


# 大学数学 考研 专题复习

浙 江 大 学  
邵 剑 陈维新  
张继昌 何 勇 编著

 科 学 出 版 社

# 大学数学考研专题复习

浙江大学

邵 剑      陈维新  
张继昌      何 勇      编著

科学出版社

2001

## 内 容 简 介

本书是作者十几年来在浙江大学为攻读硕士研究生学位参加全国统一考试而举办的辅导复习班上讲课资料与经验之汇编,是在深入研究教育部数学考试大纲与对历年全国统一考试试卷分析之后撰著而成的.全书包括高等数学(含常微分方程)、线性代数、概率论与数理统计三大部分;书末配备有模拟试卷及其解答供读者自我测试.

本书强调基本的概念、方法和思想,着眼于提高读者的能力和素质.本书按专题形式的结构对有关内容重新组合、综合归纳,注重数学思维与数学方法的论述,注意专题讲述与例题解析相结合,并以“注记”形式对有关专题加以分析与延拓等,成为本书之特色.此外,本书还具有概念清晰、内容全面、方法多样、综合性强等特点.

本书内容对于工学、经济学、管理学各学科专业学生为报考硕士研究生进行数学总复习都是适用的.

### 图书在版编目(CIP)数据

大学数学考研专题复习/邵剑等编著. -北京:科学出版社,2001

ISBN 7-03-008375-X

I. 大… II. 邵… III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料  
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 028207 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号  
邮政编码:100717

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2001年7月第一版 开本:787×1092 1/16  
2001年7月第一次印刷 印张:46 1/4  
印数:1—4 000 字数:1 074 000

定价:50.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(新欣))

# 前 言

本书是作者十几年来在浙江大学为攻读硕士研究生学位参加全国统一考试而举办的辅导复习班上讲课资料与经验之汇编,是在深入研究教育部数学考试大纲与对历年全国统一考试试卷分析之后撰写而成的.我们注意到历年数学试题虽千变万化,但确有其宗.所以本书不仅有大量的各方面的典型例题,也致力于从这些例题分析中总结出一些规律来,也就是说我们是着眼于帮助读者提高能力来进行考研复习的.我们期望本书不仅是报考硕士研究生的朋友们一册广度与深度均较为合适的复习用书,而且对有关人员进行大学数学复习有着很好的参考价值,还期望本书能使读者在思维方法与解决问题能力等方面都有相当程度的提高.

本书在撰著中注意数学思维与数学方法的论述,专题讲述与例题解析相结合,并以“注记”形式对有关专题加以分析与延拓,这就是本书的特色.本书还具有概念清晰、内容全面、方法多样、综合性强等特点.

按教育部制订的硕士研究生入学考试数学考试大纲,本书包含高等数学(含常微分方程)、线性代数、概率论与数理统计三大部分内容,共25章.其中第1~15章为高等数学(含常微分方程),由邵剑和何勇撰写;第16~21章为线性代数,由陈维新撰写;第22~25章为概率论与数理统计,由张继昌撰写.书末配备两套数学一、数学二、数学三、数学四的模拟试卷,及其详细解答,读者可作为自我测试.

本书内容对于工学、经济学、管理学各学科、专业的学生为报考硕士研究生进行数学总复习都是适用的,而且本书章节的各个专题的确定已注意到考试大纲对各学科、专业对数学知识与能力的要求.请读者根据自己报考的数学一、数学二、数学三、数学四,按照教育部颁布的数学考试大纲选用本书的有关章节的各个专题.

为了帮助报考硕士研究生的朋友更好地梳理掌握数学知识,建议大家按专题综合复习,不宜拘泥于教科书的章节.并深刻理解各个基本概念与各个专题的数学思想数学方法,熟练掌握各个基本方法,例如对同一概念或理论应以不同面目、不同角度、逆向思维等多方面去理解,以求思想观点、方法上的融会贯通,而不要一味刻意去追求高难度、高技巧.同时读者应懂得“厚积言有物,勤练笔生花”的道理,务必花相当的时间与精力做适量的基本练习与综合练习.这样,成功一定属于有充分准备的你——朋友!

本书的不当甚至差错之处,惟望各位同仁与朋友们多多指教,我们不胜感谢!

作 者

于浙江大学玉泉校区求是村

2001年2月

# 目 录

<b>第一章 极限与连续</b> .....	1
§ 1.1 极限的概念与性质 .....	1
1.1.1 极限的基本概念 .....	1
1.1.2 极限的性质 .....	4
1.1.3 数列与函数的某些特性的判断 .....	8
§ 1.2 函数的连续性 .....	10
1.2.1 函数连续的概念 .....	10
1.2.2 函数间断的概念 .....	12
1.2.3 闭区间上连续函数的性质 .....	15
§ 1.3 极限存在的准则 .....	16
§ 1.4 极限的计算 .....	22
1.4.1 基本型不定式极限的计算 .....	22
1.4.2 幂指数函数极限的计算 .....	29
1.4.3 极限中参数的确定 .....	32
1.4.4 利用导数的定义求极限 .....	35
1.4.5 利用定积分的定义求极限 .....	36
1.4.6 含有变限定积分的极限的计算 .....	38
练习一 .....	40
<b>第二章 一元函数微分学</b> .....	46
§ 2.1 导数与微分的概念 .....	46
2.1.1 导数的定义 .....	46
2.1.2 导数的基本性质 .....	47
2.1.3 分段函数的可导性 .....	50
2.1.4 微分的定义 .....	52
§ 2.2 导数的计算与应用 .....	53
2.2.1 若干基本类型函数的导数 .....	53
2.2.2 高阶导数 .....	58
2.2.3 函数的最大值与最小值 .....	62
§ 2.3 导数的若干证明 .....	64
练习二 .....	71
<b>第三章 一元函数积分学</b> .....	77
§ 3.1 一元函数积分的概念与性质 .....	77
3.1.1 不定积分与定积分的概念与性质 .....	77
3.1.2 广义积分的概念与性质 .....	80

§ 3.2 变限定积分	83
3.2.1 变限定积分函数的概念与性质	83
3.2.2 变限定积分函数的连续性与可导性	86
3.2.3 变限定积分的导数与积分的计算	88
§ 3.3 积分的计算	90
3.3.1 不定积分的计算	90
3.3.2 定积分的计算	97
3.3.3 分段函数的积分的计算	101
3.3.4 广义积分的计算	103
3.3.5 定积分的近似计算	105
§ 3.4 定积分的若干证明	106
练习三	111
<b>第四章 方程实根的讨论</b>	116
§ 4.1 利用连续函数性质讨论方程的实根	116
§ 4.2 结合函数性态分析讨论方程的实根	119
§ 4.3 利用微分中值定理讨论方程的实根	120
§ 4.4 结合定积分的性质讨论方程的实根	132
练习四	136
<b>第五章 无穷级数</b>	141
§ 5.1 无穷级数的基本概念	141
5.1.1 数项级数的基本概念	141
5.1.2 函数项级数的基本概念	148
§ 5.2 无穷级数敛散性的判断	149
§ 5.3 幂级数的收敛域及其和函数	161
5.3.1 幂级数收敛域的确定	161
5.3.2 幂级数和函数的求取	164
5.3.3 数项级数和的求取	170
练习五	172
<b>第六章 一元函数及其性态</b>	176
§ 6.1 函数	176
6.1.1 函数的概念	176
6.1.2 函数构造	181
§ 6.2 一元函数性态的分析	183
§ 6.3 函数的泰勒公式与泰勒级数展开	189
6.3.1 函数的泰勒公式	189
6.3.2 函数的泰勒级数展开	191
§ 6.4 函数的傅里叶级数展开	198
练习六	206
<b>第七章 常微分方程</b>	210

§ 7.1 常微分方程的基本概念及其解的性质 .....	210
7.1.1 常微分方程的基本概念 .....	210
7.1.2 线性微分方程解的性质与解的结构理论 .....	212
§ 7.2 线性微分方程 .....	213
7.2.1 一阶线性微分方程 .....	213
7.2.2 常系数线性微分方程 .....	219
7.2.3 变系数线性微分方程 .....	221
7.2.4 一阶常系数线性微分方程组 .....	225
7.2.5 线性微分方程的幂级数解法 .....	228
§ 7.3 非线性微分方程 .....	230
7.3.1 利用变量代换求解微分方程 .....	230
7.3.2 可降阶的非线性微分方程 .....	235
§ 7.4 微分方程的应用问题 .....	237
练习七 .....	239
<b>第八章 多元函数微分学</b> .....	<b>245</b>
§ 8.1 多元函数的基本概念与性质 .....	245
8.1.1 多元函数的概念与二元函数的泰勒公式 .....	245
8.1.2 多元函数的极限与连续 .....	246
8.1.3 多元函数的偏导数 .....	248
8.1.4 全微分 .....	252
§ 8.2 偏导数与全微分的计算 .....	257
§ 8.3 多元函数的优化问题 .....	268
练习八 .....	271
<b>第九章 重积分</b> .....	<b>276</b>
§ 9.1 重积分的概念与性质 .....	276
§ 9.2 重积分的计算 .....	285
§ 9.3 无界区域上广义重积分的概念与计算 .....	293
练习九 .....	294
<b>第十章 不等式的证明</b> .....	<b>298</b>
§ 10.1 利用基本不等式证明不等式 .....	298
§ 10.2 利用导数证明不等式 .....	300
§ 10.3 定积分不等式的证明 .....	311
§ 10.4 重积分不等式的证明 .....	324
练习十 .....	331
<b>第十一章 积分的应用</b> .....	<b>334</b>
§ 11.1 积分的几何应用 .....	334
§ 11.2 积分的物理应用 .....	344
练习十一 .....	354
<b>第十二章 矢量代数·解析几何·场论</b> .....	<b>356</b>

§ 12.1 矢量代数	356
§ 12.2 空间解析几何	360
12.2.1 平面与直线	360
12.2.2 空间曲面及其方程	368
12.2.3 空间曲线及其方程	371
§ 12.3 场论初步	374
练习十二	379
<b>第十三章 曲面积分与曲线积分</b>	<b>382</b>
§ 13.1 第一类曲线积分与曲面积分	382
13.1.1 第一类曲线积分	382
13.1.2 第一类曲面积分	386
§ 13.2 第二类曲面积分	389
13.2.1 第二类曲面积分的概念与性质	390
13.2.2 第二类曲面积分的计算	391
§ 13.3 第二类曲线积分	401
13.3.1 第二类曲线积分的概念与性质	401
13.3.2 第二类曲线积分的计算	403
13.3.3 平面曲线积分与路径无关	412
13.3.4 曲线积分的不等式	417
练习十三	417
<b>第十四章 函数方程</b>	<b>422</b>
练习十四	436
<b>第十五章 经济学中的若干数学问题</b>	<b>439</b>
§ 15.1 微积分在经济学中的应用	439
15.1.1 极限在经济学中的应用	439
15.1.2 利用定积分求解经济应用问题	440
15.1.3 利用导数求解经济应用问题	443
15.1.4 利用最优化原则求解经济应用问题	446
§ 15.2 差分方程及其在经济学中的应用	449
练习十五	452
<b>第十六章 行列式</b>	<b>455</b>
§ 16.1 $n$ 阶行列式的定义	455
§ 16.2 行列式的计算	457
16.2.1 可直接用定义求出的四类基本形	457
16.2.2 行列式的性质	458
16.2.3 三种计算行列式的方法	462
16.2.4 几类行列式	468
16.2.5 用拉普拉斯定理得到的四类行列式的基本形	471
练习十六	473



<b>第十七章 矩阵</b> .....	477
§ 17.1 矩阵的概念和运算.....	477
17.1.1 矩阵的概念和特殊矩阵.....	477
17.1.2 矩阵的运算.....	479
§ 17.2 矩阵的秩和等价.....	492
17.2.1 矩阵的秩.....	492
17.2.2 矩阵的等价.....	494
§ 17.3 两种方法:矩阵的分块和等价标准形.....	496
练习十七.....	500
<b>第十八章 线性方程组</b> .....	503
§ 18.1 解线性方程组的方法和理论.....	503
§ 18.2 解含有参数的线性方程组.....	509
§ 18.3 在解析几何中的应用.....	513
练习十八.....	518
<b>第十九章 向量与向量空间</b> .....	521
§ 19.1 向量的概念和线性关系.....	521
19.1.1 向量的一些基本概念.....	521
19.1.2 向量的线性关系.....	521
19.1.3 向量线性关系的理论.....	524
§ 19.2 向量空间的一些基本的概念.....	527
19.2.1 向量空间及子空间.....	527
19.2.2 基,坐标及基变换、坐标变换.....	529
19.2.3 内积和标准正交基.....	532
§ 19.3 用向量的观点来看矩阵和线性方程组.....	535
§ 19.4 两组贯串前四章的典型题.....	538
练习十九.....	542
<b>第二十章 矩阵的相似(特征值和特征向量)</b> .....	545
§ 20.1 矩阵的相似和对角化.....	545
§ 20.2 相似的理论和应用.....	550
§ 20.3 实对称矩阵的对角化.....	557
20.3.1 实对称矩阵.....	557
20.3.2 正交矩阵的性质.....	560
练习二十.....	561
<b>第二十一章 二次型</b> .....	564
§ 21.1 二次型及标准形(矩阵的合同).....	564
21.1.1 二次型的定义及其矩阵表示.....	564
21.1.2 二次型的标准形,规范形,矩阵的合同.....	565
§ 21.2 正定二次型(正定矩阵).....	571
§ 21.3 矩阵的等价、相似、合同.....	576

21.3.1 定义、判别法和性质 .....	576
21.3.2 应用 .....	578
§ 21.4 第三组题 .....	579
练习二十一 .....	581
<b>第二十二章 概率论的基本概念</b> .....	<b>585</b>
§ 22.1 随机事件与概率 .....	585
22.1.1 随机事件 .....	585
22.1.2 概率 .....	587
22.1.3 古典概率问题的计算 .....	590
22.1.4 几何概率的计算 .....	591
§ 22.2 随机变量及其分布 .....	592
22.2.1 离散型随机变量 .....	592
22.2.2 随机变量的分布函数 .....	597
22.2.3 连续型随机变量 .....	598
练习二十二 .....	604
<b>第二十三章 条件概率与条件分布</b> .....	<b>610</b>
§ 23.1 条件概率及有关公式 .....	610
23.1.1 条件概率 .....	610
23.1.2 乘法公式 .....	611
23.1.3 全概率公式 .....	612
23.1.4 贝叶斯公式 .....	613
§ 23.2 条件分布 .....	614
23.2.1 条件分布律 .....	614
23.2.2 条件密度函数 .....	616
练习二十三 .....	617
<b>第二十四章 随机变量的进一步讨论</b> .....	<b>620</b>
§ 24.1 随机变量的数字特征 .....	620
24.1.1 随机变量的数学期望与方差 .....	620
24.1.2 协方差与相关系数 .....	624
24.1.3 矩 .....	625
24.1.4 随机变量之间关系小结 .....	626
§ 24.2 随机变量函数的分布 .....	628
24.2.1 离散型随机变量函数的分布 .....	628
24.2.2 一维连续型随机变量函数的分布 .....	629
24.2.3 二维连续型随机变量函数的分布 .....	630
§ 24.3 极限定理 .....	633
练习二十四 .....	635
<b>第二十五章 数理统计初步</b> .....	<b>643</b>
§ 25.1 基本概念 .....	643

§ 25.2 参数估计	648
§ 25.3 假设检验	656
练习二十五	661
<b>附录 硕士研究生入学考试数学模拟测试</b>	<b>669</b>
数学一 模拟试卷(A卷)	669
数学二 模拟试卷(A卷)	672
数学三 模拟试卷(A卷)	674
数学四 模拟试卷(A卷)	677
数学一 模拟试卷(B卷)	679
数学二 模拟试卷(B卷)	682
数学三 模拟试卷(B卷)	685
数学四 模拟试卷(B卷)	687
数学一 模拟试卷(A卷)参考解答	690
数学二 模拟试卷(A卷)参考解答	695
数学三 模拟试卷(A卷)参考解答	698
数学四 模拟试卷(A卷)参考解答	702
数学一 模拟试卷(B卷)参考解答	706
数学二 模拟试卷(B卷)参考解答	712
数学三 模拟试卷(B卷)参考解答	717
数学四 模拟试卷(B卷)参考解答	720

# 第一章 极限与连续

极限是微积分学的核心与基础. 极限是建立在无限基础上的概念, 它考虑的是一个动态过程.

## § 1.1 极限的概念与性质

### 1.1.1 极限的基本概念

①各种类型的极限基本上可以统一表示为函数极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . 根据自变量  $x$  的目标值  $x_0$  与函数  $f(x)$  的目标值  $A$  的不同含义, 以及它们相应邻域的意义, 就可以得到不同形式极限的意义. 例如, 当  $f(x)$  的自变量  $x$  只取正整数  $n$ ,  $x_0$  为  $+\infty$  时, 就是数列  $\{u_n\}$ ,  $u_n = f(n)$  的极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = A$ ; 当  $f(x)$  的自变量  $x$  从点  $x_0$  左方趋于  $x_0$  (或右方趋于  $x_0$ ) 时, 就是函数  $f(x)$  的左极限  $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$  (或右极限  $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ ); 当  $A = 0$  时, 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  表示  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时为无穷小; 当  $A$  为  $\infty$  时,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  表示  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时为无穷大, 它是极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在的一种形式. 其他各种形式所表示的极限也是容易理解的.

一般来说, 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的定义蕴含着自变量  $x$  落在点  $x_0$  的充分小邻域内时, 函数  $f(x)$  的值落在  $A$  的充分小邻域内. 极限的分析语言描述, 正是由这一思想给出的. 极限的几何意义也是由此得出的. 为此, 掌握各种邻域的概念及其表达式是至关重要的, 它有利于理解极限的分析语言描述的精神实质.

函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的分析定义是:

对于任意给定的  $\epsilon > 0$ , 总存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有  $|f(x) - A| < \epsilon$ .

极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$  的分析定义是:

存在某个  $\epsilon_1 > 0$ , 对任意的  $\delta > 0$ , 总存在点  $x_1$  满足  $0 < |x_1 - x_0| < \delta$  时, 使

$$|f(x_1) - A| \geq \epsilon_1.$$

请读者自行给出其他各种类型极限的分析语言定义, 以加深对极限概念的理解. 当然, 这些分析语言表述都是相应极限的充分必要条件.

②由极限的定义知, 因极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  是研究自变量  $x$  趋向于  $x_0$  的过程中函数  $f(x)$  的变化趋势, 故极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  是否存在以及存在时其极限值是多少, 可以与函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的函数值  $f(x_0)$  以及距离  $x_0$  较远的点的函数值无关, 而只与点  $x_0$  的邻域内函数有关. 于是即使极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处也可以有定义; 同样, 即使

极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 而函数  $f(x)$  在点  $x_0$  也可以没有定义.

③ 利用分析语言已证得如下几个基本极限, 它们在今后的极限计算中要经常用到:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1; & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e; & \lim_{x \rightarrow +\infty} xq^x &= 0, |q| < 1; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q^n &= 0, |q| < 1; & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1, a > 0; & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} &= 0; & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} &= 0, a \text{ 为常数}; & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} &= 0. \end{aligned}$$

④ 关于极限的分析语言定义, 有如下两个典型的问题:

第一个问题是用分析语言直接证明某个极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . 它是对于任意给定的  $\epsilon > 0$ , 由  $|f(x) - A| < \epsilon$  去确定与  $\epsilon$  有关的  $\delta > 0$ , 使得自变量  $x$  与定点  $x_0$  的距离  $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0$ . 此时的  $\epsilon$  是相对给定的. 为了确定  $|x - x_0| < \delta$ , 就需要设法从  $|f(x) - A|$  中分解出因子  $|x - x_0|$ , 让其余的因子是一个关于  $x$  的有界量. 即设法将不等式  $|f(x) - A| < \epsilon$  转化为不等式  $|x - x_0| < \varphi(\epsilon)$ . 从而由此找到  $\delta > 0$ . 注意, 这里的  $\varphi(\epsilon)$  是与任意给定的  $\epsilon > 0$  有关, 而与  $x$  无关的, 故所找到的  $\delta$  也是与  $\epsilon$  有关, 而与  $x$  无关的.

对于用分析语言证明极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  的问题, 只要考虑到无穷大邻域的表达形式就明白现在应该考虑  $|x| > X$  和  $|f(x) - A| < \epsilon$  两个不等式. 这时, 为了确定  $|x| > X$ , 就需要设法从  $|f(x) - A|$  中分解出因子  $\frac{1}{|x|}$ , 并转化为不等式  $|x| > \psi(\epsilon)$ , 从而由此找到只与  $\epsilon$  有关而与  $x$  无关的  $X$ . 这样找到的  $X > 0$  能使得对于任意给定的  $\epsilon > 0$ , 当  $|x| > X$  时恒有  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 即  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ . 同理, 可以用分析语言证明其他各种类型的极限.

这一项工作要着重注意如下两点:

首先, 在证明过程中分析语言表达要正确. 只有这样才会对极限定义有较深刻的理解.

其次, 因为人们只关心与  $\epsilon$  有关的  $\delta$  (或  $X$ ) 的存在, 只要找到符合定义要求的  $\delta$  (或  $X$ ) 就可以了, 不一定要找最大的  $\delta > 0$  (或最小的  $X > 0$ ), 所以在分析语言证明过程中, 可以适当放大绝对值  $|f(x) - A|$ , 使放大后的式子小于  $\epsilon$ , 即能较方便地求得  $\delta > 0$  (或  $X > 0$ ).

在证明过程中绝对值  $|f(x) - A|$  的适当放大, 可以通过利用  $x \rightarrow x_0$  的特性来实现. 例如, 当  $x \rightarrow x_0$  时, 依照邻域的概念可以不妨假设  $|x - x_0| < 1$ ; 如果考虑  $x \rightarrow \infty$ , 则可以不妨假设  $|x|$  大于某个有限的给定正数. 这是一种“有条件放大”技巧.

第二个问题是: 由已知某个极限存在, 利用分析语言去证明另一个极限存在的命题. 根据极限的分析语言定义, 由已知的  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  便有: 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 当然对某个特定的  $\epsilon_0 > 0$ , 总存在  $\delta_0 > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_0$  时, 恒有  $|f(x) - A| < \epsilon$ . 这里的  $\delta_0$  是已经找到的正数. 然后利用这个  $\delta_0$ , 以及有关不等式去分析证明待证的有关极限的命题, 此时要找的  $\delta$  不仅与  $\epsilon$  有关, 而且还与已经找到的  $\delta_0$  有关.

**例 1** 用分析语言证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{2n^2 + n - 6} = \frac{1}{2}$ .

**证明** 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 要使不等式

$$\left| \frac{n^2 - n}{2n^2 + n - 6} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

成立, 因为当  $n \geq 6$  时有

$$\left| \frac{n^2 - n}{2n^2 + n - 6} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{6 - 3n}{2(2n^2 + n - 6)} \right| < \frac{3n}{4n^2} < \frac{1}{n}, \quad (*)$$

故只要使  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , 取  $N = \max \left\{ 6, \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] \right\}$ , 则当  $n > N$  时, 恒有  $\left| \frac{n^2 - n}{2n^2 + n - 6} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ , 所以原极限成立.

**注记** 这里, 由不等式  $|u_n - A| < \varepsilon$  求解  $n$  比较困难, 为此需要将  $|u_n - A|$  适当放大, 以便使求  $N$  的运算更加简便. 本例式 (\*) 中的第二个不等式  $\frac{3n}{4n^2} < \frac{1}{n}$  是一种无条件放大, 第一个不等式是在  $n \geq 6$  时的有条件放大. 因数列的极限与它的前面有限项是无关的, 故这种不等式放大是可行的, 且能方便地求得  $n > \varphi(\varepsilon)$  而选取  $N$ . 注意  $|u_n - A|$  适当放大的要求应让放大后的式子随  $n$  增大而缩小, 且能使该式小于  $\varepsilon$ . 例如, 如果  $|u_n - A|$  是关于  $n$  的有理分式, 则要求其分母中  $n$  的最高次数高于分子中  $n$  的最高次数.

**例 2** 用  $\varepsilon - \delta$  语言证明  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x}{x + 2} = 3$ .

**证明** 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 要使

$$\left| \frac{x^2 + 4x}{x + 2} - 3 \right| = \left| \frac{x^2 + x - 6}{x + 2} \right| = \left| \frac{x + 3}{x + 2} \right| |x - 2| < \varepsilon.$$

因  $x \rightarrow 2$ , 故将  $x$  限制在  $x = 2$  的邻域内, 不妨设  $0 < |x - 2| < 1$ , 即  $1 < x < 3, x \neq 2$ , 便有  $\left| \frac{x + 3}{x + 2} \right| < 2$ , 所以只要  $2|x - 2| < \varepsilon$ , 取  $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ , 则当  $0 < |x - 2| < \delta$  时恒有  $\left| \frac{x^2 + 4x}{x + 2} - 3 \right| < \varepsilon$ . 于是原极限成立.

**注记** 根据  $x \rightarrow 2$  的变化趋势, 限制自变量  $x$  在  $0 < |x - 2| < 1$  的范围内是可行的, 当然也可限制  $0 < |x - 2| < \frac{1}{2}$  等. 由此适当地放大  $|f(x) - A|$ , 使之能方便地找到  $\delta$ , 避免求解繁复不等式的过程, 是用分析语言证明极限的常用方法.

**例 3** 试证明: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, A \neq 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ .

**证明** 由  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, A \neq 0$ , 知, 对于  $\varepsilon_1 = \frac{|A|}{2} > 0$ , 必存在  $\delta_1 > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时有  $\left| \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - A \right| < \varepsilon_1 = \frac{|A|}{2}$ , 而  $|A| - \left| \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right| \leq \left| \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - A \right|$ , 故有  $\left| \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right| > \frac{|A|}{2}$ , 即  $|\beta(x)| < \frac{2|\alpha(x)|}{|A|}$ . 对此不等式令  $x \rightarrow x_0$ , 由夹逼准则即知  $\lim_{x \rightarrow x_0} |\beta(x)| = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ .

**注记** 根据待证极限的要求,先对已知极限分别用分析语言给出相应的不等式,然后利用这些不等式在  $x_0$  的公共邻域内估计所需的不等式.另外,由  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, A \neq 0$ ,得出在  $x_0$  邻域  $\{x | 0 < |x - x_0| < \delta_0\}$  内恒有  $|f(x)| > \frac{|A|}{2} > 0$  是利用函数极限的局部保号性性质.

⑤**无穷大**是在自变量的某一变化过程中,其绝对值无限增大的变量.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 并不表示当  $x \rightarrow x_0$  时函数  $f(x)$  的极限存在,它仅仅表示当  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  的一种变化趋势.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  的分析定义是:

对任意给定的  $G > 0$ ,存在  $\delta > 0$ ,当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时恒有  $|f(x)| > G$ .

令  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ,可以把  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  转化为极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,其中函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的邻域内不等于零,但  $f(x)$  在点  $x_0$  处可以等于零.即在自变量的同一变化趋势下,无穷大的倒数为无穷小.同理,无穷小的倒数为无穷大.请注意:对无穷大的讨论,一般都是经这一变换转化为其倒数的无穷小的讨论.

**例 4** 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ ,且在  $x_0$  的某去心邻域内  $\psi(x)$  满足  $0 < K_1 \leq |\psi(x)| \leq K_2$ ,试证明: (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [\varphi(x) + \psi(x)] = \infty$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\psi(x) = \infty$ .

**证明** 对于任意给定的  $G > 0$ ,

(1)由  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$  知,对  $G + K_2 > 0$ ,必存在  $\delta_1 > 0$ ,使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时恒有  $|\varphi(x)| > G + K_2$ ,取  $\delta = \delta_1$ ,则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时恒有

$$|\varphi(x) + \psi(x)| \geq |\varphi(x)| - |\psi(x)| > G + K_2 - K_2 = G,$$

所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} [\varphi(x) + \psi(x)] = \infty$ .

(2)由  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$  知,对  $\frac{G}{K_1} > 0$  必存在  $\delta_2 > 0$ ,使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时有  $|\varphi(x)| > \frac{G}{K_1}$ ,取  $\delta = \delta_2$ ,则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时恒有  $|\varphi(x)\psi(x)| > G$ . 所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\psi(x) = \infty$ .

**注记** 本例的结论说明无穷大与有界量之间有如下关系:(i)无穷大量与有界量之和是无穷大量;(ii)任意两个正(负)无穷大量之和是正(负)无穷大量,但任意两个非同号的无穷大量之和可能不是无穷大量,例如  $\{n\}$  与  $\{-n\}$  都是无穷大量,但它们的和显然不是无穷大量;(iii)无穷大量  $f(x)$  与满足  $|\psi(x)| \geq K_1 > 0$  的  $\psi(x)$  乘积仍是无穷大量.

### 1.1.2 极限的性质

极限有着很多重要的性质与法则,读者都应熟练掌握.其中连续函数的性质将在 § 1.2 中阐述;极限存在的准则将在 § 1.3 中展开.这里,将对极限的其他一些性质加以分析.

## 一、极限的基本性质

若函数的极限存在,则其极限是惟一的;反之,若函数的某一极限不惟一,则它的极限不存在.这是众所皆知的极限惟一性性质.

①极限的有界性是指:

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的充分小的去心邻域内有界. 这就是说, 函数  $f(x)$  有界只是其极限存在的必要条件, 而非充分条件, 故它蕴含着如下结论:

若函数  $f(x)$  无界, 则其极限必不存在; 若函数  $f(x)$  有界, 则其极限不一定存在.

例如, 数列  $\{n^{(-1)^n}\}$  是无界的, 故它的极限不存在, 即  $\{n^{(-1)^n}\}$  是发散数列.

②极限的保号性是指:

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且它的极限值  $A > \alpha$ , 则存在正数  $\eta > 0$ , 使得函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的充分小的去心邻域内有  $f(x) > \alpha + \eta$ ; 若  $A < \alpha$ , 则  $f(x)$  在相应邻域内有  $f(x) < \alpha - \eta$ .

反之, 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 且函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的充分小的去心邻域内有  $f(x) > \alpha$ , 则它的极限值  $A \geq \alpha$ ; 若  $f(x)$  在相应邻域内有  $f(x) < \alpha$ , 则它的极限值  $A \leq \alpha$ .

如果  $\alpha = 0$ , 那么上述相应结果就充分体现了函数  $f(x)$  在相应邻域内与其极限值保持相同的符号这一事实. 这正是一般教科书中所阐述的保号性定理.

**例 5** 设  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = l, l > 0$ , 证明: 函数  $f(x)$  在点  $x = a$  的邻域内恒有不等式  $f(x) \geq f(a)$ , 也即  $f(x)$  在  $x = a$  处取得极小值.

**证明** 因为  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = l, l > 0$ , 故由极限的保号性知, 存在  $\delta > 0$  和  $\eta > 0$ , 使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 恒有

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} > \eta > 0.$$

即当  $x \in \{x | 0 < |x - a| < \delta\}$  时有  $f(x) > f(a)$ .

特别, 当  $x = a$  时, 显然有  $f(x) = f(a)$ . 综合两者即得, 函数  $f(x)$  在点  $x = a$  的邻域内必有  $f(x) \geq f(a)$ . 即函数  $f(x)$  在点  $x = a$  处取得极小值.

**注记** 注意, 本例条件中函数  $f(x)$  没有可导的要求, 故只能用极限的保号性证明. 如果题设条件改为: 函数  $f(x)$  在点  $x = a$  处具有二阶连续导数, 则可利用二阶泰勒公式得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + o((x - a)^2)}{(x - a)^2} = l > 0,$$

故有  $f'(a) = 0, f''(a) = 2l > 0$ . 于是根据函数极值的充分条件知,  $f(x)$  在点  $x = a$  处取得极小值, 即  $f(x) \geq f(a)$ .

**例 6** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2n\pi}{3n+1}$ .



解 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n\pi}{3n+1} = \frac{2\pi}{3}$ , 而  $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi$ , 由极限的保号性知, 存在正整数  $N > 0$  和存在正数  $\eta > 0$ , 如  $\eta = \frac{\pi}{12}$ , 使得当  $n > N$  时有

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \eta < \frac{2n\pi}{3n+1} < \pi, \quad 0 < \sin \frac{2n\pi}{3n+1} < \sin \frac{7\pi}{12} < 1.$$

注意到数列极限与它的前面有限项无关, 以及极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{7\pi}{12}\right)^n = 0$ , 则由夹逼关系

$$0 < \left(\sin \frac{2n\pi}{3n+1}\right)^n < \left(\sin \frac{7\pi}{12}\right)^n < 1$$

得极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2n\pi}{3n+1} = 0$ .

## 二、无穷小的性质

无穷小是以零为极限的变量, 它有如下重要的性质:

1°  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的充要条件是  $\alpha(x) = f(x) - A$  在  $x \rightarrow x_0$  时为无穷小, 即

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad \text{其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

2° 当  $x \rightarrow x_0$  时, 有界函数与无穷小的乘积是无穷小; 有限个无穷小的乘积为无穷小.

3° 当  $x \rightarrow x_0$  时, 有限个无穷小的和为无穷小.

4° 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = a, a \neq \infty$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ .

它表明: 当  $x \rightarrow x_0$  时, 若分式  $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$  的极限存在, 且其分母  $\alpha(x)$  是无穷小, 则它的分子  $\beta(x)$  必定也是无穷小. 显然, 当  $a \neq 0$  时, 分子  $\beta(x)$  是分母  $\alpha(x)$  的同阶无穷小; 当  $a = 0$  时, 分子  $\beta(x)$  是分母  $\alpha(x)$  的高阶无穷小; 当  $a = 1$  时, 分子  $\beta(x)$  是分母  $\alpha(x)$  的等价无穷小. 这一性质在极限计算中是很重要的, 请注意.

5° 当  $x \rightarrow x_0$  时,  $|\alpha(x)|$  为无穷小的充要条件是  $\alpha(x)$  为无穷小, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} |\alpha(x)| = 0$  的充要条件是  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ .

然而, 一般情形有:

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$ ; 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| \neq |A|$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$ .

例如, 当  $u_n$  恒正或恒负时, 数列  $\{|u_n|\}$  与  $\{u_n\}$  同时敛散. 但是, 若  $u_n$  非恒正或非恒负, 则当  $\{|u_n|\}$  收敛时,  $\{u_n\}$  可能收敛, 也可能发散. 例如,  $\{(-1)^n\}$  是收敛的, 但  $\{(-1)^n\}$  是发散的.

6° 设当  $x \rightarrow x_0$  时,  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  都是无穷小, 且  $\beta(x) \neq 0$ , 那么  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  可以进行无穷小的比较. 当  $x \rightarrow x_0$  时,  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的高阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小等是读者必须掌握的概念.

在  $x \rightarrow 0$  时, 通常取  $\beta(x)$  为  $x$  的幂函数  $x^a$ . 常用的等价无穷小有: