北京大学教材

# 高等数学

## 上册

周建莹　张锦炎　编



北京大学出版社

高 等 数 学 （上册）

周建莹 张锦炎 著

责任编辑 徐信之

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

850×1168 毫米 32 开本 9.5 印张 200 千字

1985年12月第一版 1985年12月第一次印刷

印数：00001—15,000册

统一书号：13209·123 定价：1.90元

# 前　言

本书是根据作者在北京大学多次讲授化学类高等数学时所用的讲义编写成的．内容包括一元、多元微积分，空间解析几何，级数与常微分方程．讲授约需140学时．

作为一本化学类高等数学简明教程，我们力图讲清概念，并着重阐明如何从物理、化学等问题抽象出这些概念．理论的要求则适当放低．例如，明确地承认实数连续函数的性质．凡证明较难或技巧较高的定理就严格地叙述而不加证明．这样做不影响这些定理的应用，也不影响内容的系统性．书中多数定理的证明过程比较直接简单，我们希望通过这些证明来训练读者一定的推理能力；基本的计算方法多半包含在例题与习题之中，所以做这些例题是讲课不可缺少的一部分．此外，同学们还必须做一定数量的习题，才能真正把方法学到手．

为了照顾到不同类型读者的需要书中内容比大纲稍多一些．

我们希望读者学完本教程后能够应用高等数学这一工具，并且初步具备自学其它数学的条件．当然这些都只是作者的愿望，因为我们的经验有限，水平不高，一定有很多缺点，甚至还有错误之处，衷心地希望得到各方面的批评与指正．

编写过程中蒋定华、徐信之等使用过原来讲义的同志们提出了不少建设性的意见．徐信之同志加配了习题并给出了全部习题的答案，在此一并表示感谢．

# 目　录

# 第一章　函　数

## §1　函数概念

### 1. 常量与变量

在生产斗争和科学实验中，人们常常遇到各种各样的量，如长度、面积、体积、时间、温度、质量、压力等等。在某个过程中，有的量保持固定的值，称之为常量；有的量可以取不同的值，称为变量。例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体分子的个数是常量，而气体的温度和压力是变量。

变量 $x$ 的取值范围 $X$ 称为变量 $x$ 的变化域。在微积分学中主要研究的是连续的变量。例如，某种气体的温度 $T$ 从10℃升高到100℃，那末，变量 $T$ 的变化域就是从10到100之间的一切实数，即 $T$ 满足不等式 $10\leqslant T\leqslant 100$。如果我们用数轴上的点来表示数，那末，$T$ 的变化域就是从10到100的有限线段（见图1.1）。为确切起见，我们说 $T$ 的变化域是闭区间 $[10,100]$。今后常见的区间有下列几种：

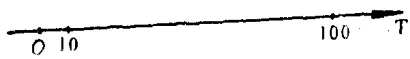

图 1.1

(i) 闭区间 $[a,b]$（指满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切 $x$ 的数集合）；

(ii) 开区间 $(a,b)$（指满足不等式 $a<x<b$ 的一切 $x$ 的数集合）；

(iii) 半开（或半闭）区间 $(a,b]$ 与 $[a,b)$（分别指满足不等式 $a<x\leqslant b$ 与 $a\leqslant x<b$ 的一切 $x$ 的数集合）；

(iv) 无穷区间 $(a,+\infty)$（指满足不等式 $a<x$ 的一切 $x$ 的数集合）。

此外还有$(-\infty,b)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,\infty)$等等。注意，“$+\infty$”和“$-\infty$”只是一种符号，不能当作实数来看待。

2. 变量间的函数关系

一般说来，在同一个过程中出现的一些变量，总有一定的联系，即其中一个量的变化常常引起其它量也随着变化。在微积分学中，首先要研究的就是变量之间的某种确定的依赖关系，也就是研究两个或两个以上的变量之间的函数关系。现在我们只讨论两个变量的情形。粗略地说，两个变量之间的函数关系，就是它们的数值之间的一种对应关系。在给出函数定义之前，先举几个实例。

**例 1** 在初速为0的自由落体运动中，落体经过的路程$S$与时间$t$是两个变量。如果时间$t$是从运动开始时计算起的，且当$t=0$时，$S=0$，则$S$与$t$之间存在着如下的关系：

$$S=\frac{1}{2}gt^2\quad(0\leqslant t\leqslant t_0),$$

其中$t_0$是着地时间，$g$是重力加速度。根据上面的公式，我们可以求出在每一个时刻$t=t_1(0\leqslant t_1\leqslant t_0)$落体降落的路程

$$S_1=\frac{1}{2}gt_1^2.$$

**例 2** 一个地区一天中的气温$T$是随着时间$t$而变化的。某地区的气象台用自动记录器记录了某一天24 h的气温随时间而变化的情况。自动记录器记下来的是一条曲线。虽然我们不可能找到象例1中那样的表达式，但是，根据这个图形我们可以知道这个地区在每一个时间$t_0(0\leqslant t_0\leqslant 24)$的气温$T_0$(见图1.2)。

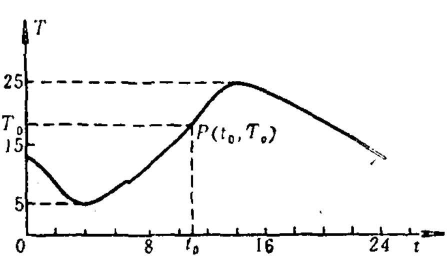

图 1.2

**例3** 信件的邮资$S$是由信件的重量$W$来

确定的. 按邮局规定，寄往国内外埠的平信，按信件重量每20g付邮资8分，不足20 g者以20 g计. 信件重量不得超过2000 g. 我们可以把$S$与$W$的关系列成下表：

| $W$ (g) | $0<W\leqslant 20$ | $20<W\leqslant 40$ | $40<W\leqslant 60$ | … | $1960<W\leqslant 1980$ | $1980<W\leqslant 2000$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ (分) | 8 | 16 | 24 | | 792 | 800 |

一般信件的重量都不超过20 g，所以贴上8分的邮票即可，但是对于较重的信件，就必须秤出信件的重量$W$，再按上表确定邮资$S$.

以上三个实例的内容虽各不相同，但是，它们有一些共同点：第一，每个例子中都有两个变量，它们的地位有所不同，其中一个变量随另一个变量的变化而变化. 第二，一个变量的变化域为已知，对这个变量在变化域中的每一个值，都可以唯一地确定另一个变量的值. 把这两点精确化，我们就得到函数的定义：

**定义** 设在同一个过程中有两个变量$x$与$y$，已知$x$的变化域是$X$. 如果对于变量$x$在$X$中的每一个值，依照某一对应关系，变量$y$都有唯一的一个值与之对应，我们就说变量$y$是变量$x$的函数；这时$x$称为自变量，$y$称为因变量.

函数的记法是

$$y=f(x)\quad (x\in X)①,$$

有时我们也简单地记作

$$y=f(x).$$

给定$x$的变化域$X$和函数的对应关系后就可以确定出$y$的变化域$Y$. 我们把自变量$x$的变化域$X$称为函数的定义域，把因变量$y$的变化域$Y$称为函数的值域.

再来看前面的三个例子. 在例1中路程$S$是时间$t$的函数，函数关系由公式$S=gt^2/2$给出；这个函数的定义域是闭区间[0,

① "$\in$"表示"属于"，"$x\in X$"就表示"$x$属于$X$".

$t_0$]，值域是闭区间$[0, gt_0^2/2]$。在例 2 中，气温 $T$ 是时间 $t$ 的函数，函数关系由曲线给出，其定义域是闭区间$[0,24]$，值域也是一个闭区间(如图1.2所示)。在例 3 中，信件的邮资 $S$ 是信件的重量 $W$ 的函数，函数关系由表格给出，其定义域是半闭区间$(0,2000]$，值域是由有限个自然数$\{8,16,24,\cdots,792,800\}$组成的。在以上三个例子中，函数关系的表示方法是不同的：例 1 是由公式给出的；例 2 是由图形给出的；例 3 是由表格给出的。一般地说，函数关系的表示方法大致就分这样三种。在微积分学中我们主要研究由公式给出的函数，也叫做有分析表达式的函数。以下再举几个有分析表达式的函数的例子。

**例 4** 圆的面积 $S$ 是圆的半径 $r$ 的函数，函数关系是

$$S=\pi r^2,$$

函数的定义域是$(0,+\infty)$。

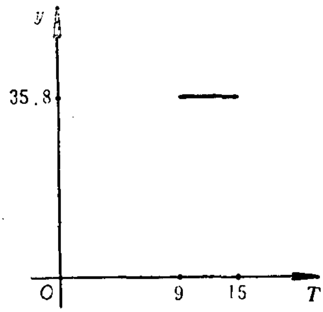


图 1.3

**例 5** 当温度在 9℃到15℃之间时，食盐的溶解度恒等于35.8g。这时溶解度 $y$ 关于温度 $T$ 的函数表达式为

$$y=35.8 \quad (9\leqslant T\leqslant 15).$$

这是一个特殊的函数。定义域中每一个 $T$ 的值，都对应于同一个函数值。这种函数称为常数函数。其图形为平行于 $x$ 轴的直线段(见图1.3)：

**例 6** 在恒温下，气体的压力 $P$ 是体积 $v$ 的函数，当 $v$ 不太小时($v\geqslant v_0$时)，它们的关系遵照波义耳定律；而当 $v$ 相当小时，它们的关系就遵照范得瓦定律。用公式表示，它们的函数关系为：

$$P=\begin{cases}\dfrac{k}{v}, & v\geqslant v_0,\\[2ex] \dfrac{c}{v-b}-\dfrac{a}{v^2}, & b<v<v_0,\end{cases}$$

其中 $k,a,b,c$ 都是常数。

这一个函数的函数关系当自变量在不同的范围内时由不同的公式给出.我们把这种函数叫做分段定义的函数或简称分段函数.

**例 7** 定义域是全体自然数的函数叫整变数函数。整变数函数可表为

$$y=f(n)\quad(n=1,2,\cdots).$$

为方便起见，我们往往用 $y_n$（或其它字母）来代替 $f(n)$，例如

$$y_n=\frac{1}{2^n},\qquad z_n=\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

等等都是整变数函数。有时为醒目起见，我们也把整变数函数的函数值按它所对应的自变数的顺序排列出来：

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots.$$

如以上两例可以分别地排列如下

$$y_n=\frac{1}{2^n}:\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots,$$

$$z_n=\frac{1}{n}:\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots.$$

因此，整变数函数又叫做序列或数列。函数值 $y_n$ 称作序列的项。

**注 1** 前面我们取字母“$f$”作为函数关系的记号，为区别不同的函数关系，有时也采用字母“$F$”，“$\varphi$”等等。有时为表明“$y$ 是 $x$ 的函数”，就用 $y=y(x)$。

**注 2** 对给定的函数 $y=f(x)$，我们用$f(x_0)$来表示$x_0$对应的变量 $y$ 的值。如已知 $y=f(x)=1/(1+x^2)(-\infty,+\infty)$，则 $x=1$ 对应的函数值为 $f(1)=1/(1+1^2)=1/2$。

### 3. 函数的图形

在平面上取定一个直角坐标系 $Oxy$。所谓函数 $y=f(x)$的图形，就是横坐标 $x$ 与纵坐标 $y$ 之间满足关系式 $y=f(x)$ 的点的轨迹(见图1.4)。一般说来，函数的图形是一条或几条曲线。

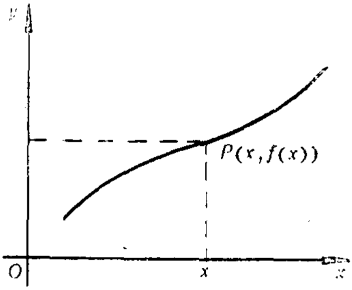


图 1.4

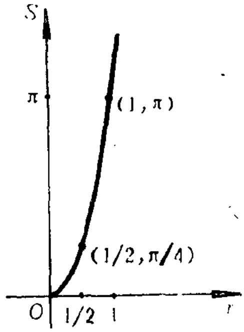


图 1.5

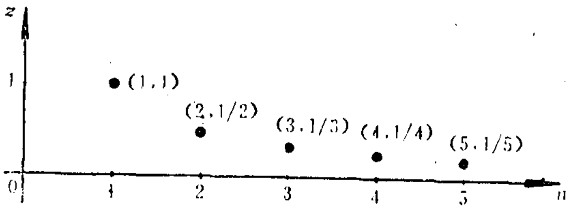


图 1.6

图1.5与图1.6分别给出了例 4 与例 7 中函数的图形，而图1.7给出了分段函数

$$y=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

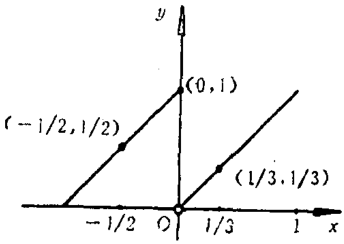


图 1.7

的图形。

从函数的图形，我们往往可以立刻看出函数的某些特性。正因为函数图形具有直观性的优点，所以它是研究函数时不可缺少

的工具。

4. 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 定义在对称区间 $(-a,a)$ 上，且满足 $f(-x)=f(x)$，$x\in(-a,a)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，$x\in(-a,a)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。例如 $x^{2k}$，$\cos x$ 为偶函数，而 $x^{2k+1}$，$\sin x$ 为奇函数，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。不难看出，偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，奇函数的图形关于原点对称。奇函数与偶函数还有下列性质：

(i) 两个偶函数或两个奇函数的乘积是偶函数；

(ii) 偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

下面我们来证明性质(ii)，设 $f(x),g(x)$ 分别为奇、偶函数。那么根据定义即有

$$f(-x)=-f(x),\qquad g(-x)=g(x).$$

考虑函数 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$，我们有

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot g(x)=-F(x),$$

所以 $F(x)$ 为奇函数。

性质(i)的证明留给读者。

## 习 题 一

1. 求出下列各函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$；　　(2) $y=\lg(x^2-4)$；

(3) $y=\arccos(2\sin x)$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+5x-3}}$；

(5) $y=\lg(x+2)+\lg(x-2)$；　　(6) $y=\lg\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

(7) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x+2}}{\sin\pi x}$；　　(8) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$。

2. 设 $f(x)=\lg x^2$，求 $f(-1)$，$f(-0.001)$，$f(100)$。

3. 设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求 $f(-x)$，$f(x+1)$，$f(x)+1$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$\frac{1}{f(x)}$。

4. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，$\varphi(x)=\frac{1}{2-x}$，试求：$f(1)$，$\varphi(-1)$，$f(x)-\varphi(t)$，$f(x-t)$，$f(\varphi(0))$，$\varphi(f(t))$，$f\left(\frac{1}{u}\right)$；并证明：$f(x)=\varphi(1-x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)\varphi(3-2x)=f(x)\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$。

5. 若 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f\left(\frac{5}{4}\right)$，$f(2)$。

6. 设 $\varphi(t)=t^3+1$，求 $\varphi(t^2)$，$[\varphi(t)]^2$。

7. 设 $f(x)=e^x$，$g(x)=\ln x$。写出 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$，$f\{g[f(x)]\}$。

*8. 设 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\arccos x$，写出 $y=f[g(x)]$及 $y=g[f(x)]$的表达式并化简。

9. 作下列函数的略图：

(1) $y=|x|$；　　(2) $y=\frac{1}{2x}$；

(3) $y=\sqrt{x+1}$；　　(4) $y=x^3$；

(5) $y=x^3+2$；　　(6) $y=\cos 2x$；

(7) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；

(8) $y=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$

10．下列函数哪些是偶函数？哪些是奇函数？

(1) $y=|x|\sin\frac{1}{x}$；　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(3) $y=e^{|x|}$；　　(4) $y=\cos(\sin x)$；

(5) $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0;\end{cases}$　(6) $y=\sqrt{\operatorname{sgn}x}$。

11．在边长为 $a$ 的正方形薄片的各角割去相等的小正方形，用剩余的薄片做一个无盖的盒子。设小正方形的边长为 $x$，试将盒子的体积 $V$ 表为 $x$ 的函数。

12．由半径为 $R$ 的圆割去一扇形，把剩下的部分围成一圆锥，试将圆锥的容积表为剩下角度 $x$ (弧度)的函数。

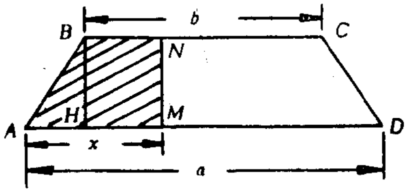


图 1.8

13．等腰梯形 $ABCD$ 中，底 $AD=a$，$BC=b(a>b)$，高 $HB=h$，引直线 $MN$ 平行于 $HB$。设 $AM=x(0\leqslant x\leqslant a)$。将梯形内位于直线 $MN$ 之左的面积表为 $x$ 的函数(图1.8)。

## §2　反函数·复合函数·初等函数

### 1．反函数与复合函数的概念

(1) 函数单调性的概念　设给定一个函数 $y=f(x)(x\in X)$。如果对于 $X$ 内的任意两值 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，我们就说函数 $y=f(x)$ 在 $X$ 上是递增的，或简称 $y=f(x)$ 是递增函数；如果对 $X$ 内任意两值 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，我们就说函数 $y=f(x)$ 在 $X$ 上是递减的，或简称 $y=f(x)$ 是递减函数。在这个定义中，若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)(f(x_1)\geqslant f(x_2))$ 换成严格的不等式 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上是严格递增(严格递减)的。例如，函数 $y=x^2(0\leqslant x<+\infty)$ 是严格递增的，而

函数 $y=x^2(-\infty<x\leqslant 0)$是严格递减的(见图1.9)。递增函数与递减函数统称为单调函数。而严格递增函数与严格递减函数统称为严格单调函数。严格单调函数有这样的性质：对于值域$Y$内的任意一个值 $y=y_0$，定义域$X$内都有唯一的一个值 $x=x_0$使

$$y_0=f(x_0);$$

从图形上来看(见图1.10，1.11)，即平行于 $x$ 轴的直线与曲线仅有一个交点，这一性质可以用反证法来证明：

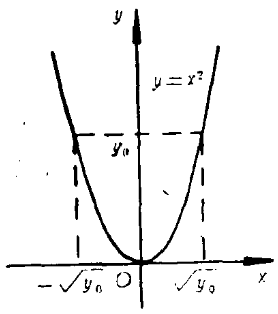


图 1.9

设对于$y=y_0$，有$x_1$与$x_2$，且$x_1<x_2$，使$f(x_1)=y_0$同时 $f(x_2)=y_0$，于是

$$f(x_1)=f(x_2).$$

而这与严格递增性或严格递减性矛盾。

(2) 反函数的概念在例 4 中圆面积$S$是圆半径 $r$ 的函数：

$$S=f(r)=\pi r^2$$

$(0<r<+\infty)$，函数关系“$f$”表示自变量平方再乘 $\pi$． 如果把面积$S$取作自变量，则圆半径 $r$ 是它的函数

$$r=\varphi(S)=\sqrt{\frac{S}{\pi}}\quad(0<S<+\infty),$$

函数关系“$\varphi$”表示自变量除以 $\pi$ 再开平方。我们把后一函数$r=\varphi(S)$称为前一函数 $S=f(r)$的反函数(当然前者也是后者的反函数)。

一般地说，设给定一个函数 $y=f(x)$，其定义域是 $X$，值域是 $Y$．如果对于$Y$内的每个数值 $y=y_0$，$X$内都有唯一的一个数值$x=x_0$，使 $f(x_0)=y_0$，那末我们就确定了从$Y$到$X$的一个对应，也即在$Y$上确定了一个函数，这个函数被称为 $y=f(x)$的反函数。记作

$$x = f^{-1}(y) \quad (y \in Y),$$

或简单地记作

$$x = f^{-1}(y)。$$

这个函数的自变量是 $y$，因变量是 $x$，定义域是$Y$，值域是$X$。这就是说，恰好把原来函数关系中的自变量与因变量对调。从严格单调函数的性质看出，严格单调函数必有反函数。

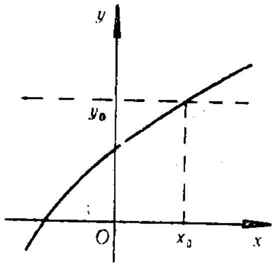


图 1.10

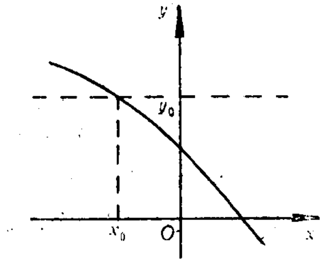


图 1.11

**例1** 函数$y = 2x + 3(-\infty < x < +\infty)$的反函数是

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \quad (-\infty < y < +\infty).$$

**例2** 考虑函数 $y = x^2(-\infty < x < +\infty)$。

对于值域$(0, +\infty)$内的每一个值 $y_0$，定义 域$(-\infty, +\infty)$内有两个 值 $x = \pm\sqrt{y_0}$满足

$$y_0 = (\pm\sqrt{y_0})^2.$$

为确定出 $y = x^2$的反函数，我们把定义域分为$(-\infty, 0]$与$[0, +\infty)$两部分，在每一部分上函数 $y = x^2$都是严格单调的，因而有(单值的)反函数。也就是说，函数

$$y = x^2 \quad (0 \leq x < +\infty)$$

的反函数是 $x = \sqrt{y}$，而函数

$$y = x^2 \quad (-\infty < x \leq 0)$$

的反函数是$x = -\sqrt{y}$。

设 $x=f^{-1}(y)(y\in Y)$ 是 $y=f(x)(x\in X)$ 的反函数，若把它们画在同一坐标系内，则它们的图形显然重合。但是，习惯上我们常用字母 $x$ 来表示自变量，用字母 $y$ 表示函数，所以我们把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$。经这种符号的调换以后，如果把 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一个坐标系内，那末它们就不再重合，而关于第一、三象限的分角线 $y=x$ 对称(见图1.12)。

(3) 复合函数的概念　以后我们常常会遇到由两个函数复合起来而得到的函数。例如，函数 $T=mv^2/2$ 与函数 $v=gt$ 复合给出函数 $T=mg^2t^2/2$；又如函数 $z=\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=1-x^2$ 与 $z=\sqrt{y}$ 复合起来的。一般说来，设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 $U$，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是 $X$，值域是 $U'$，如果 $U'$ 包含在 $U$ 中，我们就可以在 $X$ 上确定一个函数

$$y=f[\varphi(x)]\quad(x\in X).$$

这个函数被称为由 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成的复合函数。

考虑复合函数的定义域时，必须注意要求 $u=\varphi(x)$ 的值域 $U'$ 包含在 $y=f(u)$ 的定义域 $U$ 内。例如函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，于是复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1,1]$。这是因为只有当 $x$ 在区间 $[-1,1]$ 内时，才能保证 $u=1-x^2$ 包含在区间 $[0,+\infty)$ 内。

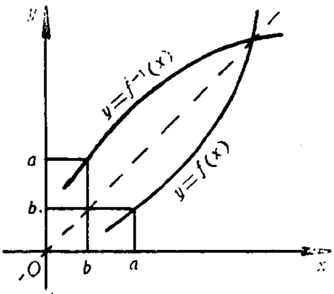


图　1.12

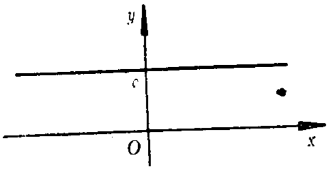


图　1.13