

泛函分析

复旦大学数学系 編著

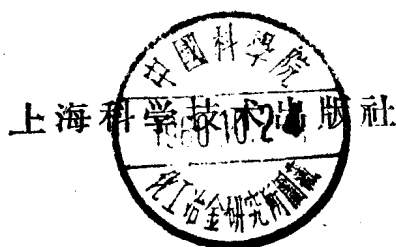
上海科学技术出版社

51.61
310

泛 函 分 析

(試用本)

复旦大学数学系 編著



內 容 提 要

本書系復旦大學數學系數學專業革新教材之一。內容包括勒貝格積分論、積分方程、巴拿赫空間理論、希爾伯特空間算子譜分解理論，也包括一部分綫性代數的內容。可作綜合大學數學專業泛函分析課程的教材，計授 78 學時，亦可作高等院校有關專業的參考書。

泛 函 分 析

(試 用 本)

復旦大學數學系 編著

*

上海科學技術出版社出版

(上海瑞金二路 450 號)

上海市書刊出版業營業許可證出 093 號

新華書店上海發行所發行 各地新華書店經售

上海市印刷五廠印刷

*

開本 850×1168 1/32 印張 8 28/32 字數 210,000

1960 年 5 月第 1 版 1960 年 8 月第 2 次印刷

印數 551—15,000

統一書號：13119·359

定 價：(十)0.98 元

編輯說明

我們受到全國持續躍進的大好形勢的鼓舞和推動，積極響應了黨的號召，在兩年來教育大革命已經取得偉大成績的基礎上，掀起了一个聲勢浩大的教學改革的群眾運動。通過這個運動，我們揭露了現在教學體系、教學內容和教學方法上陳舊落後的狀況，抓住訂方案、編大綱、寫教材、搞試驗等重要環節，試圖建立一套以馬克思列寧主義、毛澤東思想為指導的、反映現代科學發展水平的、理論聯繫實際的新的教學體系和內容，以及與之相適應的教學方法，使培養人才的工作更好地貫徹黨的社會主義建設總路綫的精神。

作為這種新的探索和嘗試，我們在教學改革運動中，師生結合，提供了“關於綜合大學數學專業課程革新的建議”，編寫了一套可供綜合大學數學專業試用的基本課程教材。全套教材包括數學分析（一）、數學分析（二）、泛函分析、高等代數、綫性規劃和計算實習、計算數學、數理邏輯與控制論、常微分方程、數學物理方程、一般力學、連續介質力學、統計數學（包括信息論）等十二種，尚有物理學一種，因力量所限，未能及時編出。

根據“關於綜合大學數學專業課程革新的建議”的精神，我們力圖使這套教材具有以下几个特點：

一、在選材上，注意克服資產階級教育思想的影響，體現為社會主義建設服務和反映現代科學發展的要求。中國數學會提出的“數學發展的方向必須以解決尖端技術和重大工程、現代物理、自動化、國民經濟和大量計算任務中的數學問題為綱”，具體地說明了社會主義建設和現代科學發展對數學的要求，我們即以此作為選材的主要標準，同時，也考慮到基礎課的某些特殊要求，適當注

意了根据理論与实践之間的直接联系与間接联系，当前需要与长远需要等关系，来确定材料的取舍和不同材料的主次安排。根据这个精神，我們精簡了原来基础課內容中一部分不必要的古典內容，添加了一部分現代材料，还增加了一些新課程。

二、在材料处理上，注意克服过去課程設置各自为政、互不联系的缺点，体现科学知識的綜合与分类的辯証統一的关系。特别是近年来，边缘学科大量出現，科学发展在原有基础上愈来愈明显地趋向新的更高級的綜合，我們想力求使这套教材适应这个趋势。

具体說来，对那些条件已經成熟的、可以綜合处理的內容，即加以統一处理，例如将泛函分析与实变函数、积分方程以及綫性代数中的部分內容統一处理，在泛函分析中加以綜合；对那些綜合趋势已經比較明显，但独立設課条件尚不成熟的，也分別情况，注意在有关課程間建立密切的有机联系，若干材料还重新另行配置，例如原来理論力学中振动理論的一部分內容，这次就移到常微分方程中去了。

三、在材料的处理与闡述上，以辯証唯物主义观点为武器，破除形而上学和唯心主义对数学教学的影响。数学的研究对象是客观世界的量的側面，所以它具有較多的抽象性，在研究方法上也較多地运用邏輯上的演繹推証。这些特点，本来應該有利于深刻地闡明問題的本質，但唯心主义者却总是加以歪曲，企图在引出抽象概念时，掩盖其实践来源，在形式論証中，避免闡述問題的本質。在这套教材中，我們力求消除这些唯心主义观点的影响。具体說来，对某些与生产实践有着更加直接联系的課程（如数学物理方程），既吸收已經严格建立数学理論的材料，也采用在实践中有广泛应用而理論上尚未成熟的材料，重新加以組織，恢复这門課程本来的生动活潑的面貌。各門課程中，对重要数学概念与問題的引进，都尽量闡明它們的直接和間接的实践来源；闡述論証过程中，

插入若干必要的描述性材料；得到的結論，也闡明它在實踐中直接和間接的作用。本學期我系幾門主要基礎課程，都初步做到了減少學時、提高質量，據了解，主要是在教學過程中初步體現了這個精神。因此，根據我們一些不成熟的經驗，要徹底解決這個問題，除在教材內容上盡量克服這些唯心主義觀點的影響以外，還要注意在教學方法中消除這些影響。

徹底實現教學改革，建立一套新的體系，是一個艱鉅複雜的任務，也需要一個較為長期的時間來摸索。我們所作的一些嘗試，僅僅是個開端，既受到思想水平和科學水平的限制，又缺乏較充分的實踐經驗，某些課程的教材，還是在師生結合、邊學邊寫的情況下編出來的。因此不論在處理原則上或者在處理方法上都還不夠成熟。有不少問題，例如如何在教材中反映我國社會主義建設實際中所提出的數學問題、如何在有關各課程間建立更密切的有機聯繫等等，在編寫過程中，也還把握不定，處理不盡適當。我們懇切地希望同志們批評和指正。

上海科學技術出版社和商務印書館上海印刷廠對這套教材的迅速出版，給了極大的支持，我們在這裡表示衷心的感謝。

復旦大學數學系

1960年5月

序

在 20 世紀 60 年代祖國工農業生產和科學技術事業飛躍發展的形勢下，大學的基礎課程也必須更好地體現多快好省的精神。這本教材就是在新形勢下編成的。

本課程包括通常實函數論，積分方程，泛函分析以及一部分綫性代數的內容，統稱為泛函分析。

勒貝格積分論和泛函分析在現代數學的許多分支中有着廣泛的應用。泛函分析的观点和方法不但對現代數學的發展有着重要的影響，而且在近代物理中，也將有越來越多的應用。掌握泛函分析的思想和方法，是進一步掌握和發展現代數學的各分支所不可缺少的環節，因而，本課程是重要的一門基礎課。

在現行的實函數論課程中，有些內容比較陳舊。由於強調內容的完備，它把相當多的時間化在證明幾個較困難而不常用的古典定理上，這就使得應用較廣泛的部分僅占原課程的五分之一以下。

我們在毛澤東思想的指導下，編寫了這本教材。編寫時，力求遵照下列原則：

1. 刪節原有實函數論的某些陳舊繁瑣的內容以及一些不常用的定理或定理的證明，同時把實函數論加以概括，着重在勒貝格積分和測度理論，並且引入一些應用較多的定理如收斂定理等。由於概括了實函數論的內容，就有可能增加反映近代數學成就的部分，將泛函分析較新的分支，如廣義函數論，非綫性泛函分析等作了介紹。

2. 同其他数学分支一样,泛函分析的思想乃是来自实践。反过来,泛函分析也可以应用到对其他与生产实际部門較有直接联系的一些学科。所以对泛函分析这門看来是比較抽象的課程,我們也必須貫徹着“实践—理論—实践”这个原則。在材料安排上都力求反映这一点。我們用泛函分析中算子的理論統一处理积分方程和綫性代数中的一些問題,作为自共轭算子酉算子及其譜分解的特例,另一方面我們也介紹了富里埃变换和富里埃級数的一些知識。这样,在以較多、較現代化的观点和方法来处理古典內容,使其更容易揭露本質的同时,也做到抽象和具体相結合。

在处理方法上,我們还力求反映出泛函分析中的思想和方法,在数学物理問題中的来源,以及它們在数学物理方程及計算数学中的应用。

附帶指出,在本教材中,許多重要的数学基础知識,如积分方程、富里埃变换、富里埃級数及綫性代数的一些知識都是作为特例来处理的。它們本身都是很重要的基础知識,希望讀者了解这一点。

3. 在选择內容时,較充分地考虑到以后各門課程,如数学物理方程、統計数学及近似計算等对泛函分析的要求,重点突出了算子及其譜分解理論。

在第一章里,几乎把过去实函数論中的全部重要內容包括进去。我們嘗試以勒貝格积分理論为中心,把积分与測度的概念統一在一起来处理。从区間的长度出发引进开集与零集的“长度”,联系了数学分析中学过的黎曼积分的知識,突出了极限号与积分号交換的性質,来建立积分理論,从而很簡單地引出了可測函数、可測集的基本性質。我們認為,这样叙述比較直观,而且需時間較少。

在第二章里,我們用距离揭示了极限概念的本質,着重地闡述

了以后常用的关于距离空间的几个性质——完备性、稠密性、致密性,并且也介绍了不动点原理及其在方程中的应用。

在第三章里,叙述了巴拿赫(Banach)空间中的两个基本定理——线性泛函的延拓定理及以积分表示线性泛函的黎斯定理。并简单介绍新近发展较快的广义函数论。

在第四章里讨论了巴拿赫空间线性算子理论,介绍了关于逆算子为连续的定理。较详细地讨论了全连续算子的基本性质,并用它处理积分方程中的弗列德荷蒙理论,显示泛函分析思想的一个重要的来源和广泛应用。在这章最后一段,介绍了非线性泛函及解泛函方程的牛顿近似方法。

作为欧几里得空间内积和直交系概念的拓广,我们在第五章里建立了新的空间——希尔伯特(Hilbert)空间几何学的基础。这也是为下一章作准备的。

最后,我们较详细地介绍了希尔伯特空间的谱分解理论,由于它在物理、微分方程、概率论等方面的应用极为广泛,所以对希尔伯特空间算子理论的核心部分,力求阐明所研究的理论在实际中的反映。结合在 n 维空间中相应结果的叙述,以对称核积分方程及富里埃变换作为具体应用来介绍,亦尽量把不同算子的谱分解统一起来。

由于我们水平有限,缺乏教学经验,时间又较仓促,在整个系统的组织和安排上考虑得不够细致(特别是第一章,没有直接的参考资料),错误和不妥之处,定有不少。但是作为革新的尝试,还是大胆地把我们的看法写出来,请大家批评指正。

目 录

序.....	1
第一章 勒貝格积分.....	1
§1 集 直綫上的点集.....	1
§2 勒貝格积分的引入.....	12
§3 勒貝格积分的极限定理.....	29
§4 可測函数与可測集.....	40
§5 不定积分与全連續函数.....	59
§6 二重勒貝格积分富比尼定理.....	66
§7 勒貝格-司帝吉斯积分.....	70
第二章 距离空間.....	73
§1 距离空間 L^p 空間.....	73
§2 距离空間中的开集和閉集.....	83
§3 完备性 L^p 空間的完备性.....	86
§4 稠密性 可析点集 多項式全体在 $C[a, b], L^p[a, b]$ 中的稠 密性.....	91
§5 致密性 等度連續函数族.....	100
§6 不动点原理及其应用.....	106
第三章 綫性賦范空間及綫性泛函.....	113
§1 綫性空間.....	113
§2 綫性賦范空間.....	116
§3 綫性泛函.....	118
§4 共軛空間.....	129
§5 广义函数的概念.....	131
第四章 巴拿赫空間上的綫性算子.....	139
§1 綫性算子.....	139

§ 2	逆算子	145
§ 3	共轭算子	149
§ 4	全連續算子 积分方程的弗列德荷蒙理論	150
§ 5	非綫性泛函分析	169
§ 6	解泛函方程的近似方法	179
第五章	希尔伯脫空間	187
§ 1	希尔伯脫空間	187
§ 2	直交分解 綫性泛函的一般表示	191
§ 3	希尔伯脫空間的直交系	196
§ 4	希尔伯脫空間的同构	201
第六章	希尔伯脫空間算子譜分解理論	204
§ 1	特征值、譜、自共轭算子的基本性質	204
§ 2	自共轭算子与双綫性爱尔米脫泛函	214
§ 3	正常算子与酉算子	217
§ 4	投影算子	225
§ 5	全連續自共轭算子的譜分解, 对称核积分方程	233
§ 6	譜系	238
§ 7	自共轭算子的譜分解	243
§ 8	酉算子的譜分解	253
附录	泛函分析的某些应用	258
§ 1	最速降落法	258
§ 2	偏微分方程的广义解	265

第一章 勒貝格积分

§1 集 直綫上的点集

一、集

在日常活动中和研究数学时,我們常常会碰到集的概念。例如在研究数时,我們碰到自然数全体,偶数全体,大于100而小于1000的所有奇数等等。在組織生产时,会碰到某一年度厂里所有制成的产品,某个車間的全体先进生产者等。总之,我們称具有某种特殊性质的抽象的或具体的事物(称为元素)的全体为集。任何事物,对于某一个集来讲,或是属于該集,或是不属于該集;例如,对于平面上所有的圓所成的集来说,某等边三角形就不属于該集,而以原点为中心以 R 为半径所作的圓就属于該集。

我們不去探究属于数学基础的集的严格定义。

以后我們用大写字母 $A, B, X, Y, \dots$, 表示集,用小写字母 $a, b, x, y, \dots$, 表示它们的元素。如果元素 a 属于集 A , 則記为 $a \in A$, 如果元素 a 不属于集 A , 則記为 $a \notin A$ 。如果集 A 的元素都属于集 B , 則称集 A 是集 B 的子集,記作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 例如,半径为 R 的圓的全体是平面上所有圓的全体所成之集的子集。如果集 A 的所有元素都是集 B 的元素,而同时集 B 所有的元素都是集 A 的元素,則称集 A 等于集 B , 記为 $A = B$ 。不包含任何元素的集叫做空集,記作 $\emptyset$ 。

此后以 $\{x | x \text{ 具有性质 } P\}$ 表示具有性质 P 的元素 x 的全体,例如 $\{x | x > 0\}$ 表示正数的全体。

由集 A 与集 B 的一切元素所組成的集,叫做集 A 与集 B 的和

集, 簡称为和, 記为 $A \cup B$ 或 $A+B$; 由 A 与 B 两个集的公共元素組成的集叫做集 A 与集 B 的通集, 記为 $A \cap B$ 或 $A \cdot B$. 例如, 大于 4 的实数全体与小于 5 的实数全体的和集是实数全体, 而它們的通集是大于 4 并且小于 5 的数的全体. 完全类似地定义有限多个或无限多个集的和集与通集: 設 A_α 是任一組集, 其中 α 是集的指标, 即是在某一个範圍內取值的附标. 一切 A_α 的元素所組成的集叫做这組集的和集, 記为 $\bigcup_\alpha A_\alpha$ 或 $\sum_\alpha A_\alpha$, 以后大都采用記号 $\sum$; 同时属于每一个 A_α 的一切元素所組成的集, 叫做这組集的通集, 記为 $\bigcap_\alpha A_\alpha$ 或 $\prod_\alpha A_\alpha$, 以后我們大都采用 $\prod$ 来表示. 例如用 A_n 表示小于 $\frac{1}{n}$ 的正有理数全体, 則 $\sum_n A_n$ 是 $(0, 1)$ 中所有有理数全体, 而交 $\prod_n A_n$ 是空集.

集 A 里不属于集 B 的那些元素的全体叫做集 A 与集 B 的差集, 記为 $A \setminus B$ 或 $A - B$; 若 $B \subset A$, 則称集 $A - B$ 为集 B 关于集 A 的余集, 記为 $C_A B$.

集的和”、“通”、“差”运算具有性質:

交換律: $A+B=B+A$.

結合律: $(A+B)+C=A+(B+C),$
 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$

分配律: $(A+B)C=AC+BC,$
 $(\sum_\alpha A_\alpha) \cdot B = \sum_\alpha A_\alpha \cdot B.$

这些关系式容易直接从定义出发导出, 下面我們特別介紹往后常用的集的运算关系式, 从中大家也可以学到集的运算关系的証法.

和通关系: 設 A_α 是一組集, S 是另外一个集, 則

$$S - \sum_\alpha A_\alpha = \prod_\alpha (S - A_\alpha), \quad (1-1)$$

$$S - \prod_\alpha A_\alpha = \sum_\alpha (S - A_\alpha). \quad (1-2)$$

上面两式, 如果用文字来敘述就是: 和集的余集等于每个集的余集

的通集；通集的余集等于每个集的余集的和集。現在我們来証明上式。首先我們想一下 (1-1) 式左边是由属于 S 而不属于任何一个 A_α 的元素构成的，其次，我們再想一想 (1-1) 式右边是由属于每一个 $S - A_\alpha$ 的元素构成的，因此它属于 S 而不属于任何一个 A_α ，所以 (1-1) 的右边是左边的子集。反过来也是正确，即 (1-1) 的左、右两边元素是一样的。类似地可以証明等式 (1-2)，希望讀者自己去分析和論証。为了帮助讀者熟練集的运算，集論里的某些基本运算方法，我們就不能滿足于上面文字叙說的証明方法，下面将采用数学式子推理的方法一步一步地演算出来。

我們来証明 (1-1)。令

$$P = S - \sum_{\alpha} A_{\alpha},$$

$$Q = \prod_{\alpha} (S - A_{\alpha}).$$

我們只要証明 $P = Q$ 就可以了。

設 $x \in P$ ，則按差集的定义有

$$x \in S \text{ 且 } x \notin \sum_{\alpha} A_{\alpha}.$$

因此，对于任何 α ， $x \notin A_{\alpha}$ ，故 $x \in (S - A_{\alpha})$ ，即 $x \in Q$ ，这就是說，凡是属于 P 的元素都一定属于 Q ，所以 $P \subset Q$ 。

反之，設 $x \in Q$ ，則对于任一个 α ， $x \in (S - A_{\alpha})$ ，即

$$x \in S \text{ 且 } x \notin A_{\alpha}.$$

因此 $x \notin \sum_{\alpha} A_{\alpha}$ ，亦即 $x \in S - \sum_{\alpha} A_{\alpha}$ ，这就是說，凡是属于 Q 的元素一定属于 P ，所以 $Q \subset P$ ，最后得到

$$P = Q.$$

証毕

二、可列集

前面我們简单地列举了一些集的运算，現在我們將研究集的另一個基本关系——对应关系。首先我們考虑一下两个由有限个元素构成的集

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

我們很容易判定两个集 A 与 B 中所包含的元素誰多誰少, 为此, 在集 A 和集 B 之間建立对应关系。如果集 A 与集 B 之間元素确能一个对应一个地对应好, 那末就說它們的元素个数相同; 如果其中之一出現了对应不上的元素, 即元素出現了多余, 則称有多余的那个集的元素个数多于另外一个集。然而这种自然的想法对于无限个元素的多少概念就不再一目了然了。例如自然数的全体

$$A = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

和正偶数与正奇数的和集

$$B = \{2, \dots, 2n, \dots\} + \{1, 3, 5, \dots, 2n+1, \dots\},$$

按照自然的想法是集 A 和集 B 的元素“个数應該相等”。事实上, 因为我們可以令集 A 中的 k 与集 B 中的 k 对应, 但是如果我們將集 A 中的 k 与集 B 中的 $2k$ 对应起来, 就應該得到集 A 与

$$\{2, \dots, 2n, \dots\}$$

的元素“个数”相等, 这样一来, 好象集 B 的元素“个数”比集 A 多了, 显然, 这与一般的想象似乎产生了“矛盾”, 因此, 在一般集論里, 特別在元素不是有限个的无限集里, 不去籠統地提集的“个数”这个概念, 而引入——对应的概念。

設 A 、 B 是两个集, 如果存在一个規則 φ , 使得 A 中的每一个元素 a 与集 B 中的唯一的一个元素 b 对应:

$$a \xrightarrow{\varphi} b,$$

或記为

$$b = \varphi(a),$$

則称 b 为 a 在規則 φ 之下的象, 而称 a 为 b 在規則 φ 之下的原象。称規則 φ 为从 A 到 B 的一个映照, 而 A 称为映照 φ 的定义集, 所有元素 $\varphi(a)$ ($a \in A$) 的全体称为象集。

例如映照

$$y = \varphi(x) = \sin x,$$

$$A = (-\infty, \infty), \quad B = [-2, 2],$$

而 $\varphi(x)$ 的定义集为 $(-\infty, \infty)$, 象集为 $[-1, 1]$. 假定給了 $[-1, 1]$ 中的某一个值 y_0 , 适合

$$y_0 = \sin x$$

的 x 就不止一个。

因此, 一般地說, 对于一个元素, 其映照的原象不一定是唯一的。如果一个映照, 它的象集中每一个元素的原象都是唯一的, 則称这个映照为——对应的映照。若此映照的象集为 B , 定义集为 A , 則称 φ 为集 A 到集 B 的一对一的映照。

——对应的概念在我們实际生活中也碰到很多, 例如 A 是某个学校的学生全体, B 是学生的学号, 这两个集之間存在着——对应。

在这里, 我們利用一对一的映照的概念来研究一种最简单的无限集——可列集。

記 N 为自然数全体, 称为自然数集。

定义 可以与自然数集建立——对应的集叫做可列集。

換句話說, 可列集是这样的集, 可以把它的一切元素按自然数編号, 因为設 A 为可列集, 則 φ 为 N 与 A 之間的一一对应, 記

$$a_n = \varphi(n),$$

則 A 中元素即有了編号, 成为序列形式

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

下面举一些可列集的例子:

(1) 一切正偶数全体

$$A = \{0, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}$$

是可列集。

(2) 集 $\{\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ 是可列集。

(3) 有理数全体所成的集是可列的。

事实上, 每一个有理数都可以写成既約分数的形式: $\alpha = p/q$, $q > 0$, 称 $h = |p| + q$ 为有理数的“高度”, “高度”为 h 的有理数只有有限个。例如, “高度”为 1 的只有一个 $\frac{0}{1} = 0$, “高度”为 2 的只有两个: $\frac{1}{1} = 1, \frac{-1}{1} = -1$ 等等。把一切有理数按照递增的“高度”编号, 由“高度”为 1 的元素开始, 再排“高度”为 2 的两个有理数, 再排高度为 3 的四个有理数等等。这样, 每一个有理数就得到了一个确定的号码, 因而, 它与一切自然数之间建立了一一对应。

现在来证明可列集的一些简单的性质。

性质 1 可列集 A 的任一个子集 B 是有限集或可列集。

证 把集 A 的元素编号:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

设 $n_1, n_2, \dots$ 是编号中与 B 的元素相对应的自然数。如果这些数中有最大的, B 就是有限的; 如果这些数中没有最大的, 那么将 B 中的元素 a_{n_k} 与 k 对应, 这是一一对应, 所以是可列集。

性质 2 任意有限个或可列个可列集的和集仍为可列集。

证 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 都是可列集,

$$A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}, \dots\},$$

$$A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}, \dots\},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}, \dots\},$$

$$\dots\dots\dots$$

每个元素 $a_q^{(p)}$, $p = 1, 2, \dots, q = 1, 2, \dots$, 对应 $p + q = h$, 称为 $a_q^{(p)}$ 的“高度”, 按“高度”来编号:

$$\begin{aligned} & a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, a_1^{(3)}, a_2^{(2)}, a_3^{(1)}, \dots \\ & \dots a_1^{(n)}, a_2^{(n-1)}, \dots a_n^{(1)} \dots \end{aligned} \quad (1-3)$$