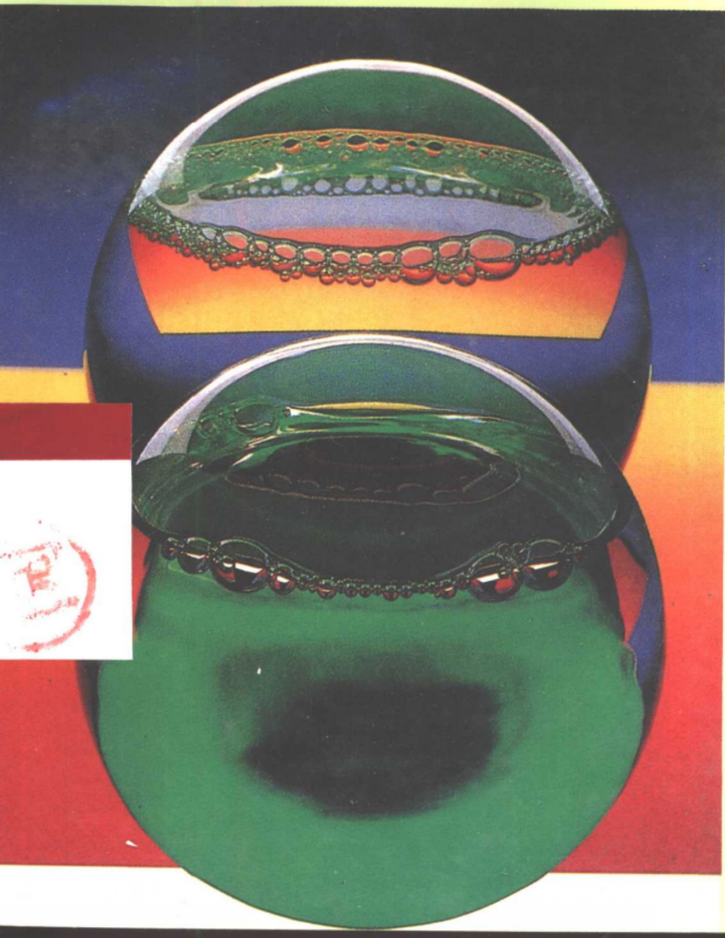
极小曲面

MINIMAL SURFACES

走向数学丛书

陈维桓　著



走向数学丛书

极小曲面

陈维桓 著

湖南教育出版社

极 小 曲 面

Minimal Surfaces

陈维桓 著

Chen Weihuan

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

787×1092 毫米　32 开　印张：5　字数：110,000

1993 年 12 月第 1 版　1998 年 4 月第 2 次印刷

ISBN 7—5355—1677—7/G · 1672

定价：9.80 元

"走向数学"丛書

陳省身題

作 者 简 介

陈维桓，男，汉族，1940年生，上海市人，北京大学数学系教授。1964年在北京大学数学力学系毕业后，在吴光磊教授指导下读研究生。1978年重返北京大学数学系继续研究生学习，获硕士学位。1980年起在北京大学数学系任教。

专业是数学，专长为微分几何。多年从事微分几何的教学和研究工作，发表研究论文近20篇，并且编著、翻译出版著作多本，其中作为作者之一，为陈省身教授在北京大学讲学而整理出版的《微分几何讲义》，获1987年国家优秀教材特等奖。已培养硕士研究生多名。

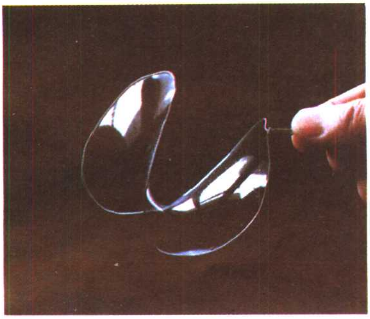


图1.1（第2页）

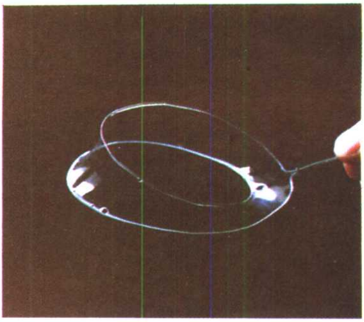


图1.2（第4页）

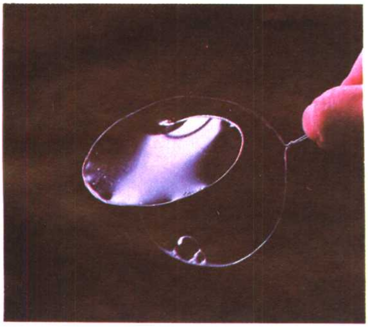


图1.3（第5页）

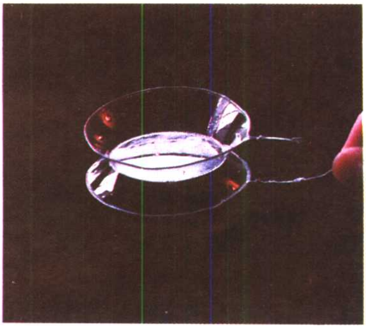


图1.4（第6页）

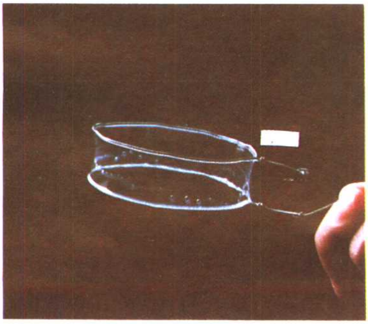


图1.5（第6页）

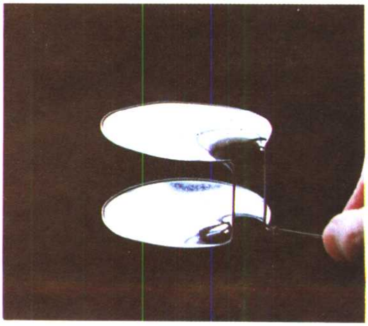


图1.6（第7页）

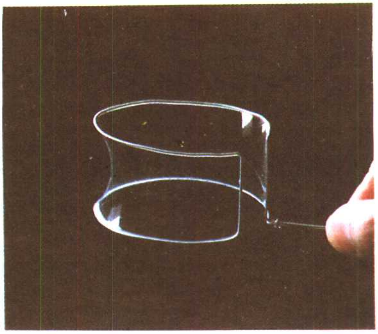


图1.7 （第7页）

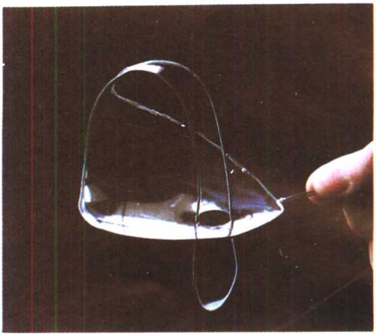


图1.9 （第8页）

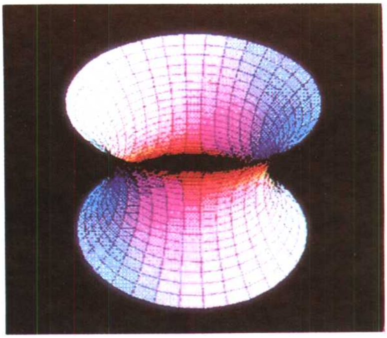


图2.3 （第18页，第74页）

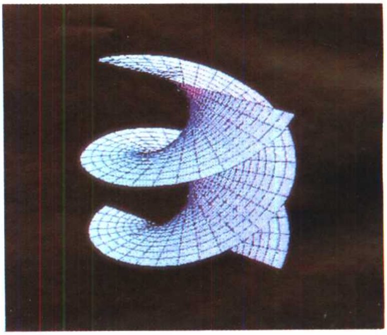


图2.4 （第18页，第75页）

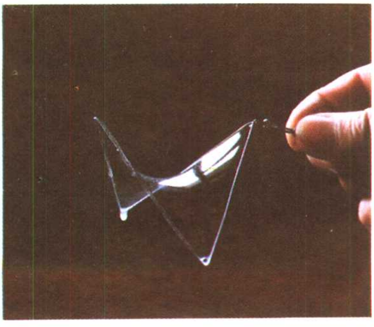


图8.3 （第97页）

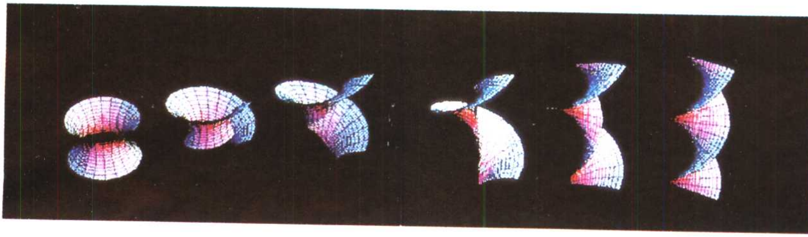


图7.1 （第77页）

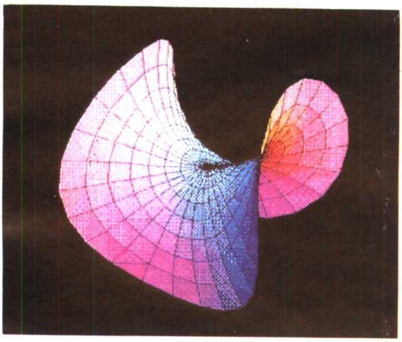


图7.2 （第78页）

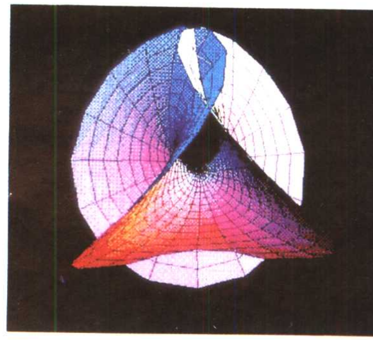


图7.3 （第79页）

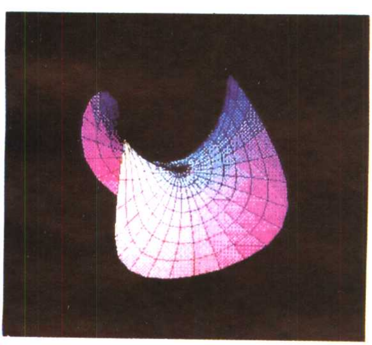


图7.4 （第83页）

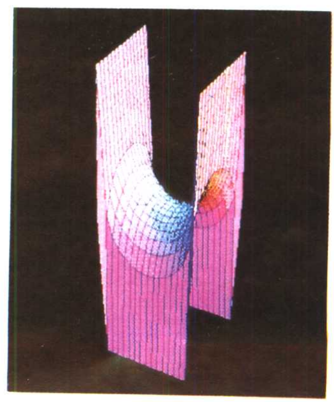


图7.5 （第85页）

前　言

王　元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学。一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三、四年有数学课。可见数学之重要与其应用之广泛。

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏，我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的。近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握。我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质。显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到。若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解。这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书，其中每本小册子尽量

用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面，使工程技术人员，非数学专业的大学生，甚至具有中学数学水平的人，亦能懂得书中全部或部分含义与内容。这对提高我国人民的数学修养与水平，可能会起些作用。显然要将一门数学深入浅出地讲出来，决非易事。首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解。从整体上说，我国的数学水平还不高，能否较好地完成这一任务还难说。但我了解很多数学家的积极性很高，他们愿意为“走向数学”撰稿。这很值得高兴与欢迎。

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持，得以出版这套“走向数学”丛书，谨致以感谢。

作者前记

自从 Euler 研究面积最小的旋转面以及 Lagrange 首次导出极小曲面方程以来，极小曲面论题已经历了二百多年的发展，然而它的诱人的魅力仍没有减退，反而更加光彩夺目地吸引着众多数学家的注意。在它的发展过程中，不断地提出富有挑战性的问题，例如以给定曲线为边界的极小曲面的存在性（Plateau 问题）、多解性；极小曲面方程的通解（Weierstrass 公式）及其应用；极小曲面的稳定性；完备嵌入极小曲面的新例子、拓扑结构和性质；极小曲面概念在高维情形及一般的外围空间中的推广等等。这些问题的提出和解决，不断地深化极小曲面的理论，极大地丰富了微分几何的内容，而且促进了相关学科（如变分法，临界点理论，偏微分方程边值问题，复分析，几何测度论，拓扑学等等）的发展。极小曲面理论还与计算机技术结成了不解之缘，推动了计算机图形系统的发展及其在纯粹数学研究中的应用。当然，目前微分几何研究的兴趣不是只集中在极小“曲面”身上，而且还关注极小子流形以及作为极小曲面概念推广的常平均曲率曲面等其它的子流形理论，但是极小曲面本身始终是研究的热点。

本书的目的是介绍 3 维欧氏空间中极小曲面的概念、典型

例子和性质，以及一些基本问题和进展。我们假定具备初等微积分的知识的读者，能够读懂本书的大部分，因此我们对曲面的微分几何知识作了简要的介绍，对所引用的定理大多作了准确的叙述。为了便于读者能够进一步钻研感兴趣的课题，在书后列出了有关的参考文献。我们力求使本书的叙述明白易懂，生动流畅，并注意科学性。但是由于作者本人水平的限制，这些目标不一定能够完美地达到，甚至还可能存在缺陷和错误，恳请广大读者不吝指正。

作者十分感谢丁石孙教授和李忠教授极力向这套“走向数学”丛书推荐“极小曲面”的选题，同时感谢国家自然科学基金会及“走向数学”丛书主编冯克勤教授的支持，将本书列入丛书。在本书写作过程中还得到姜伯驹教授和张恭庆教授的鼓励和帮助，作者也在此表示衷心地感谢。另外，本书的部分图形是利用北京大学计算机辅助教学中心的设备绘制的，作者对他们的支持表示感谢。最后作者感谢湖南教育出版社孟实华同志为本书问世付出的辛勤劳动。

陈维桓

一九九二年一月于北大

目录

一　肥皂膜实验

如果你把一根铜丝弯成一条封闭的空间曲线（留出一个把手），将这个框架浸入配制好的肥皂液，然后将它轻轻地提取出来，那么肥皂液就会在铜丝框架上张成一个处于平衡状态的绚丽多彩的薄膜. 这个薄膜所成的曲面有哪些性质？它是什么样的曲面？这是一些令人神往的问题. 我们知道，在数学的发展史中有许多生动的例子说明，物理实验经常为数学模型的形成及数学理论的完善和发展提供极有价值的启示和刺激. 前面所提到的实验由 19 世纪的比利时物理学家 J. Plateau 作了仔细的观察和详细的描述（参看他的著作［19］）.

如果我们忽略不计肥皂液本身的重量，也不考虑除了肥皂膜表面张力以外的其它干扰因素（例如外界的风力等等），则薄膜的势能在表面张力作用下便会达到最小值，从而必定使肥皂膜采取的曲面形状具有最小的面积. Plateau 通过肥皂膜的有趣实验，确定了肥皂膜曲面和肥皂泡曲面的许多几何性质. 他在书［19］中详细地记载了他的实验观察和测量结果. 因此，Plateau 至少是用实验的手段产生了以非常一般的任意空间闭

曲线为边界的面积最小的曲面（参看彩页图 1.1）.

如果你想重演 Plateau 的实验，则著名数学家 R. Courant 曾经提供过一个这种粘稠液体的理想的配方：将 10 克干燥的纯油酸钠溶解于 500 克蒸馏水中，然后将这种溶液与甘油按 15 : 11 混和搅匀. 选取软硬适度的铜丝作框架. 那么这样得到的薄膜将是相当稳定的，而且能够维持比较长的时间足以演示和观察所成的曲面的形状. 你不妨亲自动手做一做这种实验，也许会有新的心得和体会. 当然，框架的尺寸不能太大，大致上以直径不超过 10 厘米为好. 框架的尺寸越小，所形成的肥皂膜的稳定性就越高.

现在，通常把寻求以给定的空间闭曲线 C 为边界的面积最小的曲面的问题称为 Plateau 问题. 当然，要在数学上把这个问题讲清楚绝非易事. 以后我们会介绍 Plateau 问题在数学上的正确提法（参看第九节）. 上面的问题命名为 Plateau 问题，是因为 Plateau 系统地对于这个问题作了实验研究和观察. 但是早在 18 世纪，Euler 就提出过这类问题. Euler 在 1744 年发表的《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书中举了一个例子，要求决定出介于点 (x_0, y_0) 和点 (x_1, y_1) 之间的平面曲线 $y = f(x)$，使得它在绕 x 轴旋转时所生成的曲面的面积最小. Euler 证明了函数 $f(x)$ 必须是一段悬链线，生成的旋转面叫做悬链面. Euler 所得到的实际上就是以位于两个平行的平面上、且连心线与平面垂直的两个圆周为边界的面积“最小”的曲面.

尽管如此，一般都认为这类曲面的研究是 J. L. Lagrange 在 1760 年开始的，因为他第一次给出了这类曲面应该满足的偏微分方程. 他所考虑的是三维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中由函数 $z = f(x, y)$ 给出的图象 M，其中点 (x, y) 的变化范围是 xy 平面上的一

个区域 D. Lagrange 利用他所创立的变分法原理证明了：如果在所有定义在区域 D 上、并且在边界 ∂D 上取值相同的函数的图象中 M 的面积最小，则函数 $z=f(x, y)$ 必须满足偏微分方程

$$(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}=0 \quad (1.1)$$

这就是著名的所谓极小曲面方程.

在 1776 年，几何学家 J. B. Meusnier 证明了函数 $z=f(x,y)$ 的图象 M 的平均曲率是（参看第四节）

$$H=\frac{1}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}}\{(1+f_y^2)f_{xx}-2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}\}. \quad (1.2)$$

因此，Meusnier 给出了 Lagrange 的方程的几何解释：满足偏微分方程 (1.1) 的曲面就是其平均曲率为零的曲面. 此外，他还指出悬链面和正螺旋面是满足极小曲面方程 (1.1) 的两个非线性函数的图象. 现在，我们把 $\boldsymbol{R}^3$ 中平均曲率为零的曲面称为极小曲面.

从 1855 年到 1890 年间是极小曲面研究的第一个黄金时期. 在这个时期，Weierstrass 和 Enneper 给出了极小曲面方程的通解表达式，Bonnet 发现了极小曲面的 Gauss 映射的共形性质. 这些研究成果把极小曲面理论与复变函数理论挂上钩，为极小曲面的研究开辟了一条新的途径. Plateau 的实验也正是在这个阶段进行的. Plateau 通过实验给出了许多有已知边界的极小曲面，同时也向数学家提出了严重的挑战：从数学上证明以给定封闭空间曲线为边界的面积最小的曲面的存在性. 虽然在这个阶段，H. A. Schwarz 和 B. Riemann 曾经研究过以折线多边形为边界的面积最小的曲面的存在性，但是要在数学上说清楚 Plateau 问题，并且给以数学上令人满意的解答，则是本世纪