高等代数附册

习题答案与提示

北京大学数学力学系
几何与代数教研室代数小组编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

高等代数附册
习题答案与提示

北京大学数学力学系
几何与代数教研室代数小组编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书是北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组所编《高等代数》一书的附册．内容为习题、答案与提示．第一部分把原书的习题集中起来了，第二部分是各章习题的答案或提示．

本书可供数学系师生在教学中参考．

高等学校教学参考书

高等代数附册

习题答案与提示

北京大学数学力学系

几何与代数教研室代数小组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 3.5 字数 84,000

1979 年 3 月第 1 版 1979 年 7 月第 1 次印刷

印数 00,001—150,000

书号 13012·0344 定价 0.28 元

前　言

应广大读者的要求，我们对我校编的《高等代数》一书中的习题和补充题作了答案和提示．计算题只给答案，有少数计算题因答案不是唯一的，就不给答案．对一部分证明题，特别是补充题给了提示．作提示的目的是启发思考、提供解题的方法和线索．但是解题的思路和方法是多种多样的，不要因为提示而束缚了思想．我们赞成刻苦钻研，独立思考，方法不拘一格，这样才能起到对内容加深理解和灵活运用的作用．

北京大学数学力学系
几何与代数教研室代数小组
1979.2.

目　　录

第一部分　习题

第二部分　答案与提示

第一部分　习　题

第一章　多　项　式

习　题

1. 用 $g(x)$除 $f(x)$, 求商 $q(x)$与余式 $r(x)$:

   1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1, g(x)=3x^2-2x+1$

   2) $f(x)=x^4-2x+5, g(x)=x^2-x+2$

2. m, p, q 适合什么条件时, 有

   1) $x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$

   2) $x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$

3. 用综合除法求商 $q(x)$与余式 $r(x)$:

   1) $f(x)=2x^5-5x^3-8x \quad g(x)=x+3$

   2) $f(x)=x^3-x^2-x \quad g(x)=x-1+2i$

4. 用综合除法把 $f(x)$表成 $x-x_0$ 的方幂和, 即表成

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$$

的形式:

   1) $f(x)=x^5, x_0=1$

   2) $f(x)=x^4-2x^2+3,\ x_0=-2$

   3) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i,\ x_0=-i$

5. 求 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式:

   1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1,\ g(x)=x^3+x^2-x-1$

   2) $f(x)=x^4-4x^3+1,\ g(x)=x^3-3x^2+1$

   3) $f(x)=x^4-10x^2+1,$

   $g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$

6. 求 $u(x), v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x), g(x))$:

1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2, g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$

2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9, g(x)=2x^3-x^2-5x+4$

3) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $g(x)=x^2-x-1$

7. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$, $g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式是一个二次多项式，求 t, u 的值.

8. 证明：如果 $d(x)|f(x)$, $d(x)|g(x)$, 且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

9. 证明：$(f(x)h(x), g(x)h(x))=(f(x), g(x))h(x)$, ($h(x)$ 的首项系数为 1).

10. 如果 $f(x), g(x)$ 不全为零，证明：

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right)=1$$

11. 证明：如果 $f(x), g(x)$ 不全为零，且

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x), g(x))$$

那么 $(u(x), v(x))=1$.

12. 证明：如果 $(f(x), g(x))=1$, $(f(x), h(x))=1$, 那么

$$(f(x), g(x)h(x))=1$$

13. 设 $f_1(x), \cdots, f_m(x), g_1(x), \cdots, g_n(x)$ 都是多项式，而且

$$(f_i(x), g_j(x))=1, (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$$

求证：$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x), g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$.

14. 证明：如果 $(f(x), g(x))=1$, 那么 $(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$.

15. 求多项式 x^n-1 在复数范围内和在实数范围内的因式分解.

16. 求下列多项式的公共根：

$f(x)=x^3+2x^2+2x+1$; $g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$

17. 判别下列多项式有无重因式:

1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

2) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$

18. 求 t 值使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

19. 求多项式 x^3+px+q 有重根的条件.

20. 如果 $(x-1)^2 \mid Ax^4+Bx^2+1$, 求 A, B.

21. 证明: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$不能有重根.

22. 如果 a 是 $f'''(x)$的一个 k 重根, 证明 a 是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

的一个 $k+3$ 重根.

23. 证明: x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$, 而 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$.

24. 举例说明断语“如果 α 是 $f'(x)$ 的 m 重根, 那么 α 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根”是不对的.

25. 证明: 如果 $(x-1)\mid f(x^n)$, 那么 $(x^n-1)\mid f(x^n)$.

26. 证明: 如果 $(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$, 那么

$$(x-1)\mid f_1(x),\ (x-1)\mid f_2(x)$$

27. 求下列多项式的有理根:

1) $x^3-6x^2+15x-14$

2) $4x^4-7x^2-5x-1$

3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$

28. 下列多项式在有理数域上是否可约?

1) x^2+1

2) $x^4-8x^3+12x^2+2$

3) x^6+x^3+1

4) x^p+px+1，p 为奇素数

5) $x^4+4kx+1$，k 为整数

29. 用初等对称多项式表出下列对称多项式：

1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$

2) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$

3) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$

4) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_4^2+x_2^2x_4^2$

5) $(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_3x_1+x_2)$

6) $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$

30. 用初等对称多项式表出下列 n 元对称多项式：

1) Σx_1^4

2) $\Sigma x_1^2x_2x_3$

3) $\Sigma x_1^2x_2^2$

4) $\Sigma x_1^2x_2^2x_3x_4$

($\Sigma ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 表示所有由 $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 经过对换得到的项的和.)

31. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程 $5x^3-6x^2+7x-8=0$ 的三个根，计算

$$(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2)$$

32. 证明：三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个根成等差数列的充分必要条件为

$$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$$

补 充 题

1. 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，并且 $ad-bc\neq0$，证明：$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x))$.

2. 证明：只要 $\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$，$\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大于零，就可以适当选择适合等式

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

的 $u(x)$ 与 $v(x)$，使

$$\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)$$

$$\partial(v(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)$$

3. 证明：如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，那么 $f(x^m)$ 与 $g(x^m)$ $(m\geqslant 1)$ 也互素.

4. 证明：如果 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x)$ 的最大公因式存在，那么 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x),f_s(x)$ 的最大公因式也存在，且

$$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x),\ f_s(x))$$
$$=((f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x))$$

再利用上式证明，存在多项式 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_s(x)$ 使

$$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)$$
$$=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))$$

5. 多项式 $m(x)$ 称为多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的一个**最小公倍式**，如果 1) $f(x)\mid m(x)$，$g(x)\mid m(x)$，2) $f(x)$，$g(x)$ 的任一个公倍式都是 $m(x)$ 的倍式. 我们以 $[f(x),\ g(x)]$ 表示首项系数是 1 的那个最小公倍式. 证明：如果 $f(x)$，$g(x)$ 不全为零并设 $f(x)$，$g(x)$ 的首项系数都是 1，那么

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$$

6. 证明定理 5 的逆，即：设 $p(x)$ 是次数大于零的多项式，如果对于任何两个多项式 $f(x)$，$g(x)$，由 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 可以推出 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$，那么 $p(x)$ 是不可约多项式.

7. 证明：次数 >0 的多项式 $f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件是，对任意的多项式 $g(x)$ 必有 $(f(x),g(x))=1$，或者对某一正整数 m，$f(x)\mid g^m(x)$.

8. 证明：次数>0的多项式$f(x)$是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是，对任意多项式$g(x),h(x)$，由$f(x)|g(x)h(x)$可以推出$f(x)|g(x)$，或者对某一正整数m，$f(x)|h^m(x)$.

9. 证明：$x^n+ax^{n-m}+b$不能有不为零的重数大于2的根.

10. 证明：如果$f(x)|f(x^n)$，那么$f(x)$的根只能是零或单位根.

11. 如果$f'(x)|f(x)$，证明：$f(x)$有n重根，其中$n=\partial(f(x))$.

12. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是n个不同的数，而

$$F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

证明：

1) $\sum_{i=1}^{n}\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}=1$

2) 任意多项式$f(x)$用$F(x)$除所得的余式为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$$

13. $a_1,a_2,\cdots,a_n$与$F(x)$同上题，$b_1,b_2,\cdots,b_n$是任意n个数，显然次数$<n$的多项式

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iF(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$$

适合条件

$$L(a_i)=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

这称为**拉格朗日**(Lagrange)**插值公式**.

利用上面的公式求：

1) 一个次数<4的多项式$f(x)$，它适合条件：$f(2)=3$，$f(3)=-1,f(4)=0,f(5)=2$;

2) 一个二次多项式$f(x)$，它在$x=0,\frac{\pi}{2},\pi$处与函数$\sin x$

有相同的值;

3) 一个次数尽可能低的多项式$f(x)$，使得$f(0)=1$，$f(1)=2, f(2)=5, f(3)=10$.

14. 设$f(x)$是一个整系数多项式，试证：如果$f(0)$与$f(1)$都是奇数，那么$f(x)$不能有整数根.

15. 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是方程$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$的根，证明：$x_2, \cdots, x_n$的对称多项式可以表成$x_1$与$a_1, a_2, \cdots, a_n$的多项式.

16. $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$. 令$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k (k=0,1,2,\cdots)$.

1) 证明：

$$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x)$$

其中$g(x)$的次数$<n$.

2) 由上式证明**牛顿**(Newton)**公式**:

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0,$$

对于$1\leqslant k\leqslant n$

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0, \text{对于 } k>n$$

17. 根据牛顿公式用初等对称多项式表示s_2, s_3, s_4, s_5, s_6.

18. 证明：如果对于某一个6次方程有$s_1=s_3=0$，那么

$$\frac{s_7}{7}=\frac{s_5}{5}\cdot\frac{s_2}{2}$$

19. 求一个n次方程使

$$s_1=s_2=\cdots=s_{n-1}=0$$

20. 求一个n次方程使

$$s_2=s_3=\cdots=s_n=0$$

第二章　行　列　式

习　题

1. 决定以下 9 级排列的逆序数，从而决定它们的奇偶性：

1) 134782695；　　2) 217986354；

3) 987654321.

2. 选择 i 与 k 使

1) $1274i56k9$ 成偶排列；

2) $1i25k4897$ 成奇排列.

3. 写出把排列 12435 变成排列 25341 的那些对换.

4. 决定排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，并讨论它的奇偶性.

5. 如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 I，排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

6. 在 6 级行列式中，$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$；$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 这两项应带有什么符号？

7. 写出 4 级行列式中所有带有负号并且包含因子 a_{23} 的项.

8. 按定义计算行列式：

1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$　2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$

9. 由行列式定义证明:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

10. 由行列式定义计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数,并说明理由.

11. 由

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明: 奇偶排列各半.

12. 设

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

,其中 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 是互不相同的数.

1) 由行列式定义,说明 $P(x)$ 是一 $(n-1)$ 次多项式;

2) 由行列式性质,求 $P(x)$ 的根.

13. 计算下面的行列式:

1) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

14. 证明

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

15. 算出行列式

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

的全部代数余子式.

16. 计算下面的行列式:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

17. 计算下列 n 级行列式:

1) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$