计算数学丛书

广义逆矩阵的基本理论和计算方法

何旭初　　上海科学技术出版社

计算数学丛书

广义逆矩阵的基本理论和计算方法

何旭初

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书的目的是向读者介绍广义逆矩阵的基本理论以及计算广义逆矩阵和线性最小二乘问题的数值方法。全书共分五章，第1章的内容是有关线性代数的预备知识；第2章介绍了广义逆矩阵的基本理论；第3章着重讨论广义逆矩阵的连续性问题以及消除亏秩矩阵广义逆的不连续性的理论和方法；第4章则对奇异性和病态性这两个重要概念以及对度量病态程度的有效方法作了比较系统的介绍；第5章介绍了计算广义逆矩阵和线性最小二乘问题的数值方法，如LU分解，QR、QU分解以及直交化方法和递推方法等，章末还对有特殊结构的大型稀疏线性最小二乘问题的计算方法作了简要介绍。此外，在附录里对Drazin逆矩阵的基本理论也作了简单的介绍。

本书可供大学理、工科高年级学生、研究生、教师以及具有初步线性代数基础的工程技术人员参考。

计算数学丛书
广义逆矩阵的基本理论和
计算方法
何旭初
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行 浙江湖州印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 6.75 字数 147,000
1985年11月第1版 1985年11月第1次印刷
印数：1—5,600
统一书号：13119·1277 定价：1.25元

出 版 说 明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校的计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《不动点算法》、《广义逆矩阵的基本理论和计算方法》、《非线性方程的区间算法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《曲线曲面的数值表示和逼近》、《舍入误差分析引论》、《解边值问题的伽辽金法》、《非线性方程组迭代解法》、《外推法及其应用》、《蒙特卡罗方法》、《演化方程的有限元理论》、《数值解高维偏微分方程的分裂法》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版。

前　言

早在二十年代初期，E. H. Moore 就提出了广义逆矩阵这个重要概念. 在三十年代，曾远荣先生把它推广到 Hilbert 空间中的线性算子上去，以后他又作了一系列有意义的工作. 但是，长期以来，对广义逆矩阵的研究却没有受到人们的注意. 随着科学技术的发展，直到五十年代中期，R. Penrose 又独立地提出广义逆矩阵的概念后，情况才开始发生了变化，这被人们称之为广义逆矩阵的再生. 这是历史的必然. 由于广义逆矩阵在测量学、统计学、经济学以及数学规划等许多领域中的重要应用逐渐为人们所认识，从而对广义逆矩阵的理论与应用的研究，产生了巨大的推动力量，使得这一学科在近三十年来得到迅速的发展. 现在，广义逆矩阵的理论已成为线性代数中的一个重要方面，它是处理线性数学模型的一种有力工具. 在计算数学中，特别由于它具有处理奇异性问题的能力，也日益显示出不可忽视的作用.

本书的目的是向读者介绍广义逆矩阵的基本理论以及计算广义逆矩阵和有关线性最小二乘问题的数值方法. 全书共分五章，各章要点如下：

第 1 章是预备知识，主要介绍有限维向量空间及定义在其上的线性算子的基本理论. 空间的直接和分解及由此确定的投影算子为讨论广义逆算子所必需. 最后介绍了线性算子的矩阵表示，从而阐明了线性算子和矩阵之间的关系.

第 2 章介绍了广义逆矩阵的算子理论，以空间分解为基

础，给出了广义逆算子的构造性定义并讨论了它们的特征性质．通过广义逆算子的矩阵表示，建立了广义逆矩阵的相应理论．

第 3 章的内容是广义逆矩阵的摄动理论，讨论了摄动对广义逆矩阵的影响，其目的是研究广义逆矩阵的连续性问题．本章证明了亏秩矩阵广义逆的不连续性可以用人为的方法加以消除，从而对广义逆矩阵的计算提供了必要的理论基础，最后还讨论了摄动对最小二乘问题的解的影响．

第 4 章的目的之一是阐明问题的奇异性和病态性这两个重要概念及其区别．另一目的是建立判断问题病态程度的理论和方法．为此，本章对向量系的线性相关性理论作了定量研究，在此基础上讨论了问题的病态程度和相关性指标的关系，并提出了估计病态程度的拟条件数概念以及切实可行的计算方法．

第 5 章的内容是计算广义逆矩阵和相应线性最小二乘问题的计算方法．其中包括 LU 分解，QR 和 QU 分解，QR–LL^T 分解，以及直交化方法和递推方法等．最后还介绍了解大型稀疏线性最小二乘问题的计算方法．

鉴于 Drazin 逆矩阵在奇异线性常微分方程组以及奇异线性差分方程组等方面有重要应用，在附录里介绍了 Drazin 逆的基本理论．

罗亮生同志帮助绘制全书附图，赵金熙同志代为誊写，特别是孙麟平同志阅读了全稿并提出了一些有益的建议，作者谨向他们表示衷心的感谢！

何旭初　1983 年 5 月于南京大学

符 号 说 明

$\mathscr{V}, \mathscr{W}, \mathscr{U}, \cdots$ 表示向量空间

$\mathscr{C}^n, \mathscr{C}^m$ 表示 n 维和 m 维酉空间

$\mathscr{R}^n, \mathscr{R}^m$ 表示 n 维和 m 维欧氏空间

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \cdots$ 表示线性算子

$A, B, P, Q, \cdots$ 表示矩阵

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \cdots$ 表示向量

$\mathscr{N}(\boldsymbol{A})$表示线性算子 $\boldsymbol{A}$ 的零空间

$\mathscr{R}(\boldsymbol{A})$表示线性算子 $\boldsymbol{A}$ 的像空间

$\mathscr{N}^{\perp}(\boldsymbol{A}), \mathscr{R}^{\perp}(\boldsymbol{A})$表示相应空间的直交补空间

$\dim \mathscr{V}$ 表示向量空间的维数

$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(A)$表示相应算子和矩阵的秩

$k(A)$表示 A 的谱条件数

目　录

第 1 章

线性空间和线性算子

§1 线性向量空间

1-1 线性向量空间的定义

设 $\mathscr{V}$ 为某一集合，其元素 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, … 等叫做向量. 在 $\mathscr{V}$ 的元素之间，定义有加法运算，记作"+". 这种加法运算具有下列性质:

1) $\mathscr{V}$ 中的任意两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 都可以相加，其和仍为 $\mathscr{V}$ 中的一个向量 $\boldsymbol{z}$，记作

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z},$$

这就是说，集合 $\mathscr{V}$ 对加法运算是封闭的;

2) 加法运算服从交换律和结合律，即对 $\mathscr{V}$ 中任意的向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$，恒有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}, \text{ 交换律,}$$

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}), \quad \text{结合律;}$$

3) $\mathscr{V}$ 中有唯一的元素 $\mathbf{0}$，称为零元素或零向量，它具有性质: 对任意的向量 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{V}$ (即 $\boldsymbol{x}$ 属于 $\mathscr{V}$),

$$\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x};$$

4) 对任意的向量 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{V}$，总存在一个向量 $\boldsymbol{y}$，它具有性质:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0},$$

我们称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的逆元素，记作 $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{x}$.

其次，我们设 K 是一个给定的数域，例如复数域或实数域(分别记作 $\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{R}$)，其中的数记作 α, β, γ, …. K 中的

数 α 和 $\mathscr{V}$ 中的向量 $\boldsymbol{x}$ 之间定义有乘法，记作 $\alpha\boldsymbol{x}$，它也是 $\mathscr{V}$ 中的一个向量．这种运算满足下列规律：

对任意的数 $\alpha, \beta \in K$，和任意的向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$，恒有：

5) $\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}$，　结合律；

6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$，　对于数的分配律；

7) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$，　对于向量的分配律；

8) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$．

定义 1　具有上述性质 1)～8) 的集合 $\mathscr{V}$，称为域 K 上的**线性向量空间**，或简称之为**向量空间**．

例 1　关于变元 t 的一切不高于 $n-1$ 次的实系数(或复系数)多项式

$$p_n(t)=a_0t^{n-1}+a_1t^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$$

所组成的集合，按通常的意义进行多项式和数的乘法以及多项式的加法运算，则此集合便是一个实(或复)数域上的向量空间，记作 $\mathscr{P}_n$．

例 2　一切 n 元有序的实(或复)数组

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

所组成的集合 $\mathscr{R}^n$，若规定相应的"加法"和"乘法"运算为：

$$(x_1,\ \cdots,\ x_n)+(y_1,\ \cdots,\ y_n)=(x_1+y_1,\ \cdots,\ x_n+y_n),$$

$$\alpha(x_1,\ \cdots,\ x_n)=(\alpha x_1,\ \cdots,\ \alpha x_n),$$

这种集合便构成实(或复)数域上的向量空间，常记作 $\mathscr{R}^n$(或 $\mathscr{C}^n$)．

例 3　一切收敛的实(或复)数序列 $\{x_i\}$，按通常的意义规定"加法"和"乘法"运算，所组成的集合也是相应数域上的向量空间．对于这种情形，应补充规定：若 $\lim x_i=\lim y_i$，则规定二序列 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 为相等．

1-2　向量系的线性相关性

设 $\mathscr{V}$ 是定义在数域 K 上的向量空间，$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 为其中某 n 个元素．我们有

定义 2 若存在不全为零的数 $\alpha_i \in K$, $i=1, \cdots, n$, 使等式

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}$$

成立，便称向量系 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 为**线性相关**，否则的话，便称之为线性独立或**线性无关**．

应当指出，对任意的向量 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$，恒有

$$0\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

因为我们总有

$$1\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x} = (1+0)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

今将有关线性相关向量系的一些简单事实列举于下：

1° 若向量系 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 中有一个为零向量，则此向量系必为线性相关，反之则不然．

2° 若向量系中有一个向量，例如设其为 $\boldsymbol{x}_n$，可以表示成其余向量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ 的线性组合，即

$$\boldsymbol{x}_n = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \boldsymbol{x}_{n-1},$$

则向量系必为线性相关，因为显然有

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \boldsymbol{x}_{n-1} + \alpha_n \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0},$$

其中 $\alpha_n = -1 \neq 0$.

3° 若 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 为线性相关，则其中至少有一个向量可以表示成其余向量的线性组合．

4° 若向量系 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 的某一个子集，例如，可设其为 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$，$r<n$，为线性相关，则原向量系也必为线性相关．

1-3 向量空间的基底和维数

为了给出向量空间的表示，我们先引进空间基底这个重要概念．

定义 3 设 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 为向量空间（K 域上的）$\mathscr{V}$ 中的一个线性独立系，如果空间中的任何向量 $\boldsymbol{x}$ 都可以表示成 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 的线性组合，即，存在数 $\alpha_i \in K$，$i=1, \cdots, n$，使

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n, \tag{1}$$

则称向量系 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 构成空间 $\mathscr{V}$ 的一个**基底**.

定理 1 设 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 构成空间 $\mathscr{V}$ 的一个基底，则表达式(1)是唯一的.

证明 设 $\boldsymbol{x}$ 有另一个表达式

$$\boldsymbol{x} = \beta_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \beta_n\boldsymbol{x}_n, \tag{2}$$

(1)与(2)相减得

$$(\alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0},$$

因为向量系 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 为线性独立，所以必有

$$\alpha_i - \beta_i = 0, \ i=1, \cdots, n,$$

即 $\alpha_i = \beta_i$，$i=1, \cdots, n$，这就证明了表达式(1)的唯一性. 证毕.

进一步我们还有

定理 2 设向量系 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m\}$ 都是向量空间 $\mathscr{V}$ 的基底，其中 n 和 m 是两个自然数，则必有 $m=n$.

证明 假定 $m>n$. 因为 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的一个基底，所以每一个 $\boldsymbol{y}_i$，$i=1, \cdots, m$ 都可以表示成它们的线性组合：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= a_{11}\boldsymbol{x}_1 + a_{21}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{x}_n, \\
\boldsymbol{y}_2 &= a_{12}\boldsymbol{x}_1 + a_{22}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{x}_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{y}_m &= a_{1m}\boldsymbol{x}_1 + a_{2m}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_{nm}\boldsymbol{x}_n.
\end{aligned} \tag{3}$$

今证明必存在不全为零的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 使

$$\alpha_1\boldsymbol{y}_1 + \alpha_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{y}_m = \boldsymbol{0}. \tag{4}$$

为此，我们把 $\boldsymbol{y}_i$ 的表达式(3)代入(4)便得到：

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1m}\alpha_m)\boldsymbol{x}_1\\
&+(a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2m}\alpha_m)\boldsymbol{x}_2\\
&+\cdots+(a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\cdots+a_{nm}\alpha_m)\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

令 $\boldsymbol{x}_i(i=1,\ \cdots,\ n)$的系数为零，便得到齐次线性方程组

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1m}\alpha_m=0,\\
&a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2m}\alpha_m=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\cdots+a_{nm}\alpha_m=0.
\end{aligned}
$$

这是一个亚定方程组，即方程个数少于未知量 α_1、$\cdots$、α_m 的个数，所以必有非零解．这就是说，存在有不全为零的数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 使(4)成立，从而可知，$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_m$ 必为线性相关，因此必有

$$m\leqslant n.$$

交换 $\boldsymbol{x}_i$ 和 $\boldsymbol{y}_j$，可证 $n\leqslant m$，于是必有

$$m=n.$$

证毕．

向量空间的基底不是唯一的，但是，任何基底中的向量个数则必相等．于是我们有

定义 4 向量空间 $\mathscr{V}$ 若存在有限基底 $\{\boldsymbol{x}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n\}$，则规定空间 $\mathscr{V}$ 的维数为 n，记作

$$\dim\mathscr{V}=n.$$

若不存在有限基底，则称相应空间的维数为无穷．

例如，在多项式空间 $\mathscr{P}_n$ 中，$1,\ t,\ \cdots,\ t^{n-1}$ 便构成一个基底，所以

$$\dim\mathscr{P}_n=n.$$

又如，$(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，$\cdots$，$(0,\ \cdots,\ 1)$为 n 个 n 元数组，它们构成 $\mathscr{R}^n$(或 $\mathscr{C}^n$)的一个基底，所以

$$\dim\mathscr{R}^n=n.$$

又例如，前面所讲的收敛数列空间则是无穷维的．

本书只考虑有限维的情形．

1-4 向量空间的表示

我们首先考虑空间 $\mathscr{V}$ 的基底存在性问题. 设 $\boldsymbol{x}_1$ 是 $\mathscr{V}$ 中的一个非零向量,若 $\mathscr{V}$ 中的任何向量 $\boldsymbol{x}$ 都可以表示成

$$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}_1$$

的形式,则 $\boldsymbol{x}_1$ 便是 $\mathscr{V}$ 的一个基底,这时

$$\dim\mathscr{V}=1.$$

不然的话,即存在非零向量 $\boldsymbol{x}_2$,它不能表示成上述形式. 但是,如果 $\mathscr{V}$ 中的任何向量 $\boldsymbol{x}$ 都可以表示成 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的线性组合,即

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2,$$

则 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ 便构成 $\mathscr{V}$ 的一个基底,这时空间的维数为 2. 否则的话,必存在非零向量 $\boldsymbol{x}_3$,它不能表示成上述形式,如此等等. 最后必有下列两种情形之一发生:

1) 存在有限个向量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$,它们构成 $\mathscr{V}$ 的一个基底,这时 $$\dim\mathscr{V}=n;$$

2) 不存在有限基底,这时空间 $\mathscr{V}$ 是无限维的.

现在我们假定

$$\dim\mathscr{V}=n,$$

n 是一个自然数,这时存在基底

$$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n.$$

设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\mathscr{V}$ 中的任一向量,则它必可唯一地表示成 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 的线性组合,即存在唯一的一组数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$,使

$$\boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{x}_1+\xi_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\xi_n\boldsymbol{x}_n. \tag{5}$$

这时我们便称 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 在基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 下的表示,并称 ξ_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量或第 i 个坐标.

这就是说,在引进了空间基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 以后,我们便

可以把空间中的向量表示成 n 元数组. 这也就是说，我们用 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 作为基底，在向量空间 $\mathscr{V}$ 中建立了一个坐标系. 这样，我们便把 n 维向量空间 $\mathscr{V}$ 用一个 n 元数组空间 $\mathscr{R}^n$(或 $\mathscr{C}^n$)表示出来.

应当注意，同一个向量，对于空间中不同的基底，它的坐标也不一样.

在基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 下，我们也称 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的坐标向量，也可以称 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 为这个坐标系的坐标轴. 向量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 自身，在这个坐标系中的表示为:

$$\boldsymbol{x}_1=(1, 0, \cdots, 0), \quad \boldsymbol{x}_2=(0, 1, 0, \cdots, 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \boldsymbol{x}_n=(0, 0, \cdots, 1).$$

所以也可以称右端为空间 $\mathscr{V}$ 的单位坐标向量.

1-5　空间的同构

根据上面的讨论可以看出，n 维向量空间 $\mathscr{V}$，在建立了坐标系后便和同一数域 K 上的 n 元数组空间 K^n 之间建立了一种对应关系. 这种对应关系不但是一对一的，而且还保持关于向量运算的线性性质，即若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\mathscr{V}$ 分别和 K 域上的 n 元数组 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 对应:

$$\boldsymbol{x}\leftrightarrow(\xi_1, \cdots, \xi_n),$$
$$\boldsymbol{y}\leftrightarrow(\eta_1, \cdots, \eta_n),$$

对于 $\alpha, \beta\in K$，恒有

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}&\leftrightarrow(\alpha\xi_1+\beta\eta_1, \cdots, \alpha\xi_n+\beta\eta_n)\\&=\alpha(\xi_1, \cdots, \xi_n)+\beta(\eta_1, \cdots, \eta_n).\end{aligned} \tag{6}$$

我们称这种关系为向量空间 $\mathscr{V}$ 和同一数域 K 上的 n 元数组空间 K^n 之间的同构关系. 在一般情形，我们有

定义 5　设 $\mathscr{V}_1$ 和 $\mathscr{V}_2$ 为同一数域 K 上的向量空间，若存在双向单值映射 T，即，对任何 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{V}_1$，对应有唯一的 $\boldsymbol{y}=$

$T\boldsymbol{x}\in\mathscr{V}_2$,并且,若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\mathscr{V}_1$, $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$,则

$$\boldsymbol{y}_1=T\boldsymbol{x}_1\neq T\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}_2,$$

并且,这种映射还保持空间向量运算的线性性质,即,对任意的 $\alpha, \beta\in K$,恒有

$$T(\alpha\boldsymbol{x}_1+\beta\boldsymbol{x}_2)=\alpha T\boldsymbol{x}_1+\beta T\boldsymbol{x}_2,$$

则称向量空间 $\mathscr{V}_1$ 和 $\mathscr{V}_2$ 为同构.

很明显,这种同构关系具有传递性,就是说,若 $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$, $\mathscr{V}_3$ 为同一数域 K 上的向量空间,且已知 $\mathscr{V}_1$ 和 $\mathscr{V}_2$ 同构,$\mathscr{V}_2$ 和 $\mathscr{V}_3$ 同构,则 $\mathscr{V}_1$ 必和 $\mathscr{V}_3$ 同构. 而且还不难证明,若 $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ 同构,且 $\dim\mathscr{V}_1=n$,则必有

$$\dim\mathscr{V}_2=n,$$

即,同构的向量空间有相同的维数.

§2 子空间和空间的分解

2-1 子空间

设 $\mathscr{V}$ 是数域 K 上的有限维向量空间,S 是 $\mathscr{V}$ 的一个非空子集,它对向量运算具有封闭性,即,若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in S$, $\alpha, \beta\in K$,则

$$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in S.$$

这一类型的子集具有十分重要的性质.

定义 6 具有上述特征的子集 S,称为向量空间 $\mathscr{V}$ 的一个子空间.

例如,设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\in\mathscr{V}$,它们的一切线性组合

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{x}_k$$

所构成的一个集合 S,便是一个子空间. 如果向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ 为线性独立,则此子空间的维数为 k,

$$\dim S=k.$$