学教学服务，本书增设了《高等几何与中学几何》一章，是否成功，有待实践检验．对于这一章，可采用重点讲授、自学、讨论或学生轮流讲等灵活多样的教学方法．

自学能力是一种重要能力，培养自学能力是大学教育极其重要的任务，作者力求使本书适于学生自学．为此，本书将思路清晰、详略得当、深入浅出、精选例题作为编写的一种基本要求．

书中不带“*”的内容是基本的、必要的，但是带“*”的内容也是重要的．使用时，可以根据教学时数、学生水平和教改需要适当取舍．记号“▎”表示证完或解完．

本书能有出版的机会，曾经得到著名数学家苏步青教授及其助手华宣积教授的关心和帮助．华宣积教授还审阅了本书的初稿，并提出宝贵意见．在这里，向他们表示深切的谢意．能写出本书，是与作者的老师胡鹏教授、王继武教授、王运达教授等的教诲和帮助分不开的，借此机会，表达学生对老师的衷心感激．四川教育学院的邓纯江教授，四川师大的刘祥高老师、田玉屏副教授长期使用本书的各稿进行教学，提出了不少宝贵意见，特别是田玉屏副教授仔细校阅了全书，提出了很多建设性意见，有几处具体处理也是她提供的，使本书增色不少，编者向他们表示衷心感谢．四川师大的徐芒、李艳、杨永东和李代伟等学生认真仔细阅读了全书，提出了一些宝贵意见，在此向他们表示感谢．编者还要感谢支持和帮助过本书编写和出版的四川师大教务处和数学系有关领导、编辑出版界人士、审稿学者、老师和学生．

由于水平所限，书中缺点错误在所难免，敬请老师和同学予以批评指正．

罗崇善

1997年11月于成都狮子山

目　　录

第一章　变换群与几何学

在初等几何中,我们曾经研究了长度、角度、面积等涉及大小的图形性质,还研究了圆、三角形、多边形、全等、相似、平行等涉及形状及位置关系的图形性质.在那里,研究问题的基本观点是静止的、固定的.但客观事物是在不断运动和变化着.为了深入认识图形的性质,"高等几何"将以运动和变换的观点去考察图形的性质.本章首先建立运动、变换与几何学的关系.

§1　变换与变换群

1.1　映射与变换

设有集合 S 和 S',若对 S 中每一元素 M,按照确定的法则 T,在 S' 中总存在唯一元素 M' 与之对应,则称此法则 T 为集合 S 到集合 S' 的**映射**,记为

$$T: S \longrightarrow S'. \tag{1.1}$$

若在 T 之下,元素 $M(\in S)$ 的对应元素是 $M'(\in S')$,则说 T 将 M 映成 M',记为

$$M \xrightarrow{T} M' = T(M),$$

并称 M' 为 M 在 T 之下的**象**,M 为 M' 在 T 之下的**原象**.

对于映射(1.1),我们用 $T(S)$ 表示集合 S 的全体元素在 T 之下的象的集合.按照定义,$T(S)$ 是 S' 的一部分,即 $T(S) \subset S'$.

若 $T(S)=S'$，即 S' 中的每一元素在 T 之下都有原象，则说此映射是**满的**；若 S 的不同元素的象元素也不同，则说此映射是**单的**. 在映射理论中，最重要的是既单又满的映射，即所谓**双射**.

在本书中，将两个集合之间的双射称为**对应**；将集合到自身的双射称为**变换**. 我们今后主要讨论在二维平面上点到点，直线到直线及点与直线之间的变换. 作为例子，下面介绍几种常见的变换.

例 1　恒等变换　若变换 $T: S \longrightarrow S$，将 S 上每一元素变到自身，即任给 M 属于 S，有

$$M \longrightarrow T(M)=M,$$

则称为**恒等变换**(或**单位变换**)，此时常将 T 记为 I.

例 2　平移变换　将平面上的点 M 按定向量 $\boldsymbol{a}$ 方向移动到点 M'，使得 $\overrightarrow{MM'}=\boldsymbol{a}$ 的变换称为**平移变换**，简称为**平移**. 以 $\boldsymbol{a}$ 为平移向量的平移常记为 $T_{\boldsymbol{a}}$.

为给出变换的表达式，在平面上选取由标架 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]$ 决定的直角坐标系 Oxy，如图 1－1. 设 $M(x,y)$，$M'(x',y')$，$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2\}$. 利用 $\overrightarrow{MM'}=\boldsymbol{a}$，易得在平移 $T_{\boldsymbol{a}}$ 之下，象点坐标与原象点坐标之间的关系，即平移 $T_{\boldsymbol{a}}$ 的表达式

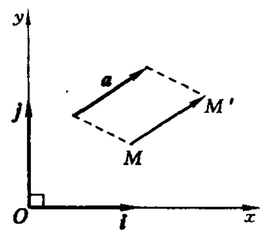


图 1－1

$$T_{\boldsymbol{a}}:\begin{cases} x'=x+a_1 \\ y'=y+a_2. \end{cases} \tag{1.2}$$

在代数上，(1.2)式与平面解析几何中移轴的坐标变换式一致. 但要注意，两者意义不同：前者表示点的改变，坐标系不动；而后者表示坐标系的改变，点不动.

例 3　旋转变换　对平面上的固定点 O 和有向定角 θ，使得原象点 M 与象点 M' 满足关系

$$|\overrightarrow{OM'}| = |\overrightarrow{OM}|, \angle MOM' = \theta$$

的点变换称为**以 O 为中心的旋转变换**，简称**旋转**，旋转角为 θ 的旋转常记为 R_θ.

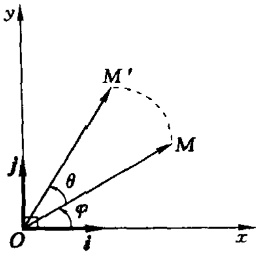


图 1－2

如图 1－2，在以中心 O 为原点的直角坐标系$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]$之下，由于原象点 M 的坐标可以写成

$$(x,y) = (|\overrightarrow{OM}|\cos\varphi, |\overrightarrow{OM}|\sin\varphi),$$

故象点 $M'(x',y')$的坐标成为

$$\begin{aligned} x' &= |\overrightarrow{OM'}|\cos(\varphi+\theta) \\ &= |\overrightarrow{OM}|(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' &= |\overrightarrow{OM'}|\sin(\varphi+\theta) \\ &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned}$$

于是，在给定的直角坐标系下，R_θ 的表达式为

$$R_\theta: \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases} \tag{1.3}$$

显然，此旋转变换式与平面解析几何中的转轴公式在代数上是一致的，但它们的几何含义不同.

例 4　镜射变换　对于平面上的定直线 ξ，使原象点 M 与象点 M' 之间的线段 MM' 被 ξ 垂直平分的点变换 $M \to M'$ 称为**以 ξ 为轴的镜射变换**，简称**镜射**.（“镜射”曾用名“反射”）

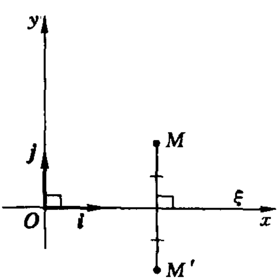


图 1－3

如图 1－3，在以 ξ 为横轴的直角坐标系 Oxy 下，镜射的表达式为

$$R_{ox}:\begin{cases}x'=x\\ y'=-y.\end{cases}\tag{1.4}$$

以上各例均为平面到自身的变换，下例是两个平面之间的对应.

例 5　平行射影　设平面 π 与平面 π' 交于直线 ξ，$\boldsymbol{\tau}$ 是既不平行于 π，又不平行于 π' 的向量.对于 π 上任意点 M，过 M 作平行于 $\boldsymbol{\tau}$ 的直线，交 π' 于 M'，则将 M 映成 M' 的点对应称为平面 π 到平面 π' 的**平行射影**，向量 $\boldsymbol{\tau}$ 为**投射方向**(图 1－4).

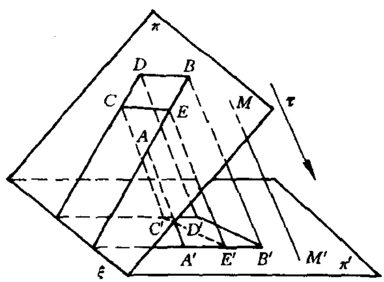


图 1－4

从图 1－4，利用初等几何知识不难证明，平行射影将直线变成直线，且保持平行性和平行线段之比.即有：**1**. 直线 AB 的象是直线 $A'B'$；**2**. 若 $CD/\!/AB$，则 $C'D'/\!/A'B'$；**3**.对于线段 AB 和 CD，象与原象的值有关系 $C'D'/A'B'=CD/AB$.

1.2　映射的乘积与逆

映射可以连续施行.若将平面上的点 M 先施行 R_θ 得 M'，再施行 $T_{\boldsymbol{a}}$ 得 M''，则由(1.3)和(1.2)易得 $M(x,y)$ 到 $M''(x'',y'')$ 的关系为

$$\begin{cases}x''=x\cos\theta-y\sin\theta+a_1\\ y''=x\sin\theta+y\cos\theta+a_2.\end{cases}$$

我们称这种从 M 到 M'' 的变换为 R_θ 和 $T_{\boldsymbol{a}}$ 的乘积，记为 $T_{\boldsymbol{a}}\circ R_\theta$(或 $T_{\boldsymbol{a}}R_\theta$)，即 $M''=T_{\boldsymbol{a}}\circ R_\theta(M)$.

一般地，设有映射 $T_1:S\rightarrow S'$ 和 $T_2:S'\rightarrow S''$，则乘积

$$T_2 \circ T_1 : S \to S''$$

定义为对任意 $M \in S$，

$$T_2 \circ T_1(M) \equiv T_2[T_1(M)].$$

映射的乘积满足结合律.事实上,对任意 $M \in S$,总有

$$[T_3(T_2T_1)](M) = T_3[T_2T_1(M)] = T_3[T_2(T_1(M))],$$
$$[(T_3T_2)T_1](M) = (T_3T_2)[T_1(M)] = T_3[T_2(T_1(M))],$$

于是

$$T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)T_1.$$

要注意的是,乘法一般不可交换,即一般 $T_2T_1 \neq T_1T_2$.读者不妨自己验证,对于非恒等的 T_a 和 R_θ,有 $T_aR_\theta \neq R_\theta T_a$.

我们知道,双射 $T:S \to S'$ 有逆映射 $T^{-1}:S' \to S$,即若 $T(M) = M'$,则 $T^{-1}(M') = M$.而且,对于变换 $T:S \to S$,显然有

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

直观上,容易看到 $T_a^{-1} = T_{(-a)}$,$R_\theta^{-1} = R_{(-\theta)}$,即

$$T_a^{-1}:\begin{cases} x' = x - a_1 \\ y' = y - a_2, \end{cases}$$

$$R_\theta^{-1}:\begin{array}{l} x' = x\cos(-\theta) - y\sin(-\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = x\sin(-\theta) + y\cos(-\theta) = -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{array}$$

1.3 变换的不动元素与不动子集

对于变换 $T:S \to S$.若存在元素 $M \in S$,使得 $T(M) = M$,则称 M 为此变换的**不动元素**;若存在 S 的子集 F,使得 $T(F) = F$,则称 F 为此变换的**不动子集**.

显然,由不动元素构成的子集是不动子集;反之,不动子集的