大学数学考研专题复习

浙江大学
邵剑 陈维新
张继昌 何勇 编著

科学出版社

大学数学考研专题复习

浙 江 大 学

邵　剑　　陈维新
张继昌　　何　勇　编著

科 学 出 版 社

2 0 0 1

内 容 简 介

本书是作者十几年来在浙江大学为攻读硕士研究生学位参加全国统一考试而举办的辅导复习班上讲课资料与经验之汇编，是在深入研究教育部数学考试大纲与对历年全国统一考试试卷分析之后撰著而成的. 全书包括高等数学（含常微分方程）、线性代数、概率论与数理统计三大部分；书末配备有模拟试卷及其解答供读者自我测试.

本书强调基本的概念、方法和思想，着眼于提高读者的能力和素质. 本书按专题形式的结构对有关内容重新组合、综合归纳，注重数学思维与数学方法的论述，注意专题讲述与例题解析相结合，并以“注记”形式对有关专题加以分析与延拓等，成为本书之特色. 此外，本书还具有概念清晰、内容全面、方法多样、综合性强等特点.

本书内容对于工学、经济学、管理学各学科专业学生为报考硕士研究生进行数学总复习都是适用的.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学考研专题复习/邵剑等编著. －北京：科学出版社，2001
ISBN 7-03-008375-X

Ⅰ. 大…　Ⅱ. 邵…　Ⅲ. 高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 028207 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717

西源印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2001 年 7 月第　一　版　　开本：787×1092　1/16
2001 年 7 月第一次印刷　　印张：46 1/4
印数：1—4 000　　字数：1 074 000

定价：50.00 元

前　言

本书是作者十几年来在浙江大学为攻读硕士研究生学位参加全国统一考试而举办的辅导复习班上讲课资料与经验之汇编，是在深入研究教育部数学考试大纲与对历年全国统一考试试卷分析之后撰写而成的．我们注意到历年数学试题虽千变万化，但确有其宗．所以本书不仅有大量的各方面的典型例题，也致力于从这些例题分析中总结出一些规律来，也就是说我们是着眼于帮助读者提高能力来进行考研复习的．我们期望本书不仅是报考硕士研究生的朋友们一册广度与深度均较为合适的复习用书，而且对有关人员进行大学数学复习有着很好的参考价值，还期望本书能使读者在思维方法与解决问题能力等方面都有相当程度的提高．

本书在撰著中注意数学思维与数学方法的论述，专题讲述与例题解析相结合，并以“注记”形式对有关专题加以分析与延拓，这就是本书的特色．本书还具有概念清晰、内容全面、方法多样、综合性强等特点．

按教育部制订的硕士研究生入学考试数学考试大纲，本书包含高等数学(含常微分方程)、线性代数、概率论与数理统计三大部分内容，共25章．其中第1～15章为高等数学(含常微分方程)，由邵剑和何勇撰写；第16～21章为线性代数，由陈维新撰写；第22～25章为概率论与数理统计，由张继昌撰写．书末配备两套数学一、数学二、数学三、数学四的模拟试卷，及其详细解答，读者可作为自我测试．

本书内容对于工学、经济学、管理学各学科、专业的学生为报考硕士研究生进行数学总复习都是适用的，而且本书章节的各个专题的确定已注意到考试大纲对各学科、专业对数学知识与能力的要求．请读者根据自己报考的数学一、数学二、数学三、数学四，按照教育部颁布的数学考试大纲选用本书的有关章节的各个专题．

为了帮助报考硕士研究生的朋友更好地梳理掌握数学知识，建议大家按专题综合复习，不宜拘泥于教科书的章节．并深刻理解各个基本概念与各个专题的数学思想数学方法，熟练掌握各个基本方法，例如对同一概念或理论应以不同面目、不同角度、逆向思维等多方面去理解，以求思想观点、方法上的融会贯通，而不要一味刻意去追求高难度、高技巧．同时读者应懂得“厚积言有物，勤练笔生花”的道理，务必花相当的时间与精力做适量的基本练习与综合练习．这样，成功一定属于有充分准备的你——朋友！

本书的不当甚至差错之处，惟望各位同仁与朋友们多多指教，我们不胜感谢！

作　者

于浙江大学玉泉校区求是村

2001年2月

目　　录

第一章　极限与连续

极限是微积分学的核心与基础.极限是建立在无限基础上的概念,它考虑的是一个动态过程.

§1.1　极限的概念与性质

1.1.1　极限的基本概念

①各种类型的极限基本上可以统一表示为函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.根据自变量 x 的目标值 x_0 与函数 $f(x)$ 的目标值 A 的不同含义,以及它们相应邻域的意义,就可以得到不同形式极限的意义.例如,当 $f(x)$ 的自变量 x 只取正整数 n,x_0 为 $+\infty$ 时,就是数列 $\{u_n\}$,$u_n=f(n)$ 的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=A$;当 $f(x)$ 的自变量 x 从点 x_0 左方趋于 x_0(或右方趋于 x_0)时,就是函数 $f(x)$ 的左极限 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$(或右极限 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$);当 $A=0$ 时,极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ 表示 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷小;当 A 为 ∞ 时,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 表示 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷大,它是极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在的一种形式.其他各种形式所表示的极限也是容易理解的.

一般来说,极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义蕴含着自变量 x 落在点 x_0 的充分小邻域内时,函数 $f(x)$ 的值落在 A 的充分小邻域内.极限的分析语言描述,正是由这一思想给出的.极限的几何意义也是由此得出的.为此,掌握各种邻域的概念及其表达式是至关重要的,它有利于理解极限的分析语言描述的精神实质.

函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的**极限** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的分析定义是:

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$ 的分析定义是:

存在某个 $\varepsilon_1>0$,对任意的 $\delta>0$,总存在点 x_1 满足 $0<|x_1-x_0|<\delta$ 时,使

$$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_1.$$

请读者自行给出其他各种类型极限的分析语言定义,以加深对极限概念的理解.当然,这些分析语言表述都是相应极限的充分必要条件.

②由极限的定义知,因极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是研究自变量 x 趋向于 x_0 的过程中函数 $f(x)$ 的变化趋势,故极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在以及存在时其极限值是多少,可以与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 以及距离 x_0 较远的点的函数值无关,而只与点 x_0 的邻域内函数有关.于是即使极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在,函数 $f(x)$ 在点 x_0 处也可以有定义;同样,即使

极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,而函数 $f(x)$ 在点 x_0 也可以没有定义.

③利用分析语言已证得如下几个基本极限,它们在今后的极限计算中要经常用到:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e};\qquad \lim_{x\to +\infty} xq^x=0,|q|<1;$$

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0,|q|<1;\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,a>0;\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0;\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0,a\text{ 为常数};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

④关于极限的分析语言定义,有如下两个典型的问题:

第一个问题是用分析语言直接证明某个极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. 它是对于任意给定的 $\varepsilon>0$,由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 去确定与 ε 有关的 $\delta>0$,使得自变量 x 与定点 x_0 的距离 $|x-x_0|<\delta$,$x\neq x_0$. 此时的 ε 是相对给定的. 为了确定 $|x-x_0|<\delta$,就需要设法从 $|f(x)-A|$ 中分解出因子 $|x-x_0|$,让其余的因子是一个关于 x 的有界量. 即设法将不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 转化为不等式 $|x-x_0|<\varphi(\varepsilon)$. 从而由此找到 $\delta>0$. 注意,这里的 $\varphi(\varepsilon)$ 是与任意给定的 $\varepsilon>0$ 有关,而与 x 无关的,故所找到的 δ 也是与 ε 有关,而与 x 无关的.

对于用分析语言证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的问题,只要考虑到无穷大邻域的表达形式就明白现在应该考虑 $|x|>X$ 和 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 两个不等式. 这时,为了确定 $|x|>X$,就需要设法从 $|f(x)-A|$ 中分解出因子 $\frac{1}{|x|}$,并转化为不等式 $|x|>\psi(\varepsilon)$,从而由此找到只与 ε 有关而与 x 无关的 X. 这样找到的 $X>0$ 能使得对于任意给定的 $\varepsilon>0$,当 $|x|>X$ 时恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. 同理,可以用分析语言证明其他各种类型的极限.

这一项工作要着重注意如下两点:

首先,在证明过程中分析语言表达要正确. 只有这样才会对极限定义有较深刻的理解.

其次,因为人们只关心与 ε 有关的 δ(或 X)的存在,只要找到符合定义要求的 δ(或 X)就可以了,不一定要找最大的 $\delta>0$(或最小的 $X>0$),所以在分析语言证明过程中,可以适当放大绝对值 $|f(x)-A|$,使放大后的式子小于 ε,即能较方便地求得 $\delta>0$(或 $X>0$).

在证明过程中绝对值 $|f(x)-A|$ 的适当放大,可以通过利用 $x\to x_0$ 的特性来实现. 例如,当 $x\to x_0$ 时,依照邻域的概念可以不妨假设 $|x-x_0|<1$;如果考虑 $x\to\infty$,则可以不妨假设 $|x|$ 大于某个有限的给定正数. 这是一种"有条件放大"技巧.

第二个问题是:由已知某个极限存在,利用分析语言去证明另一个极限存在的命题. 根据极限的分析语言定义,由已知的 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 便有:对任意给定的 $\varepsilon>0$,当然对某个特定的 $\varepsilon_0>0$,总存在 $\delta_0>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 这里的 δ_0 是已经找到的正数. 然后利用这个 δ_0,以及有关不等式去分析证明待证的有关极限的命题,此时要找的 δ 不仅与 ε 有关,而且还与已经找到的 δ_0 有关.

例 1 用分析语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2+n-6}=\frac{1}{2}$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,要使不等式

$$\left|\frac{n^2-n}{2n^2+n-6}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

成立,因为当 $n\geqslant 6$ 时有

$$\left|\frac{n^2-n}{2n^2+n-6}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{6-3n}{2(2n^2+n-6)}\right|<\frac{3n}{4n^2}<\frac{1}{n}, \qquad (*)$$

故只要使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,取 $N=\max\left\{6,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$,则当 $n>N$ 时,恒有 $\left|\frac{n^2-n}{2n^2+n-6}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$,所以原极限成立.

注记 这里,由不等式 $|u_n-A|<\varepsilon$ 求解 n 比较困难,为此需要将 $|u_n-A|$ 适当放大,以便使求 N 的运算更加简便.本例式($*$)中的第二个不等式 $\frac{3n}{4n^2}<\frac{1}{n}$ 是一种无条件放大,第一个不等式是在 $n\geqslant 6$ 时的有条件放大.因数列的极限与它的前面有限项是无关的,故这种不等式放大是可行的,且能方便地求得 $n>\varphi(\varepsilon)$ 而选取 N.注意 $|u_n-A|$ 适当放大的要求应让放大后的式子随 n 增大而缩小,且能使该式小于 ε.例如,如果 $|u_n-A|$ 是关于 n 的有理分式,则要求其分母中 n 的最高次数高于分子中 n 的最高次数.

例 2 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4x}{x+2}=3$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{x^2+4x}{x+2}-3\right|=\left|\frac{x^2+x-6}{x+2}\right|=\left|\frac{x+3}{x+2}\right||x-2|<\varepsilon.$$

因 $x\to 2$,故将 x 限制在 $x=2$ 的邻域内,不妨设 $0<|x-2|<1$,即 $1<x<3, x\neq 2$,便有 $\left|\frac{x+3}{x+2}\right|<2$,所以只要 $2|x-2|<\varepsilon$,取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2}\right\}$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时恒有 $\left|\frac{x^2+4x}{x+2}-3\right|<\varepsilon$.于是原极限成立.

注记 根据 $x\to 2$ 的变化趋势,限制自变量 x 在 $0<|x-2|<1$ 的范围内是可行的,当然也可限制 $0<|x-2|<\frac{1}{2}$ 等.由此适当地放大 $|f(x)-A|$,使之能方便地找到 δ,避免求解繁复不等式的过程,是用分析语言证明极限的常用方法.

例 3 试证明:若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A, A\neq 0$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

证明 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A, A\neq 0$,知,对于 $\varepsilon_1=\frac{|A|}{2}>0$,必存在 $\delta_1>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有 $\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-A\right|<\varepsilon_1=\frac{|A|}{2}$,而 $|A|-\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|\leqslant\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-A\right|$,故有 $\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|>\frac{|A|}{2}$,即 $|\beta(x)|<\frac{2|\alpha(x)|}{|A|}$.对此不等式令 $x\to x_0$,由夹逼准则即知 $\lim\limits_{x\to x_0}|\beta(x)|=0$,所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

注记 根据待证极限的要求，先对已知极限分别用分析语言给出相应的不等式，然后利用这些不等式在 x_0 的公共邻域内估计所需的不等式. 另外，由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, A\neq 0$，得出在 x_0 邻域 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta_0\}$ 内恒有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}>0$ 是利用函数极限的局部保号性性质.

⑤**无穷大**是在自变量的某一变化过程中，其绝对值无限增大的变量. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 并不表示当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在，它仅仅表示当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的一种变化趋势. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 的分析定义是：

对任意给定的 $G>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(x)|>G$.

令 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$，可以把 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 转化为极限 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$，其中函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内不等于零，但 $f(x)$ 在点 x_0 处可以等于零. 即在自变量的同一变化趋势下，无穷大的倒数为无穷小. 同理，无穷小的倒数为无穷大. 请注意：对无穷大的讨论，一般都是经这一变换转化为其倒数的无穷小的讨论.

例 4 设 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=\infty$，且在 x_0 的某去心邻域内 $\psi(x)$ 满足 $0<K_1\leqslant|\psi(x)|\leqslant K_2$，试证明： (1) $\lim\limits_{x\to x_0}[\varphi(x)+\psi(x)]=\infty$； (2) $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\psi(x)=\infty$.

证明 对于任意给定的 $G>0$，

(1) 由 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=\infty$ 知，对 $G+K_2>0$，必存在 $\delta_1>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时恒有 $|\varphi(x)|>G+K_2$，取 $\delta=\delta_1$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有

$$|\varphi(x)+\psi(x)|\geqslant|\varphi(x)|-|\psi(x)|>G+K_2-K_2=G,$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}[\varphi(x)+\psi(x)]=\infty$.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=\infty$ 知，对 $\dfrac{G}{K_1}>0$ 必存在 $\delta_2>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时有 $|\varphi(x)|>\dfrac{G}{K_1}$，取 $\delta=\delta_2$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|\varphi(x)\psi(x)|>G$. 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\psi(x)=\infty$.

注记 本例的结论说明无穷大与有界量之间有如下关系：(i)无穷大量与有界量之和是无穷大量；(ii)任意两个正(负)无穷大量之和是正(负)无穷大量，但任意两个非同号的无穷大量之和可能不是无穷大量，例如 $\{n\}$ 与 $\{-n\}$ 都是无穷大量，但它们的和显然不是无穷大量；(iii)无穷大量 $f(x)$ 与满足 $|\psi(x)|\geqslant K_1>0$ 的 $\psi(x)$ 乘积仍是无穷大量.

1.1.2 极限的性质

极限有着很多重要的性质与法则，读者都应熟练掌握. 其中连续函数的性质将在§1.2 中阐述；极限存在的准则将在§1.3 中展开. 这里，将对极限的其他一些性质加以分析.

一、极限的基本性质

若函数的极限存在，则其极限是惟一的；反之，若函数的某一极限不惟一，则它的极限不存在．这是众所皆知的极限惟一性性质．

①极限的**有界性**是指：

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的充分小的去心邻域内有界．这就是说，函数 $f(x)$ 有界只是其极限存在的必要条件，而非充分条件，故它蕴含着如下结论：

若函数 $f(x)$ 无界，则其极限必不存在；若函数 $f(x)$ 有界，则其极限不一定存在．

例如，数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 是无界的，故它的极限不存在，即 $\{n^{(-1)^n}\}$ 是发散数列．

②极限的**保号性**是指：

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且它的极限值 $A>\alpha$，则存在正数 $\eta>0$，使得函数 $f(x)$ 在点 x_0 的充分小的去心邻域内有 $f(x)>\alpha+\eta$；若 $A<\alpha$，则 $f(x)$ 在相应邻域内有 $f(x)<\alpha-\eta$．

反之，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且函数 $f(x)$ 在点 x_0 的充分小的去心邻域内有 $f(x)>\alpha$，则它的极限值 $A\geqslant\alpha$；若 $f(x)$ 在相应邻域内有 $f(x)<\alpha$，则它的极限值 $A\leqslant\alpha$．

如果 $\alpha=0$，那么上述相应结果就充分体现了函数 $f(x)$ 在相应邻域内与其极限值保持相同的符号这一事实．这正是一般教科书中所阐述的保号性定理．

例 5　设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=l$，$l>0$，证明：函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的邻域内恒有不等式 $f(x)\geqslant f(a)$，也即 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值．

证明　因为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=l$，$l>0$，故由极限的保号性知，存在 $\delta>0$ 和 $\eta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，恒有

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}>\eta>0.$$

即当 $x\in\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$ 时有 $f(x)>f(a)$．

特别，当 $x=a$ 时，显然有 $f(x)=f(a)$．综合两者即得，函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的邻域内必有 $f(x)\geqslant f(a)$．即函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处取得极小值．

注记　注意，本例条件中函数 $f(x)$ 没有可导的要求，故只能用极限的保号性证明．如果题设条件改为：函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处具有二阶连续导数，则可利用二阶泰勒公式得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)(x-a)+\dfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+o((x-a)^2)}{(x-a)^2}=l>0,$$

故有 $f'(a)=0$，$f''(a)=2l>0$．于是根据函数极值的充分条件知，$f(x)$ 在点 $x=a$ 处取得极小值，即 $f(x)\geqslant f(a)$．

例 6　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{2n\pi}{3n+1}$．

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\pi}{3n+1}=\dfrac{2\pi}{3}$,而$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{2\pi}{3}<\pi$,由极限的保号性知,存在正整数 $N>0$ 和存在正数 $\eta>0$,如 $\eta=\dfrac{\pi}{12}$,使得当 $n>N$ 时有

$$\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+\eta<\frac{2n\pi}{3n+1}<\pi,\quad 0<\sin\frac{2n\pi}{3n+1}<\sin\frac{7\pi}{12}<1.$$

注意到数列极限与它的前面有限项无关,以及极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)^n=0$,则由夹逼关系

$$0<\left(\sin\frac{2n\pi}{3n+1}\right)^n<\left(\sin\frac{7\pi}{12}\right)^n<1$$

得极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{2n\pi}{3n+1}=0$.

二、无穷小的性质

无穷小是以零为极限的变量,它有如下重要的性质:

1° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是$\alpha(x)=f(x)-A$ 在$x\to x_0$ 时为无穷小,即

$$f(x)=A+\alpha(x),\quad 其中\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

2° 当 $x\to x_0$ 时,有界函数与无穷小的乘积是无穷小;有限个无穷小的乘积为无穷小.

3° 当 $x\to x_0$ 时,有限个无穷小的和为无穷小.

4° 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=a$,$a\neq\infty$,且$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

它表明:当 $x\to x_0$ 时,若分式$\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$的极限存在,且其分母 $\alpha(x)$是无穷小,则它的分子$\beta(x)$必定也是无穷小.显然,当 $a\neq0$ 时,分子 $\beta(x)$是分母 $\alpha(x)$的同阶无穷小;当 $a=0$ 时,分子 $\beta(x)$是分母 $\alpha(x)$的高阶无穷小;当 $a=1$ 时,分子 $\beta(x)$是分母 $\alpha(x)$的等价无穷小.这一性质在极限计算中是很重要的,请注意.

5° 当 $x\to x_0$ 时,$|\alpha(x)|$为无穷小的充要条件是 $\alpha(x)$为无穷小,即$\lim\limits_{x\to x_0}|\alpha(x)|=0$ 的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

然而,一般情形有:

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$; 若$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|\neq|A|$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$.

例如,当 u_n 恒正或恒负时,数列$\{|u_n|\}$与$\{u_n\}$同时敛散.但是,若 u_n 非恒正或非恒负,则当$\{|u_n|\}$收敛时,$\{u_n\}$可能收敛,也可能发散.例如,$\{|(-1)^n|\}$是收敛的,但$\{(-1)^n\}$是发散的.

6° 设当 $x\to x_0$ 时,$\alpha(x)$与 $\beta(x)$都是无穷小,且 $\beta(x)\neq0$,那么 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$可以进行无穷小的比较.当 $x\to x_0$ 时,$\alpha(x)$是 $\beta(x)$的**高阶无穷小**、**同阶无穷小**、**等价无穷小**等是读者必须掌握的概念.

在 $x\to0$ 时,通常取 $\beta(x)$为 x 的幂函数x^a.常用的等价无穷小有: