报考理工科研究生复习指导丛书

LIXUE

力学

报考理工科研究生复习指导丛书
力　学
黎邦隆　老　亮编
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1985年11月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：11.375　字数：258,000
印数：1——34,500
统一书号：13204·116　　定价：1.85元

前　言

本书包括理论力学和材料力学两部分，主要是为准备报考研究生的读者编写的，也可供大学本科和专科、电视大学、函授大学、职工大学攻读力学课程的学生以及有关的工程技术人员与青年教师参考。

在编写过程中，我们对1978年以来全国不少学校和研究所的研究生入学试题进行了调查研究。在这个基础上，根据课程要求、命题情况和我们自己多年来从事这两门课程教学的体会，确定了编写大纲，选定了一批例题和复习题。本书内容以理论复习和例题讲解为主，复习题附在有关章节后面。

考虑到读者已学过这两门课程，所以理论复习部分只是提纲式、小结式的，篇幅不多，但除了注意突出重点之外，也照顾到了系统和全面，特别是写了关于解题方法与解题技巧方面一些带有规律性的内容。所举例题一方面注意在题型、解法方面具有代表性，另一方面注意反映课程要求和近年来的命题情况。既写了常用的解题方法，也写了一些其他的比较简便但不常见的解题方法；有的例题则写了几种解法，以便读者通过比较，掌握各种解法及其有关理论的基本特点，了

解它们的优缺点，加深自己对基本理论的理解，提高自己的解题能力。复习题是为了帮助读者进行自我测试而选录的，大多数题目选自近两年的研究生试题，少数选自其他方面。多数题目有答案。

书中对一些重点和难点以及容易出错的地方，进行了比较细致的讨论和分析，以期读者通过使用本书进行复习时能有一些新的收获。

参加材料力学部分编写的有郝松林同志，解算和核对题目的有吴永礼、刘大泉、肖锡玉和张晓今同志；编者并根据周之桢副教授审查该部分时提出的意见对书稿作了修改和补充。理论力学部分复习题的答案大部分是宋福磐、何祥铁、彭绍佩同志提供的。谨此一并致谢。

我们水平有限，又来不及再三对书稿进行推敲和修改，书中一定存在不少缺点和疏误，敬希读者批评指正。

编　者

1984年8月

目　录

第一篇　理论力学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第二篇　材料力学

第一篇　理论力学

第一章　静力学

静力学研究和解决的基本问题是：

（1）各种力系的简化方法；

（2）各种力系的平衡条件及其应用。

简化一个力系，就是将它进行一些等效变换，变为一个简单的力系。把力系简化是为了了解作用在刚体上的各种力系的总效果，并便于探讨各种力系的平衡条件。研究力系的平衡条件，是为了进行关于静力方面的设计计算。即使是动力学问题，只要在实际作用力之外添加了适当的惯性力，也可用平衡规律来解决。力系的平衡条件是平衡力系中各力的相互关系的表述。应用平衡条件，就可以从平衡力系中的一些已知数据求得某些未知量。

理论力学里只研究刚体的平衡。当我们说到某种力系的平衡条件时，指的是这种力系使刚体保持平衡所必须和只须满足的条件，即必要与充分条件。由于刚体的平衡条件对于变形体的平衡也是必要的，所以当变形体受力而平衡时，也可应用这些条件来进行静力计算。正因为这样，静

力学的规律才成为古典力学范围内所有力学分支中有关静力分析的基础.

静力学用到的重要概念是：力、刚体、力矩、力偶、力偶矩、力的投影、约束等. 重要规律是：力的平行四边形规则及多边形规则、增减平衡力系原理、二力平衡条件、作用与反作用定律、力线平移定理、矢量和投影定理等.

在平面问题里，力对点之矩与力偶矩都作为代数量. 前者的大小等于该力与力臂的乘积，后者的大小等于组成该力偶的力的大小与力偶臂的乘积；两者的正负都按右手规则确定：从图面向图背看去，看到反时针转向时为正，反之为负. 但是在力矩方程中也可作相反的规定.

在空间问题里，力对点之矩与力偶矩都必须以矢量表示. 它们的大小如上所述，它们垂直于力与矩心决定的平面或力偶作用面，指向由右手规则决定. 力对点之矩矢须画在矩心上以表示矩心的位置，是定位矢量；力偶矩矢则是自由矢量. 在空间问题里还需用到力对轴之矩，它的大小等于该力在垂直于矩轴的任意平面上的投影对矩轴与该平面的交点之矩，是代数量，其正负规定与平面问题中力对点之矩的正负规定一致.

力对点之矩与对轴之矩之间有重要关系：一力对空间任一点之矩矢在**过该点**的任一轴上的投影，等于该力对该轴之矩. 应用这个关系，就可用力对轴之矩的代数量运算来代替力对点之矩的矢量运算.

如以$\boldsymbol{r}$表示力$\boldsymbol{F}$的作用点从矩心O作出的位置矢，以x、y、z表示这作用点的坐标(坐标系以矩心为原点)，以X、Y、Z表示$\boldsymbol{F}$在x、y、z轴上的投影，则可将力$\boldsymbol{F}$对O点的矩矢$\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F})$表示为：

$$\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\times(X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k})$$

$$=(yZ-zY)\boldsymbol{i}+(zX-xZ)\boldsymbol{j}+(xY-yX)\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \tag{1-1}$$

式中$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$是x、y、z轴的单位矢量. 应用上述两种力矩之间的关系，可知力$\boldsymbol{F}$对x、y、z轴之矩为：

$$\left.\begin{aligned} &m_x(\boldsymbol{F})=yZ-zY,\ \ m_y(\boldsymbol{F})=zX-xZ, \\ &m_z(\boldsymbol{F})=xY-yX. \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

§1-1　各种力系的简化结果

(1) 平面汇交力系

可合成为作用在诸力汇交点的一个合力，合力矢量可由下式表示：

$$\boldsymbol{R}=(\sum X)\boldsymbol{i}+(\sum Y)\boldsymbol{j}, \tag{1-3}$$

其中$\sum X$、$\sum Y$ 分别是力系各力在位于力系平面内的任意直角坐标系中x、y轴上投影的代数和. 当用图解法时，合力矢量由以力系各力的矢量为边的力多边形的封闭边确定.

(2) 空间汇交力系

可合成为作用在诸力汇交点的一个合力，合力矢量可由

$$\boldsymbol{R}=(\sum X)\boldsymbol{i}+(\sum Y)\boldsymbol{j}+(\sum Z)\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

确定；也可由以诸力的矢量为边的空间力多边形的封闭边确定，但由于在空间情况下作图比较困难，求空间汇交力系的合力一般不用图解法.

(3) 力偶系

力偶系合成的结果是一个合力偶. 空间力偶系的合力偶矩等于各分力偶矩的矢量和：

$$\boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{m} = (\sum m_x)\boldsymbol{i} + (\sum m_y)\boldsymbol{j} + (\sum m_z)\boldsymbol{k} \quad (1\text{-}5)$$

平面力偶系的合力偶矩等于各分力偶矩的代数和：

$$M = \sum m. \quad (1\text{-}6)$$

(4) 平面任意力系

这种力系的各力虽然都是在同一平面上分布，但却是任意分布，情况比较复杂。当用投影法简化这种力系时，从理论上说，一般要分两步来做：先应用力线平移定理，将原力系等效地变换为作用在任选的简化中心(例如O点)的一个平面汇交力系，和一个平面力偶系，然后把这两个力系分别合成为一个力$\boldsymbol{R}'$(这不是原力系的合力！)和一个力偶．力$\boldsymbol{R}'$的矢量等于原力系各力的矢量和(即等于原力系的主矢量)，这力偶的力偶矩M_o等于原力系各力对简化中心的力矩和(即等于原力系对简化中心的主矩)。最后，再据力线平移定理把这个力与这个力偶合成为一个力$\boldsymbol{R}$，这就是原力系的合力．

原力系合力$\boldsymbol{R}$的矢量与力$\boldsymbol{R}'$的矢量相同，都等于原力系的主矢量，可用公式(1-3)求得；合力$\boldsymbol{R}$的作用线则可这样来确定：它对简化中心的力矩应等于原力系对该点的主矩(这也就是合力矩定理)。

只要原力系各力的矢量和不等于零，或者说，只要$\sum X$、$\sum Y$不全等于零，原力系就必定可合成为一合力．上述先将原力系变换为一个力和一个力偶的做法，在将一个具体的力系简化时是不必要的．只需再算出原力系对任选的简化中心的主矩，即可确定合力作用线的位置．

显然，如果选取不同的简化中心，原力系的主矢量是不改变的，主矩则一般将不相同；但最后求得的原力系的合力总是一样的。

将力系向简化中心简化有以下特殊情况：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(a) $R' \neq 0$, $M_o = 0$.

这时作用在简化中心的力$\boldsymbol{R}'$就是原力系的合力。这种情况发生在所选简化中心恰巧位于原力系合力作用线上时。

(b) $R' = 0$, $M_o \neq 0$.

这时原力系的主矢量等于零，没有合力，无论将这力系向哪一点简化，所得的都是一个力偶，而且这些力偶都与原力系等效，因而它们彼此也是等效的，力偶矩都等于M_o。

(c) $R' = 0$, $M_o = 0$.

这时原力系是一个平衡力系.

由此可见，平面任意力系如不平衡，则简化的最后结果不是一个合力就是一个力偶. 合力的大小、方向、作用线的位置或这力偶的力偶矩的大小、正负，都可在算出ΣX、ΣY及对任选简化中心的力矩和之后确定。

另外还有一些更特殊的情况，例如：$\Sigma X \neq 0$，为正值，$\Sigma Y = 0$，$M_o = 0$；$\Sigma X = 0$，$\Sigma Y \neq 0$，为负值，$M_o \neq 0$，为正值；等等. 请读者自己考虑在这种种情况下，力系的最后简化结果。

总之，只要计算ΣX、ΣY，即可判定力系是否最后简化为合力，并可确定合力的矢量；合力作用线的位置则可用合力矩定理定出。$\Sigma X = 0$、$\Sigma Y = 0$时，力系对任选一点O的主矩$M_o = \Sigma m_o$是否等于零可判定力系是平衡还是最后简化为力偶，并可确定其力偶矩的大小及转向。

除了用投影法之外，还可用索多边形法(图解法)来简化平面任意力系，并可用此法来解决平面任意力系的平衡问题. 详细内容请参阅理论力学教材。

平面平行力系的简化可按平面任意力系的简化方法进行。

(5) 空间任意力系

空间任意力系与平面任意力系的差别只是：它的各力是在

空间任意分布而不是在同一平面上任意分布的，所以它们的简化方法基本相同．不同的地方只是：在空间任意力系的情况下，力对点之矩与力偶矩都必须用矢量表示，并且因此使这两种力系简化的最后结果有所不同．

以简化中心O为原点任取空间直角坐标系，即可将力系的主矢量表为：

$$\boldsymbol{R}'=\sum\boldsymbol{F}=(\sum X)\boldsymbol{i}+(\sum Y)\boldsymbol{j}+(\sum Z)\boldsymbol{k}。\qquad(1\text{-}7)$$

对简化中心的主矩$\boldsymbol{M}_o=\sum\boldsymbol{m}$(各附加力偶矩的矢量和)．因各附加力偶矩分别等于原力系对应的力对简化中心之矩，故$\boldsymbol{M}_o=\sum\boldsymbol{m}_o(\boldsymbol{F})$．利用力对点之矩矢在过该点的任一轴上的投影等于该力对该轴之矩这个关系，将此式投影到x、y、z轴上后，可将$\boldsymbol{M}_o$表为沿坐标轴分解的形式：

$$\boldsymbol{M}_o=[\sum m_x(\boldsymbol{F})]\boldsymbol{i}+[\sum m_y(\boldsymbol{F})]\boldsymbol{j}$$
$$+[\sum m_z(\boldsymbol{F})]\boldsymbol{k}。\qquad(1\text{-}8)$$

上面三个方括号内分别表示原力系各力对x、y、z轴之矩的代数和。

注意，如果不是以简化中心为原点，上述两种力矩之间的关系便不能应用，从而式(1-8)也就不能成立(平面任意力系中力对点之矩与力偶矩都是代数量，力对点之矩实际上已是力对轴之矩，因此没有这种限制)．

求得力$\boldsymbol{R}'$及主矩$\boldsymbol{M}_o$之后，即可将原力系简化为最后结果．在R'与M_o都不等于零的情况下，如果是平面任意力系，那就必定可最后简化为一合力，因为这时力$\boldsymbol{R}'$与$\boldsymbol{M}_o$所代表的力偶都在同一平面上，可合成为一个力．但在空间任意力系的情况下，则

(a) 如$\boldsymbol{R}'\perp\boldsymbol{M}_o$，可将力系按照平面任意力系的办法最后简化为一合力。

(b) 如$\boldsymbol{R}' \parallel \boldsymbol{M}_0$，则两者同向时,力系简化的结果是一右转**力螺旋**；反向时,是一左转力螺旋．这已是简化的最后结果．

(c) 如$\boldsymbol{R}'$与$\boldsymbol{M}_0$既不互相垂直，又不互相平行，则当两者的夹角小于90°时，力系最后简化为一个右转力螺旋；大于90°而小于180°时，最后简化为一个左转力螺旋（详见下面）．

当$\boldsymbol{R}'$与$\boldsymbol{M}_0$之一等于零时，与平面任意力系的同样情况相同：力系或者最后简化为一合力，或者简化为一力偶．前者作用在简化中心，大小、方向由力系的主矢量决定；后者的力偶矩矢等于力系对简化中心的主矩$\boldsymbol{M}_0$，不因简化中心不同而改变．

在力系最后简化为力螺旋时，我们要确定组成该力螺旋的力$\boldsymbol{R}$与力偶的矩矢，还要确定该力的作用线．这作用线称为**力系的中心轴**．在图1—1中，设已将力系（图中未画出）向O点简化得到力$\boldsymbol{R}'$及力偶矩$\boldsymbol{M}_0$．将$\boldsymbol{M}_0$沿垂直及平行于$\boldsymbol{R}$的方向分解为两个分力偶矩$\boldsymbol{m}_1$与$\boldsymbol{m}_2$，其中由$\boldsymbol{m}_1$代表的分力偶可与力$\boldsymbol{R}'$合成为力$\boldsymbol{R}$，它与力$\boldsymbol{R}'$平行、同向、等值，并与力$\boldsymbol{R}'$

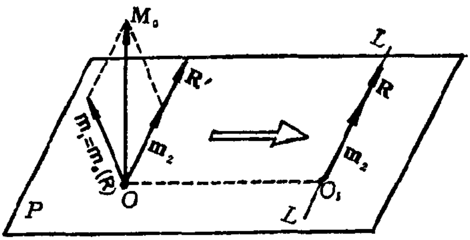

图1—1

同在垂直于$\boldsymbol{m}_1$的平面P上，其作用线L-L即为力系的中心轴．分力偶矩矢$\boldsymbol{m}_2$可画在该线上．于是原力系简化的结果是由力$\boldsymbol{R}$与力偶矩为$\boldsymbol{m}_2$的力偶组成的力螺旋．$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{m}_2$同向时为右转的，反向时为左转的．

当简化中心恰好选在中心轴 $L-L$ 上时，$\boldsymbol{m}_2$就是力系对简化中心的主矩，不因简化中心在轴上的位置不同而改变。$\boldsymbol{m}_2$是力系向不同中心（包括中心轴以外的点）简化时所得主矩当中最小的，所以中心轴也称为**最小力矩轴**。

下面求$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{m}_2$的大小、方向与**中心轴的方程式**。

$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'$，它与$\boldsymbol{M}_0$分别由式(1-7)与(1-8)确定。式(1-8)可简写为：

$$\boldsymbol{M}_0=(\sum m_x)\boldsymbol{i}+(\sum m_y)\boldsymbol{j}+(\sum m_z)\boldsymbol{k},$$

因此

$$\boldsymbol{m}_2=\left(\boldsymbol{M}_0\cdot\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}\right)\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}=\left(\boldsymbol{M}_0\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

$$=\frac{\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{R}}{R^2}\boldsymbol{R}$$

$$=\frac{1}{R^2}[(\sum m_x)(\sum X)+(\sum m_y)(\sum Y)$$

$$+(\sum m_z)(\sum Z)]\boldsymbol{R}. \tag{1-9}$$

力系中心轴的方程式可由下式推出：

$$(\boldsymbol{M}_0-\boldsymbol{M}_1)\times\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{M}_0-\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{R})]\times\boldsymbol{R}=0.$$

将此式投影到以O为原点的x、y、z轴上，利用两矢量的矢量积投影的计算公式（参看式1-1）及两种力矩的关系，得

$$\left.\begin{aligned}
&[\sum m_y-m_y(\boldsymbol{R})]R_z-[\sum m_z-m_z(\boldsymbol{R})]R_y=0,\\
&[\sum m_z-m_z(\boldsymbol{R})]R_x-[\sum m_x-m_x(\boldsymbol{R})]R_z=0,\\
&[\sum m_x-m_x(\boldsymbol{R})]R_y-[\sum m_y-m_y(\boldsymbol{R})]R_x=0.
\end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

利用式(1-2)并因 $R_x=\sum X$、$R_y=\sum Y$、$R_z=\sum Z$，得

$$m_x(\boldsymbol{R})=y_0'R_z-z_0'R_y=y_0'(\sum Z)-z_0'(\sum Y),$$

$$m_y(\boldsymbol{R})=z_0'R_x-x_0'R_z=z_0'(\sum X)-x_0'(\sum Z),$$

$$m_z(\boldsymbol{R})=x_0'R_y-y_0'R_x=x_0'(\sum Y)-y_0'(\sum X).$$

故由式（1-10）得

$$\frac{\sum m_x - y_0'(\sum Z) + z_0'(\sum Y)}{\sum X}$$
$$= \frac{\sum m_y - Z_0'(\sum X) + x_0'(\sum Z)}{\sum Y}$$
$$= \frac{\sum m_z - x_0'(\sum Y) + y_0'(\sum X)}{\sum Z}. \tag{1-11}$$

这就是力系的中心轴方程式。O'是该轴上的任意点。

例1—1 图示平板的板面上受四个力和一个力偶的作用。试将这力系简化为最简单的形式。

解 这是一个平面任意力系。任选O点为简化中心，取x、y坐标轴如图。

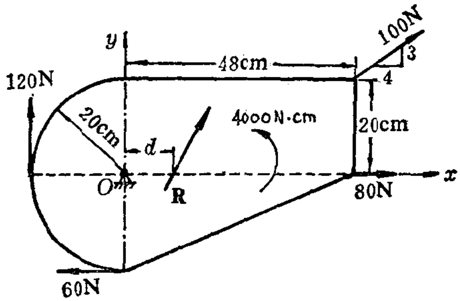

图1—2

$$\sum X = 80 + 100 \times \frac{4}{5} - 60 = 100\text{N},$$

$$\sum Y = 120 + 100 \times \frac{3}{5} = 180N.$$

因$\sum X$、$\sum Y$不等于零，故原力系最后简化为一个合力$\boldsymbol{R}$，且

$$\boldsymbol{R} = 100\boldsymbol{i} + 180\boldsymbol{j}(\text{N}).$$

为确定合力作用线的位置，需计算原力系对O点的主矩：

$$\sum m_0 = 4000 + 100 \times \frac{3}{5} \times 48 - 100 \times \frac{4}{5} \times 20 - 120 \times 20$$

$$-60 \times 20 = +1680\text{N·cm}.$$（以↶为正）

设合力作用线与x轴的交点到O点的距离为d，则

$$d = \left|\frac{\sum m_0}{\sum Y}\right| = \frac{1680}{180} = 9.33\text{cm}.$$

因合力$\boldsymbol{R}$指向右上方而$\sum m_0$为反时针方向，故合力$\boldsymbol{R}$在O点右侧，如图1—2所示。

例1—2 在一正方体上沿棱边作用有6个力如图1—3所示，各力的大小都等于P，正方体边长为a。试将此力系化为最后结果。

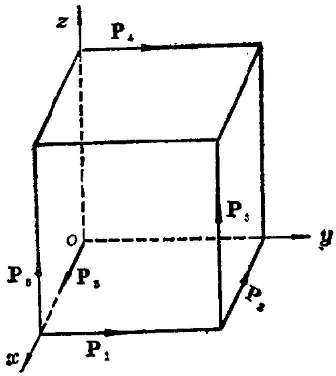

图1—3

解 以顶点O为原点取$Oxyz$坐标系如图。

$\sum X = 0$，$\sum Y = 2P$，$\sum Z = 2P$。

$\sum m_x = 0$，$\sum m_y = -2Pa$，$\sum m_z = 2Pa$。

$\therefore$ $\boldsymbol{R}' = 2P\boldsymbol{j} + 2P\boldsymbol{k}$，

$\boldsymbol{R}_0 = -2Pa\boldsymbol{j} + 2Pa\boldsymbol{k}$，

$\boldsymbol{R}' \cdot \boldsymbol{M}_0 = 2P(-2Pa) + 2P \times 2Pa = 0$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com