贾士代　翟连林　主编

数学题

创新解法

高中版

北京教育出版社

数学题创新解法

高中版

主编　贾士代　翟连林

编委　岳明义　梁瑞兴　林福堂

　　　翟　华　邱艳茹　申学华

执笔　贾玲娟　杨景巨　张子莲

　　　赵素娟　苗荣青　任　净

　　　詹红庆　王志强　马十成

　　　韩景志　杨志刚　翟　英

北京教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学题创新解法．高中版/贾士代，翟连林主编．
北京：北京教育出版社，2000
ISBN 7-5303-2117-X

Ⅰ．数…　Ⅱ．①贾…②翟…　Ⅲ．数学课—高中—解
题　Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 26387 号

数学题创新解法（高中版）

SHUXUETI CHUANGXIN JIEFA（GAOZHONGBAN）

贾士代　翟连林　主编

*

北 京 教 育 出 版 社 出 版

（北京北三环中路 6 号）

邮政编码：100011

网 址：www. bph. com. cn

北京出版社出版集团总发行

新 华 书 店 经 销

北京冶金大业印刷有限公司印刷

*

850×1168 毫米　32 开本　17.75 印张　400000 字

2001 年 5 月第 1 版　2002 年 2 月第 2 次印刷

印数：8001—16000

ISBN 7-5303-2117-X

G·2092　定价：22.00 元

前　言

在实施素质教育的过程中，我们体会到，高素质的学生必须具有很强的创造思维能力．为了造就高水平的人才，教师必须注意引导学生对数学问题的解法进行创新．数学问题的“创新解法”具有思想新颖、奇特、独创、别具一格的特点，它能给学生以最好的刺激，使学生对数学产生浓厚的兴趣．为了推进素质教育，我们把多年在这方面的教学经验，精心编制成这套丛书，奉献于社会．

《新教学大纲》中指出，“能力是在知识的教学和技能的训练中，通过有意识地培养而得到发展的”．要使学生具有“创新解法”的能力，应使他们首先有扎实的数学基础，没有牢固的基础知识和对数学方法的掌握，是很难达到创新的．教师还要有意识地培养学生的发散思维能力，经常引导学生从不同的角度、沿不同的方向去观察问题、分析问题和寻找问题的不同解法．鼓励学生不因循守旧，敢于怀疑前人的结论，不满足于对问题的已有解法，大胆探索新思路、新解法．学生的思维扩散越广，发散量越大，新颖成分也越高，创新解法也越多．

这套丛书是对学生进行系统的“创新解法”教育的一次尝试，希望能起到抛砖引玉的作用．

编者

2001 年夏

目　　录

第一章　集合与函数

一、集　合

例 1　设集合　$P=\{x\mid x=3m+1,\ m\in N^{+}\}$，$S=\{y\mid y=5n+2,\ n\in N^{+}\}$，则 $P\cap S=$（　）.

（A）$\{z\mid z=15k-7,\ k\in N^{+}\}$；

（B）$\{z\mid z=15k-8,\ k\in N^{+}\}$；

（C）$\{z\mid z=15k+8,\ k\in N^{+}\}$；

（D）$\{z\mid z=15k+7,\ k\in N^{+}\}$.

【一般解法】

依题意，$P\cap S$ 中的元素应满足 $3m+1=5n+2$，即 $3m=5n+1$，因此，必须且只需 $5n+1$ 是 3 的倍数.

$\because$　n 是正整数，$\therefore$　n 可表示为 $3k-2$，$3k-1$，$3k$（$k\in N^{+}$）. 把它们分别代入 $5n+1$ 中，验算知，只有 $n=3k-2$ 时，$5n+1$ 是 3 的倍数. 故 $z=5(3k-2)+2=15k-8(k\in N^{+})$.

于是，应选（B）.

【创新解法】

当 $m=2$，$n=1$ 时，有 $7\in P\cap S$. 而 7 不是（A）、（C）、（D）中的元素，只是（B）中的元素，于是，（A）、（C）、（D）都不对，故应选（B）.

【评注】　本例中的创新解法属于特殊值法，它是在符合已知条件的诸情况中，选取恰当的特殊数字（或特殊的解析式、

特殊图形等)，利用所得结果排除不正确的选择支，最后剩下的一支便是正确的. 一般地说，特殊值法解选择题具有简捷、明快的特点.

例 2 已知集合 $A=\{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2}=m+1\}$，$B=\{(x,y)\mid(m^2-1)x+(m-1)y=15\}$，如果 $A\cap B=\varnothing$ ($\varnothing$表示空集)，求实数 m 的值集（即 m 的值的集合).

【一般解法】

依题意，$A\cap B=\varnothing$等价于方程组

$$\begin{cases}\frac{y-3}{x-2}=m+1, & ①\\(m^2-1)x+(m-1)y=15 & ②\end{cases}$$

无解.

由①，得 $y=(m+1)(x-2)+3 \quad (x\neq 2)$，代入②中，得

$(m^2-1)x+(m^2-1)(x-2)+3(m-1)=15$,

即 $2(m^2-1)x=2m^2-3m+16 \qquad (x\neq 2)$.

由此可得:

(1) 当 $x=2$ 时，有

$2(m^2-1)\times 2=2m^2-3m+16$,

解之，得 $m=-4$ 或 $m=\frac{5}{2}$.

于是，当 $m=-4$ 或 $m=\frac{5}{2}$时，方程组无解.

(2) 当$2(m^2-1)=0$ 且 $2m^2-3m+16\neq 0$,

即 $m=1$ 或 -1 时，方程组无解.

故由 (1)、(2) 知，当 $A\cap B=\varnothing$时，m 的值集为$\{-4, \frac{5}{2}, -1, 1\}$.

【创新解法】

在直角坐标系 xOy 中，集合 A 表示直线 $L_1:(m+1)x-y+1-2m=0$（除去点 P（2，3））. 当 $m\neq 1$ 时，集合 B 表示直线 $L_2:(m^2-1)x+(m-1)y=15$. 当 $m=1$ 时，集合 B 不表示任何图形.

显然，当 $m=1$ 时，$A\cap B=\varnothing$；

当 L_2 过点 P 时，也就是 $2(m^2-1)+3(m-1)=15$，即 $m=-4$ 或 $m=\frac{5}{2}$ 时，$A\cap B=\varnothing$；

当 $L_1/\!/L_2$，也就是 $m+1=0$，即 $m=-1$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

故若 $A\cap B=\varnothing$，则 m 的值集为

$$\left\{-4,\ \frac{5}{2},\ 1,\ -1\right\}.$$

例 3 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2+ax+2\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid y=x+1\ (0<x\leqslant 2)\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的值集.

【一般解法】

依题意，$A\cap B\neq\varnothing$ 等价于方程

$$x^2+ax+2=x+1$$

$$\text{即 } x^2+(a-1)x+1=0 \qquad ①$$

在区间（0，2］内有解.

∵ 方程①的判别式为 $\Delta=(a-1)^2-4$，在 $\Delta\geqslant 0$ 时的实根为 $\frac{-(a-1)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$，

∴ 这个问题等价于

$$(\text{I})\begin{cases}\Delta=(a-1)^2-4\geqslant 0, & ②\\ 0<\dfrac{-(a-1)+\sqrt{\Delta}}{2}\leqslant 2 & ③\end{cases}$$

或

(Ⅱ) $\begin{cases} \Delta = (a-1)^2 - 4 \geqslant 0, \\ 0 < \dfrac{-(a-1)-\sqrt{\Delta}}{2} \leqslant 2. \end{cases}$ ④

对不等式组（Ⅰ）：

不等式②$\Leftrightarrow a \geqslant 3$ 或 $a \leqslant -1$. ⑤

要使$\dfrac{-(a-1)+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$ 成立，必须

$a-1<0$，即 $a<1$ ⑥

不等式$\dfrac{-(a-1)+\sqrt{\Delta}}{2} \leqslant 2$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2-2a-3} \leqslant a+3$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+3 \geqslant 0 \\ a^2-2a-3 \leqslant (a+3)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad a \geqslant -\dfrac{3}{2}$ ⑦

于是，由⑤、⑥、⑦，得

（Ⅰ）$\Leftrightarrow \quad -\dfrac{3}{2} \leqslant a \leqslant -1$ ⑧

对不等式组（Ⅱ）：

要使$\dfrac{-(a-1)-\sqrt{\Delta}}{2} > 0$ 成立，必须

$a-1<0$，即 $a<1$ ⑨

不等式$\dfrac{-(a-1)-\sqrt{(a-1)^2-4}}{2} \leqslant 2$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2-2a-3} \geqslant -(a+3)$

$\Leftrightarrow \quad a+3<0$ 或$\begin{cases} a+3 \geqslant 0 \\ \sqrt{a^2-2a-3} \geqslant a^2+6a+9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad a<-3$ 或 $-3 \leqslant a \leqslant -\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad a \leqslant -\dfrac{3}{2}.$ ⑩

于是，由⑤、⑨、⑩，得

$$(\text{Ⅱ}) \Leftrightarrow \quad a \leqslant -\frac{3}{2} \qquad ⑪$$

故由⑧和⑪，得实数 a 的值集为

$$\{a \mid a \leqslant -1\}.$$

【创新解法】

依题意，$A \cap B \neq \varnothing$ 等价于方程

$$x^2 + ax + 2 = x + 1$$

即 $\quad x^2 + (a-1)x + 1 = 0$

在 $(0, 2]$ 内有解.

$\because \quad x \neq 0$，则 由这个方程，可得

$$a = -\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 \ (0 < x \leqslant 2).$$

$\because$ 当 $x \in (0,2]$ 时，有

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \text{（等号在 } x = 1 \text{ 时成立），}$$

$\therefore \quad a \leqslant -2 + 1 = -1$，即 $a \leqslant -1$.

故 a 的值集为 $\{a \mid a \leqslant -1\}$.

【评注】 本例中的创新解法，是换一个角度去考虑问题，把 a 表示成 x 的函数，即 $a = f(x) = -(x + \frac{1}{x}) + 1 (0 < x \leqslant 2)$，从而把问题转化为求函数的值域，其解法很简捷.

例 4 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0\}$，

$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 6y - 28 = 0\}$，

$C = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0,\ abc \neq 0\}$，且

$A \cap B \subset C$，求 $a : b : c$.

【一般解法】

依题意，方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6y - 28 = 0 \end{cases}$ 的解适合方程

$$ax + by + c = 0 \ (abc \neq 0).$$

解方程组$\begin{cases}x^2+y^2+6x-4=0\\x^2+y^2+6y-28=0\end{cases}$，得

$$\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=3;\end{cases}\begin{cases}x_2=-6,\\y_2=-2.\end{cases}$$

把它们分别代入 $ax+by+c=0$ 中，可得

$$\begin{cases}a-3b-c=0,\\6a+2b-c=0,\end{cases}$$

即$\begin{cases}a-3b=c,\\6a+2b=c.\end{cases}$

解这个关于 a、b 的方程组，得

$$a=\frac{1}{4}c,\ b=-\frac{c}{4}.$$

于是 $a:b:c=1:(-1):4$.

【创新解法】

在平面直角坐标系 xOy 中，集合 A 表示圆 $x^2+y^2+6x-4=0$，即 $(x+3)^2+y^2=(\sqrt{13})^2$，

集合 B 表示圆 $x^2+y^2+6y-28=0$，

即 $x^2+(y+3)^2=(\sqrt{37})^2$.

$\because\ \sqrt{(-3-0)^2+[0-(-3)]^2}<\sqrt{13}+\sqrt{37}$,

即这两个圆的圆心距小于它们的半径之和，

$\therefore$ 这两个圆必相交.

由这两个圆的方程相减，可得它们的公共弦所在的直线方程为

$$6(x-y)+24=0,$$

即 $x-y+4=0$.

由 $A\cap B\subset C$，可得直线 $x-y+4=0$ 与直线 $ax+by+c=0$ 重合.

于是，由两直线重合的条件可得

$$a:b:c=1:(-1):4.$$

例 5 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x=t,\ y=b+mt,\ t\in R\}$，$B=\{(x,y)\mid x=1+a\cos Q,\ y=\sin Q(a\neq 0),\ \theta\in R\}$，求当实数 a、b 满足什么条件时，对任意实数 m，$A\cap B\neq\varnothing$ 成立？

【一般解法】

由已知，得 集合 A，即 $\{(x,y)\mid y=mx+b\}$，

集合 B，即 $\{(x,y)\mid \frac{(x-1)^2}{a^2}+y^2=1\}$.

$A\cap B\neq\varnothing$ 等价于方程组

$$\begin{cases} y=mx+b & ① \\ \frac{(x-1)^2}{a^2}+y^2=1 & ② \end{cases}$$

有实数解.

把①代入②中，整理，得

$(1+a^2m^2)x^2+2(a^2bm-1)x+a^2b^2-a^2+1=0$.

这个方程有实数解的条件为

$4(a^2bm-1)^2-4(1+a^2m^2)(a^2b^2-a^2+1)\geqslant 0$,

即 $(a^2-1)\ m^2-2bm\ +(1-b^2)\geqslant 0$.

这个不等式对任意实数 m 都成立的条件为

$\begin{cases} a^2-1>0, \\ (-2b)^2-4(a^2-1)(1-b^2)\leqslant 0; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a^2-1=0, \\ b=0. \end{cases}$

解之，得（Ⅰ）$\begin{cases} |a|>1, \\ \frac{-\sqrt{a^2-1}}{|a|}\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}; \end{cases}$

或（Ⅱ）$\begin{cases} |a|=1, \\ b=0. \end{cases}$

把（Ⅰ）、（Ⅱ）合并，得 a、b 应满足的条件为

$$\begin{cases} |a|\geqslant 1, \\ \frac{-\sqrt{a^2-1}}{|a|}\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}. \end{cases}$$

【创新解法】

在平面直角坐标系 xOy 中，集合 A 表示直线 l：

$$y=mx+b,$$

集合 B 表示椭圆E：

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}+y^2=1.$$

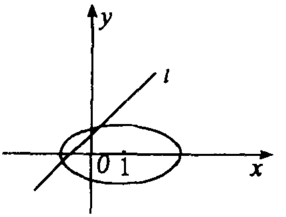

图 1－1

要使 $A\cap B\neq\varnothing$对任意实数 m 都成立，由图 1－1 知，$|a|\geqslant 1$ 且直线 l 与 y 轴的交点（0，b）应在椭圆上或椭圆内，

$$\therefore\quad |a|\geqslant 1 \text{ 且} \frac{(0-1)^2}{a^2}+b^2\leqslant 1,$$

即 $\dfrac{1}{a^2}+b^2\leqslant 1$.

故 a、b 满足的条件为

$$\frac{1}{a^2}+b^2\leqslant 1.$$

例 6 已知集合 $A=\{x\mid |x-4|+|x-3|<a, a\in R^+\}$，且 $A\neq\varnothing$，求 a 的值集.

【一般解法】

依题意，不等式$|x-4|+|x-3|<a$ 的解集不是空集.

（1）当 $x\leqslant 3$ 时，原不等式同解于

$$4-x+3-x<a,$$

即 $x>\dfrac{7-a}{2}$,

又 $x\leqslant 3$，$\therefore\ \dfrac{7-a}{2}<3$,

$\therefore\ a>1$.

（2）当 $3<x<4$ 时，原不等式同解于

$$4-x+x-3<a,$$

$\therefore \quad a>1.$

(3) 当 $x \geqslant 4$ 时，原不等式同解于

$$x-4+x-3<a,$$

$\therefore \quad x<\frac{a+7}{2}.$

又 $x \geqslant 4$，$\therefore \quad \frac{a+7}{2}>4$，

$\therefore \quad a>1.$

于是，由 (1)、(2)、(3) 知，a 的值集为

$$\{a \mid a>1\}.$$

【创新解法】

由已知得不等式

$|x-4|+|x-3|<a \quad (a>0)$ 在实数集 R 上有解.

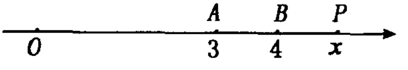

图 1－2

如图 1－2，在数轴上标出点 $A(3)$、$B(4)$ 和动点 $P(x)$.

$\because \quad |PA|+|PB| \geqslant |AB|=1,$

$\therefore \quad |x-3|+|x-4| \geqslant 1.$

于是，不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 在实数集 R 上的解集是空集时，$a \leqslant 1$.

从而原不等式在 R 上解集不是空集时，$a>1$.

故 a 的值集为 $\{a \mid a>1\}$.

例 7 已知集合 $A=\{x \mid \sqrt{4x-x^2}>(a-1)x\}$，$B=\{x \mid 0<x<2\}$，且 $A \subseteq B$，求实数 a 的值集.

【一般解法】

(1) 当 $a-1<0$，即 $a<1$ 时，

$\because \quad 4x-x^2 \geqslant 0$，$\therefore \quad 0 \leqslant x \leqslant 4.$

$\therefore \quad (a-1)x \leqslant 0.$

这时，$\sqrt{4x-x^2}>(a-1)x$

$\Leftrightarrow \quad 4x-x^2>0$ 或 $x=4$

$\Leftrightarrow \quad 0<x\leqslant 4.$

于是，当 $a<1$ 时，$A=\{x\mid 0<x<4\}$，它不符合 $A\subseteq B$.

(2) 当 $a-1=0$，即 $a=1$ 时，

$(a-1)x=0.$

这时，$\sqrt{4x-x^2}>(a-1)x$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{4x-x^2}>0$

$\Leftrightarrow \quad 0<x<4.$

于是，当 $a=1$ 时，$A=\{x\mid 0<x<4\}$，它不符合 $A\subseteq B$.

(3) 当 $a-1>0$，即 $a>1$ 时，

$\because \quad 0\leqslant x\leqslant 4$，$\therefore \quad (a-1)x\geqslant 0.$

这时，$\sqrt{4x-x^2}>(a-1)x$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}0<x<4\\4x-x^2>(a-1)^2x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}0<x<4,\\x<\dfrac{4}{(a-1)^2+1}.\end{cases}$$

于是，$A=\{x\mid 0<x<4\}\cap\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{4}{(a-1)^2+1}\right\}$.

要使 $A\subseteq B$,必须且只需

$$\frac{4}{(a-1)^2+1}\leqslant 2,\quad \therefore \quad a\geqslant 2.$$

于是，当 $a\geqslant 2$ 时，$A\subseteq B$.

故由（1）、(2)、(3）知，a 的值集为

$\{a\mid a\geqslant 2\}$.

【创新解法】

设 $y=\sqrt{4x-x^2}$，则　$y^2=4x-x^2$，

即 $x^2+y^2-4x=0$，

$\therefore\quad (x-2)^2+y^2=2^2\quad (0\leqslant x\leqslant 4, y\geqslant 0)$.

$\therefore\quad y=\sqrt{4x-x^2}$ 的图形是以 (2，0) 为圆心、2 为半径的圆在 x 轴上方的半圆（包括点 (0，0) 和点 (4，0)）.

又设 $y=(a-1)x$，它表示过原点的直线束（动直线）.

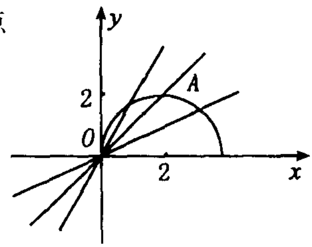

图 1-3

从而 $A\subseteq B$ 的几何意义是，在 $0<x<2$ 时，动直线在半圆的上方.

$\because$　过 $O(0,0)$、$A(2,2)$ 的直线的斜率为 1，

$\therefore\quad a$ 应满足 $a-1\geqslant 1$，即 $a\geqslant 2$.

故 a 的值集为 $\{a\mid a\geqslant 2\}$.

例 8　设 a，$b\in R$，$A=\{(x,y)\mid x=n, y=na+b, n\in Z\}$，$B=\{(x, y)\mid x=m, y=3(m^2+5), m\in Z\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 xOy 内的点集．问：是否存在 a 和 b 使得(1) $A\cap B\neq\varnothing$，(2) $(a,b)\in C$ 同时成立？

【一般解法】

假设满足题中两个条件的 a、b 存在，则

$$A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow\begin{cases}n=m\\ na+b=3m^2+15\end{cases}\quad 成立.$$

从而可得 $na+b=3n^2+15$　①

又　$(a,b)\in C\Rightarrow a^2+b^2\leqslant 144$　②

由①，得　$b=3n^2-an+15$.

把它代入②中，整理，得

$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$　③