LM
朗曼专题

北京朗曼教学与研究中心教研成果

• 学科专题研究系列丛书 •

主编 王海平

数学专题研究

ShuXueZhuanTiYanJiu

总主编 宋伯涛

数列、极限、数学归纳法

中国青年出版社

北京朗曼教学与研究中心资料

数列、极限、数学归纳法

主编　王海平

中国青年出版社

责任编辑:李 培 广
封面设计:Paul Song

数列、极限、数学归纳法
主编　王海平
*
中国青年出版社出版 发行
社址:北京东四12条21号　邮政编码:100708
三河欣欣印刷有限公司印刷　新华书店总经销
*
850×1168　1/32　10.375印张　300千字
2001年8月北京第1版　2001年8月北京第1次印刷
定价:12.00元
ISBN 7-5006-4545-7/O·26

敬告读者

《学科专题研究》系列丛书为作者精心之作，作者值此出版之际向全国千百万热心读者深表谢意。

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，本中心将本着为读者服务及负责的精神，及时帮助你排忧解难，与你共同切磋，共同研究，携手共勉，建立友谊。

作者声明：《学科专题研究》系列丛书为北京朗曼教学与研究中心专项研究成果，请读者认准封面上“朗曼专题”、“北京朗曼教学与研究中心教研成果”等字样，以防假冒。凡以《朗曼专题》及“宋伯涛总主编”名誉出版的任何其它版本均为侵权行为。

作者声明：凡与本书内容雷同的任何其它版本，均为盗版物。保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局 100101－89 号信箱北京朗曼教学与研究中心宋伯涛收，邮编 100101。
本中心 E-mail:SPTJWLSQ@163bj.com

出 版 前 言

展望二十一世纪教育发展的未来，必将是以学生素质全面发展为前提，通过减轻学生过重的学业负担，还学生一个宽松的、有更多自由选择、自主学习的发展空间。从而做到有效地培养学生的创新意识和实践能力。这将是教育改革的一种必然趋势。为此，国家教委进行高考课程改革，推广试用新教材。在这种情况下，我们的助学用书如何适应这一变化，并与素质教育的要求相匹配呢？基于这样的思考与愿望，我们按照新教材的体系，将新教材中有关章节的内容有机组合，编写一套既相互联系，又自成体系的《数学专题研究》系列丛书。

本丛书共13分册，分别为：1.集合与简易逻辑；2.函数及其性质；3.数列、极限、数学归纳法；4.三角函数；5.向量；6.方程与不等式；7.排列、组合和概率；8.直线、平面、简单几何体；9.直线与二次曲线；10.怎样解高中数学选择题；11.怎样解高中数学应用题；12.高中数学解题方法集锦；13.高中数学重点问题详析。

本丛书在编写过程中，始终坚持以高中新教材为基础、以高考的内容和要求为主线、还兼顾拓展学生视野和进行强化训练，并有意识地引导学生亲历“做数学”的过程，并且最终得出结论。因为，与具体的知识、技能相比，探索知识的过程有利于开发学生的潜能。也可以这样说，本丛书在数学教学《大纲》的基础上，本着源于教材且高于教材的要求进行编写，并以典型常规题、创新开放题及实践应用题为线索，进行精析和指导，并且坚持了以学生为主体，以学生能力发展为根本的理念，便于学生展开自学和自练。

本丛书使用的数学符号以新教材为准，在知识点的归类讲解与拓展方面兼顾了两套教材，并在书后附上新教材与统编教材中相异数学符号对照表，供读者对照使用。

由于作者水平有限，且时间伧促，书中难免存有不尽人意之处，敬请广大读者不吝指教。

宋伯涛

2001年8月于北师大

目　　录

第一章　数列通论

1.1　数列在数学中的地位

“数学的传奇就是攀登智慧之山的传奇，这类似于写作美丽诗赋的传奇，类似于创作美丽图画的传奇，类似于制作雄伟雕塑的传奇. 通常学生们也进入这种传奇，但它以考试和学位作为结束. 他们没有什么真正目的，并且他们甚至不知道失漏了什么. 数学致力于通过物理、生物和社会科学征服自然的永久的传奇之中.”

（——J · N · 卡普尔）代题记

一、一个古老的问题

人们最早的记事——结绳记事，实际上是记数. 从自然数产生，就有了数列，它在自然科学、生产实践、工程技术、经济管理乃至社会科学的许多部门都有着广泛的应用. 在人类的生产、生活中，无处不有数学，也几乎无处不有数列，至今还流传着不少有关数列的有趣故事，如“棋盘上的奖赏”：一位国王，非常富有，因为一位大臣发明了象棋而要加以奖赏，“你需要什么奖赏，只管说来，”国王说. “我发明的象棋棋盘有 64 个棋子，希望能按这些小格给奖，第一个棋子奖一粒麦子，第二个棋子奖二粒麦子，第三个棋子奖四粒麦子，如此下去，下一格子奖给的麦子数，都是上一格奖给的麦子数的两倍.”这位发明者彬彬有礼地回答. 国王听了很高兴，心想这真是一个不贪财的人，立刻派人带他去领奖. 但是很快有人来报告，说是全国的麦子都拿来，也不够付给这位发明家的奖赏，原来共要付出麦粒数是

$$1+2+2^2+\cdots+2^{63}=(2+2)+2^2+\cdots+2^{63}-1$$
$$=(2^2+2^2)+2^3+\cdots+2^{63}-1=\cdots=2^{64}-1\text{（粒）}$$

而 2^{64} 是一个 20 位数，即至少有 10^{20} 粒麦子. 就算这种麦子每千粒重 10 克，这些麦子也要 10^{12} 吨，即大约一万亿吨. 显然，这位国王不可能拥有这么多的麦子. 我们可以设想那位象棋发明者，他的聪

明也许会导致国王食言，或者导致自己丧命．如果那位国王懂一点数列的知识，他就会发现从平凡到伟大，在数列里其实是很平凡的，从 1，2，……，很快变成一个不可思议的巨大数字，体现出数列是怎样的奥妙呵！

这里提到的数列 1，2，4，8，…2^{63}就是公比为 2 的等比数列．在历史上，斐波那契数列（或叫兔子数列）

$a_1=1, a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n (n=1,2,3,\cdots)$

也是一个得到广泛研究的数列，它与连分数、优选法等有着密切的联系．

我国对数列的研究很早，在公元前 100 年的《周髀算经》中，就有等差数列的记载；杨辉等人在高阶等差数列（见本书第 3 章第 7 节）方面取得的成果，比欧洲早了三四百年．

思考题：

一对初生的兔子在一年内能繁殖多少对？斐波那契是中世纪时意大利的数学家，他到东方旅行后写了一本书《算法之书》，其中提出了一对兔子的繁殖问题．如果每一对兔子每月能生 1 对新兔子，而每 1 对新兔在出生后的第 3 个月开始生 1 对新兔，假定不发生死亡的情况，1 对初生的兔子在 1 年末能繁殖成多少对？

提示：假定去年 12 月新生了 1 对兔子，今年 1 月应该还只有 1 对．到 2 月，这对兔子又生了 1 对，总共是 2 对．到 3 月，仍然只有去年 12 月出生的 1 对兔子能生新兔，所以总共是 3 对．到 4 月，因为 2 月出生的兔子也会生新兔，所以生了 2 对新兔，加上原有的 3 对总共是 5 对．到 5 月，又增加了 3 对出生的兔子能生新兔，所以新生 3 对，加原来的 5 对共 8 对．依此类推，便得到了下面的数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，……

答：斐波那契数列的第 13 项 233 对即为答案．从这个数列中，我们还可以看到一个有趣的规律，那就是后面的数，总等于它前面的两个数的和．利用数学归纳法（见本书第 8 章）可以得出计算第 $(m+n)$项的公式．

$a_{m-n}=a_{m-1}\cdot a_n+a_m\cdot a_{n+1}$

应用这个公式，我们可以求出斐波那契数列的其它项．例如求第 25 项，即 a_{25}，我们取 $m=13, n=12$．一般情况下，m 与 n 取得接近些，对计算有利．代入公式，得

$$\begin{aligned}a_{13+12}&=a_{13-1}\cdot a_{12}+a_{13}\cdot a_{12+1}\\&=a_{12}^2+a_{13}^2\\&=144^2+233^2\\&=75025\end{aligned}$$

这是一对初生的兔子在多少时间内能繁殖出来兔子的对数?

请你求出斐波那契数列的第24项,并计算一对初生的兔子在三年内能繁殖到多少对.

二、数列在数学中占有重要地位

数列是中学数学(或者说初等数学)到高等数学的桥梁,它是极限、微积分等近代数学的重要基础.学好数列具有重要意义.

通过数列,引入极限概念,从而我们可以计算圆的周长和面积,这种"以直代曲"的观点,解决了一批问题.

数列又是培养同学们归纳和分析问题能力的良好题材,有助于同学们从整体上认识中学数学内容,提高同学们结合运用知识解决问题的能力.

数列中一类重要而有趣的问题是从简单的做起,通过观察、分析、归纳猜想结论,进而用数学归纳法证明我们自已的猜想的正确性,这一研究问题的方法和过程,与数学家发现结论、研究前沿数学的方法是相似的(甚至是相同的).通过本书的学习和研究,相信你一定会对数学更加了解,更加增强你学习数学的兴趣,从而达到求学的最终目的:"能自学自励,出了学校,担任了工作一直能自学自励,一辈子做主动有为的人."(叶圣陶语).

问题研究:圆周率π是怎样求得的

我国劳动人民在几千年以前就已经知道,任何圆的圆周之长与其直径之比总是一个常数,不随圆的大小不同而改变,这个比值叫做圆周率,即我们熟知的π.在取两位小数时,$\pi=3.14$,取四位小数时,$\pi=3.1416$,有时又取$\pi=\frac{22}{7}$.祖冲之在1500多年前已算出$\pi\approx\frac{355}{113}$(它精确到$\pi$的第六位小数),比外国人早1000年左右.这些数都是π的近似值.因为π是一个无理数,它不能用分数(有限小数或无限循环小数)来表示,那么,π的近似值是怎样求出来的呢?

我们知道,圆的任一内接多边形的周长小于这个圆的圆周之

长，而圆的任何一个外切多边形的周长大于这个圆的圆周之长. 取一个以 1 为半径的圆（单位圆），其周长是 2π，作单位圆的内接正六边形 P_1，设其周长是 a_1，又作它的一个外切正六边形 Q_1，设其周长是 b_1，现在求 a_1 和 b_1.

设 P_1 的 6 个顶点是 $A_k(k=1,2,\cdots,6)$ 连 $OA_k(k=1,2,\cdots,6)$，可得 6 个全等的三角形，$\triangle OA_1A_2,\triangle OA_2A_3,\cdots,\triangle OA_6A_1$（图 1）. 作 $OM\perp A_1A_2$ 于 M，则 $\angle MOA_2=30°$，$A_1A_2=2MA_2$，因此

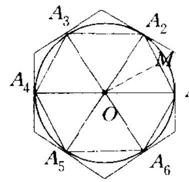

图1－1

$$a_1=6A_1A_2=12MA_2=12\cdot\sin30°=6$$

同理可得

$$b_1=12\tan30°=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\approx6.928$$

这样，我们找到了 2π 的第一个范围

$$6<2\pi<6.929 \qquad (1)$$

作 $\angle A_1OA_2,\angle A_2OA_3,\cdots,\angle A_6OA_1$ 的平分线与圆周相交，于 B_1、B_2，$\cdots$，B_6，顺次连结 A_1B_1、B_1A_2、A_2B_2，B_2A_3，$\cdots$，B_2A_1，我们就得到单位周的一个内接正 12 边形 P_2，设其周长是 a_2，过 A_K、$B_K(K=1,2,\cdots,6)$作切线可得这个圆的外切正 12 边形 Q_2，设其周长为 b_2.

$\because\quad \angle A_1OB_1=30°$，$A_1B_1=2\sin\dfrac{30°}{2}$

$\therefore\quad a_2=12A_1B_1=24\sin15°$，同样地

$\qquad b_2=12\cdot2\tan15°=24\tan15°$.

由半角公式或 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2}}$

得 $\sin15°=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$；

$$\tan15°=\tan\frac{30°}{2}=\frac{1-\cos30°}{\sin30°}=2-\sqrt{3}$$

于是 $a_2=6.212$，$b_2=6.431$（精确到三位小数），我们得到 2π 的一个较小的范围 $6.212<2\pi<6.432$ 　　(3)

又同样地作圆的内接正 24 边形 P_3 与外切正 24 边形，它们的

周长分别是 a_3、b_3，由半角公式

$$a_3=24\cdot 2\sin\frac{15^\circ}{2}=6.265$$

$$b_3=24\cdot 2\tan\frac{15^\circ}{2}=6.319$$

因此 $6.265<2\pi<6.320$　　(4)

如此继续作单位圆的内接与外切的正 48 边形、正 96 边形、正 192 边形、…，它们的周长依次为：

a_4、b_4、a_5、b_5、a_6、b_6，…，于是可得单位圆的内接与外切正 $3\cdot 2^n$ 边形，其周长分别为：

$$a_n=6\cdot 2^n\sin\frac{60^\circ}{2^n},\ b_n=6\cdot 2^n\tan\frac{60^\circ}{2^n}$$

由此我们可以得到 π 越来越精确的近似值.

这种割圆术的方法，在刘徽注的《九章算术》里用来计算圆的面积，含有上述极限概念（本书第 7 章）是他的最大创造，他正确地计算出圆内接正 192 边形的面积，从而得到 π 的近似值为 $\frac{157}{50}\approx 3.14$，后世称为徽率. 又计算出圆内接 3072 边形的面积，从而得到 $\pi\approx\frac{3927}{1250}\approx 3.1416$. 在祖冲之、刘徽他们的那些年代，计算工具比较原始，能得到如此美好的结论. 今天的人们不得不从心底里佩服他们，中学生朋友对我国古代数学家的敬仰之情转化为无穷无尽的动力，则必将把祖国的数学发展推向一个新的高峰.

1.2　数列研究的对象(一)

一、数列的概念和分类

考察下面一列数：

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,\frac{(-1)^{n-1}}{n},\cdots \qquad (1)$$

可以看出，这一列数中的每一个数，都占据着(1)中的那个位置对应的号码. 这样，我们便认为，处在第一个位置上的数 1 具有号码 1，处在第二个位置上的数 $-\frac{1}{2}$ 具有号码 2，处在第三个位置上的数 $\frac{1}{3}$ 具有号码 3，等等. 我们把编在某个位置上的号码称为项数.

把某个位置上的数称为项．这样，(1)所提供的一列数的第4项是$-\frac{1}{4}$，第11项是$\frac{1}{11}$．于是在(1)中的每一个数都有一个完全确定的项数，并由这个项数完全确定．

我们把按照一定次序排列的一列数称为一个数列．这里的次序即上述位置对应的号码．

这个数列的元素称为数列的项，通常记第一项为a_1，第2项为a_2，…，第n项为a_n，其余类推，整个数列记为

$a_1,a_2,a_3\cdots,a_n,\cdots$或者简写为$\{a_n\}$．

数列$a_1,a_2,a_3\cdots,a_n,\cdots$是被编上号码的一列数．这些数就象一列自然数那样有序，a_n的下标n表示了这个项的位置(号码、次序)，即为项数．

由有限项组成的数列称为有穷数列，而有无穷多(可数的)项组成的数列称为无穷数列．

从项的变化看，可分为常数项数列与函数项数列两类，前者如：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots \tag{2}$$

$$2,5,8,11,14,\cdots,3n-1,\cdots \tag{3}$$

后者如：

$$\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\cdots,\cos nx,\cdots \tag{4}$$

$$x,x^2,x^3,x^4,\cdots,x^n,\cdots \tag{5}$$

中学以研究常数项数列为主，对于数列

$1,x,x^2,x^3,\cdots,x^{n-1},\cdots$

是把x当成常数去考虑的，只是在需要的时候，讨论一下x的特殊值．如

$x=1$时，它的前n项和(记为S_n)$S_n=n$；

$x\neq 1$时，$S_n=\frac{1-x^n}{1-x}$(见本书第4章)

从数列项的值的变化趋势看，数列被分为单调递增数列如(3)，单调递减数列如(2)，常数数列如1，1，1，…，1，…和摆动数列如(1)，它们的详细定义和性质将在下一节研究．

我们可以把数列分类列表如下：

数 列 名 称	分 类 的 条 件
有穷数列，无穷数列	以数列的项数有限无限为依据来分
常数项数列，函数项数列	从数列的项的值的变化来分
递 增 数 列	恒有 $a_n<a_{n+1}(n\in N_+)$
递减数列	恒有 $a_n>a_{n+1}(n\in N_+)$
常数数列	恒有 $a_n=a_{n+1}(n\in N_+)$
摆动数列	有时 $a_n>a_{n+1}$，有时 $a_n<a_{n+1}(n\in N_+)$
有界数列	能够找到一个正数 m，使 $\|a_n\|<m$ 成立
无界数列	不能找到正数 m，使 $\|a_n\|\leqslant m$ 成立
上有界数列	能够找到一个常数 m，使 $a_n\leqslant m$ 恒成立
下有界数列	能够找到一个常数 m，使 $a_n\geqslant m$ 恒成立

例 1　判断下列数列中哪些是单调递增数列，哪些是单调递减数列，哪些是常数数列，哪些是摆动数列，哪些是有界数列，哪些是无界数列，哪些是上有界的数列，哪些是下有界的数列：

(1) $-1,\frac{8}{5},-\frac{15}{7},\frac{24}{9},\cdots,(-1)^n\cdot\frac{n^2+2n}{2n+1},\cdots$；

(2) $\sqrt{3},3,\sqrt{15},\sqrt{21},3\sqrt{3},\cdots,\sqrt{6n-3},\cdots$；

(3) $0.9,0.99,0.999,\cdots,1-\frac{1}{10^n},\cdots$；

(4) $m,n,m,n,\cdots,m,n,\cdots$；

(5) $1,2,3,4,5,6,\cdots,n,\cdots$；

(6) $10,9,8,7,6,5,4,3,2$；

(7) $5,5,5,\cdots,5,\cdots$.

解：由数列分类的依据，可知

(1)是摆动数列，并且是无界数列；

(2)是单调递增数列，为无界数列，下有界数列，这是因为：

设 $a_n=\sqrt{6n-3}$，则 $a_n-a_{n+1}=\sqrt{6n-3}-\sqrt{6(n+1)-3}$

$$=\frac{(6n-3)-(6n+3)}{\sqrt{6n-3}+\sqrt{6n+3}}$$

$$=\frac{-6}{\sqrt{6n-3}+\sqrt{6n+3}}<0,$$

即对于 $n\in N_+$，都有 $a_n<a_{n+1}$，从而

$a_1<a_2<a_3<a_4<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$

数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的，它是下有界的，因为 $a_n\geqslant a_1$（这里 $a_n>a_1=\sqrt{3}$）恒成立.

(3)是单调递增数列，为有界数列，设 $a_n=1-\dfrac{1}{10^n}$ 恒有 $|a_n|<1$.

(4)当 $m\neq n$ 时，它为摆动数列；当 $m=n$ 时，它为常数数列.

(5)是单调递增数列，且是下有界数列.

(6)是单调递减的有界数列.

(7)为常数数列.

例 2 函数 $f(x)=\log_2 x-\log_x 2\ (0<x<1)$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $f(2^{a_n})=2n\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)判定数列 $\{a_n\}$ 的单调性.

解：(1)由已知，得 $\log_2 2^{a_n}-\dfrac{1}{\log_2 2^{a_n}}=2n$，

$\therefore\quad a_n-\dfrac{1}{a_n}=2n$，即 $a_n{}^2-2na_n-1=0$

解得 $a_n=n\pm\sqrt{n^2+1}$.

$\because\quad 0<x<1$，即 $0<2^{a_n}<1$，$a_n<0$.

$\therefore\quad a_n=n-\sqrt{n^2+1}\ (n=1,2,3,\cdots)$

(2) $\because$
$$a_n=n-\sqrt{n^2+1}=-\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$$

$$a_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)+\sqrt{(n+1)^2+1}}$$

$\therefore\quad a_{n+1}>a_n$ 即数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

从数列的定义可以看出，数列可以看作是定义域为正整数集或它的子集 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的函数，当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值，即 $a_1,a_2,a_3,\cdots a_n,\cdots$ 由公式给出的数列，可以按照数列的项的号码（项数）确定出这个项. 按照数列的项的项数（号码）能够计算出数列的任意一项的公式，称为数列的通项公式，如数列 $1,2,3,4\cdots,n\cdots$ 的通项公式是 $a_n=n$. 因此数列是一类特殊