

LM
朗曼专题

北京朗曼数学与研究中心教研成果

• 学科专题研究系列丛书 •

主编 霍超群 储维国

数学专题

ShuXueZhuanTiYanJiu

研究

总主编 宋伯涛

直线与二次曲线

中国青年出版社

北京朗曼教学与研究中心资料

直线与二次曲线

主编 霍超群 储维国

中国青年出版社

责任编辑:李培广

封面设计:Paul Song

直线与二次曲线

主编 霍超群 储维国

*

中国青年出版社出版 发行

社址:北京东四12条21号 邮政编码:100708

三河欣欣印刷有限公司印刷 新华书店总经销

*

850×1168 1/32 7.375印张 208千字

2001年8月北京第1版 2001年8月北京第1次印刷

定价:8.00元

ISBN 7-5006-4548-1/O·29

敬告读者

《学科专题研究》系列丛书为作者精心之作，作者值此出版之际向全国千百万热心读者深表谢意。

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，本中心将本着为读者服务及负责的精神，及时帮助你排忧解难，与你共同切磋，共同研究，携手共勉，建立友谊。

作者声明：《学科专题研究》系列丛书为北京朗曼教学与研究中心专项研究成果，请读者认准封面上“朗曼专题”、“北京朗曼教学与研究中心教研成果”等字样，以防假冒。凡以《朗曼专题》及“宋伯涛总主编”名誉出版的任何其它版本均为侵权行为。

作者声明：凡与本书内容雷同的任何其它版本，均为盗版物。保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局 100101—89 号信箱北京朗曼教学与研究中心宋伯涛收，邮编 100101。
本中心 E-mail: SPTJWLSQ@163bj.com

出版前言

展望二十一世纪教育发展的未来,必将是以学生素质全面发展为前提,通过减轻学生过重的学业负担,还学生一个宽松的、有更多自由选择、自主学习的发展空间。从而做到有效地培养学生的创新意识和实践能力。这将是教育改革的一种必然趋势。为此,国家教委进行高考课程改革,推广试用新教材。在这种情况下,我们的助学用书如何适应这一变化,并与素质教育的要求相匹配呢?基于这样的思考与愿望,我们按照新教材的体系,将新教材中有关章节的内容有机组合,编写一套既相互联系,又自成体系的《数学专题研究》系列丛书。

本丛书共13分册,分别为:1.集合与简易逻辑;2.函数及其性质;3.数列、极限、数学归纳法;4.三角函数;5.向量;6.方程与不等式;7.排列、组合和概率;8.直线、平面、简单几何体;9.直线与二次曲线;10.怎样解高中数学选择题;11.怎样解高中数学应用题;12.高中数学解题方法集锦;13.高中数学重点问题详析。

本丛书在编写过程中,始终坚持以高中新教材为基础、以高考的内容和要求为主线、还兼顾拓展学生视野和进行强化训练,并有意识地引导学生亲历“做数学”的过程,并且最终得出结论。因为,与具体的知识、技能相比,探索知识的过程有利于开发学生的潜能。也可以这样说,本丛书在数学教学《大纲》的基础上,本著源于教材且高于教材的要求进行编写,并以典型常规题、创新开放题及实践应用题为线索,进行精析和指导,并且坚持了以学生为主体,以学生能力发展为根本的理念,便于学生展开自学和自练。

本丛书使用的数学符号以新教材为准,在知识点的归类讲解与拓展方面兼顾了两套教材,并在书后附上新教材与统编教材中相异数学符号对照表,供读者对照使用。

由于作者水平有限,且时间仓促,书中难免存有不尽人意之处,敬请广大读者不吝指教。

宋伯涛

2001年8月于北师大

目 录

一、直 线	(1)
§ 1.1 线段的定比分点	(1)
【学习目标】	(1)
【学法指导】	(1)
【重点知识应用】	(2)
【巩固性训练题】	(4)
【提高性训练题】	(6)
【巩固性训练题答案】	(7)
【提高性训练题答案】	(8)
§ 1.2 直线的倾斜角斜率	(10)
【学习目标】	(10)
【学法指导】	(10)
【重点知识应用】	(10)
【巩固性训练题】	(13)
【提高性训练题】	(15)
【巩固性训练题答案】	(16)
【提高性训练题答案】	(17)
§ 1.3 直线方程	(18)
【学习目标】	(18)
【学法指导】	(18)
【重点知识应用】	(19)
【巩固性训练题】	(23)
【提高性训练题】	(25)
【巩固性训练题答案】	(26)
【提高性训练题答案】	(27)
§ 1.4 两条直线的位置关系	(27)
【学习目标】	(27)

【学法指导】	(28)
【重点知识应用】	(28)
【巩固性训练题】	(31)
【提高性的训练题】	(33)
【巩固性训练题答案】	(35)
【提高性训练题答案】	(35)
§ 1.5 点到直线的距离及点关于直线的对称性	(36)
【学习目标】	(36)
【学法指导】	(36)
【重点知识应用】	(37)
【巩固性训练题】	(39)
【提高性训练题】	(41)
【巩固性训练题答案】	(42)
【提高性训练题答案】	(42)
§ 1.6 简单的线性规划	(43)
【学习目标】	(43)
【学法指导】	(43)
【重点知识应用】	(44)
【巩固性训练题】	(46)
【巩固性训练题答案】	(47)
二、曲线方程	(49)
§ 2.1 曲线与方程	(49)
【学习目标】	(49)
【学法指导】	(49)
【重点知识应用】	(49)
§ 2.2 求曲线的方程	(50)
【学习目标】	(50)
【学法指导】	(50)
【重点知识应用】	(51)
【巩固性训练题】	(54)
【提高性训练题】	(55)
【巩固性训练题答案】	(57)

【提高性训练题答案】	(57)
§ 2.3 充要条件	(58)
【学习目标】	(58)
【学法指导】	(59)
【重点知识应用】	(59)
【巩固性训练题】	(60)
【提高性训练题】	(61)
【巩固性训练题答案】	(62)
【提高性训练题答案】	(62)
§ 2.4 曲线的交点	(63)
【学习目标】	(63)
【学法指导】	(63)
【重点知识应用】	(63)
【巩固性训练题】	(65)
【提高性训练题】	(67)
【巩固性训练题答案】	(68)
【提高性训练题答案】	(69)
三、圆	(70)
§ 3.1 圆的标准方程	(70)
【学习目标】	(70)
【学法指导】	(70)
【重点知识应用】	(71)
【巩固性训练题】	(73)
【提高性训练题】	(75)
【巩固性训练题答案】	(76)
【提高性训练题答案】	(76)
§ 3.2 圆的一般方程	(77)
【学习目标】	(77)
【学法指导】	(77)
【重点知识应用】	(78)
【巩固性训练题】	(80)
【提高性训练题】	(82)

【巩固性训练题答案】	·····	(83)
【提高性训练题答案】	·····	(84)
§ 3.3 直线和圆的位置关系	·····	(85)
【学习目标】	·····	(85)
【学法指导】	·····	(85)
【重点知识应用】	·····	(85)
【巩固性训练题】	·····	(88)
【提高性训练题】	·····	(90)
【巩固性训练题答案】	·····	(91)
【提高性训练题答案】	·····	(92)
§ 3.4 与圆有关的轨迹问题	·····	(93)
【学习目标】	·····	(93)
【学法指导】	·····	(93)
【重点知识应用】	·····	(94)
【巩固性训练题】	·····	(96)
【提高性训练题】	·····	(98)
【巩固性训练题答案】	·····	(99)
【提高性训练题答案】	·····	(100)
四、椭圆	·····	(102)
§ 4.1 椭圆及其标准方程	·····	(102)
【学习目标】	·····	(102)
【学法指导】	·····	(102)
【重点知识应用】	·····	(102)
【巩固性训练题】	·····	(104)
【提高性训练题】	·····	(106)
【巩固性训练题答案】	·····	(107)
【提高性训练题答案】	·····	(108)
§ 4.2 椭圆的几何性质	·····	(108)
【学习目标】	·····	(108)
【学法指导】	·····	(109)
【重点知识应用】	·····	(109)
【巩固性训练题】	·····	(111)

【提高性训练题】	(113)
【巩固性训练题答案】	(114)
【提高性训练题答案】	(115)
§ 4.3 直线与椭圆的位置关系	(116)
【学习目标】	(116)
【学法指导】	(116)
【巩固性训练题】	(124)
【提高性训练题】	(126)
【巩固性训练题答案】	(128)
【提高性训练题答案】	(128)
阶段测试(一)	(128)
阶段测试(一)答案	(130)
阶段测试(二)	(133)
阶段测试(二)答案	(135)
五、双曲线	(137)
§ 5.1 双曲线及其标准方程	(137)
【学习目标】	(137)
【学法指导】	(137)
【重点知识应用】	(137)
【巩固性训练题】	(139)
【提高性训练题】	(140)
【巩固性训练题答案】	(141)
【提高性训练题答案】	(141)
§ 5.2 双曲线的几何性质	(141)
【学习目标】	(141)
【学法指导】	(142)
【重点知识应用】	(143)
【巩固性训练题】	(145)
【提高性训练题】	(146)
【巩固性训练题答案】	(147)
【提高性训练题答案】	(147)

§ 5.3 共渐近线的双曲线方程	(147)
【学习目标】	(147)
【学法指导】	(148)
【重点知识应用】	(148)
【巩固性训练题】	(149)
【提高性训练题】	(151)
【巩固性训练题答案】	(152)
【提高性训练题答案】	(152)
§ 5.4 直线与双曲线的位置关系	(152)
【学习目标】	(152)
【学法指导】	(152)
【重点知识应用】	(153)
【巩固性训练题】	(156)
【提高性训练题】	(158)
【巩固性训练题答案】	(159)
【提高性训练题答案】	(159)
阶段测试(一)	(160)
阶段测试(一)答案	(163)
阶段测试(二)	(163)
阶段测试(二)答案	(166)
六、抛物线	(167)
§ 6.1 抛物线及其标准方程	(167)
【学习目标】	(167)
【学法指导】	(167)
【重点知识应用】	(169)
【巩固性训练题】	(172)
【提高性训练题】	(174)
【巩固性训练题答案】	(176)
【提高性训练题答案】	(176)
§ 6.2 抛物线的几何性质	(176)
【学习目标】	(176)
【学法指导】	(176)

【重点知识应用】	(178)
【巩固性训练题】	(183)
【提高性训练题】	(185)
【巩固性训练题答案】	(186)
【提高性训练题答案】	(187)
§ 6.3 直线与抛物线的位置关系	(187)
【学习目标】	(187)
【学法指导】	(187)
【重点知识应用】	(188)
【巩固性训练题】	(192)
【提高性训练题】	(194)
【巩固性训练题答案】	(196)
【提高性训练题答案】	(196)
阶段测试(一)	(196)
阶段测试(一)答案	(198)
阶段测试(二)	(199)
阶段测试(二)答案	(202)
七、坐标轴的平移	(203)
§ 7.1 坐标轴的平移	(203)
【学习目标】	(203)
【学法指导】	(203)
【重点知识应用】	(203)
【巩固性训练题】	(204)
【巩固性训练题答案】	(206)
§ 7.2 利用坐标轴的平移化简二元二次方程	(207)
【学习目标】	(207)
【学法指导】	(207)
【重点知识应用】	(207)
【巩固性训练题】	(209)
【提高性训练题】	(210)
【巩固性训练题答案】	(211)
【提高性训练题答案】	(212)

§ 7.3 对称轴平行于坐标轴的圆锥曲线的方程	(213)
【学习目标】	(213)
【学法指导】	(213)
【重点知识应用】	(214)
【巩固性训练题】	(216)
【提高性训练题】	(217)
【巩固性训练题答案】	(219)
【提高性训练题答案】	(220)
新教材(试验修订本·必修)与统编教材中相异数学符号 对照表	(222)

一、直 线

§ 1.1 线段的定比分点

【学习目标】

1. 有向线段的概念、有向线段的长度、有向线段的数量及有向线段的长度和数量关系.
2. 两点的距离公式
3. 用解析法证明几何问题
4. 有向线段的定比分点概念、定比分点、坐标公式及中点坐标公式.

【学法指导】

1. $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 是坐标平面内的两点, 则 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

特例: 数轴上 A, B 两点的坐标 x_1, x_2 , 则 $|AB| = |x_2 - x_1|$

引伸: ① $A(x_1, y), B(x_2, y), |AB| = |x_2 - x_1|$

② $C(x, y_1), D(x, y_2), |CD| = |y_2 - y_1|$

2. 选建直角坐标系的基本方法:

用解析法证明几何问题时常常选用几何图形中互相垂直的线段所在的直线为坐标轴. 轴对称图形中的对称轴为 y 坐标轴, 中心对称图形中的对称中心为坐标原点, 也常常选用几何图形中的特殊点为坐标原点, 特殊线段在坐标轴上.

3. 若 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 定比分点为 $P(x, y)$

则①定比 $\lambda: \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$

②定比分点坐标公式 $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

特殊: 中点坐标公式 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

③ $\lambda > 0$ P 为 P_1P_2 的内分点

$\lambda < -1$ P 在 P_1P_2 的延长线上

$-1 < \lambda < 0$ P 在 P_1P_2 的反向延长线上

①定比分点公式的运用:求点的坐标、证明共线、证明某些不等式、求轨迹方程等.

【重点知识应用】

题型 1 利用两点间的距离公式解题.

例 1 若 P 与点 $P_1(0,1)$ 、 $P_2(7,2)$ 及 x 轴的距离相等,求 P 点坐标.

分析: 设出 P 点坐标,把 P 点坐标满足的条件变成方程,解方程组就可以求出 P 点坐标.要注意把条件代数化这个基本思想方法.

解: 设 P 点坐标为 $P(x,y)$ 由两点间的距离公式得:

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = (x-7)^2 + (y-2)^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = y^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$\text{由(1)得 } 7x + y - 26 = 0 \quad (3)$$

$$\text{由(2)得 } x^2 - 2y + 1 = 0 \quad (4)$$

$$\text{由(3)(4)得 } \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-17 \\ y=145 \end{cases}$$

$\therefore P$ 点坐标为 $P(3,5)$ 或 $P(-17,145)$

例 2 已知 $A(5,2a-1)$ 、 $B(a+1,a-4)$ 当 $|AB|$ 取最小值时,求实数 a 的值.

分析: 此题即 $|AB|$ 如何用 a 表示,表达式最小值如何求.注意根据题目条件转化为函数问题的基本思想.

$$\begin{aligned} \text{解: } |AB| &= \sqrt{(a+1-5)^2 + (a-4-2a+1)^2} \\ &= \sqrt{(a-4)^2 + (a+3)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 - 2a + 25} \\ &= \sqrt{2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{2}} \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $|AB|$ 有最小值为 $\frac{7}{2}\sqrt{2}$

题型 2 运用坐标法(也称解析法)解题.

运用坐标法解某些平面几何问题、代数问题、三角问题,即以坐标系为桥梁,恰当建立坐标系,设点的坐标,灵活运用有关知识,依据数形结合的原则,使问题化难为易、化繁为简.

例 3 用解析法证明:平行四边形的对角线平方和等于四条边的平方和

证明: 以 AB 所在直线为 x 轴, A 为坐标原点建立直角坐标系. $B(a, 0)$, $D(b, c)$ 则 C 点坐标为 $C(a+b, c)$

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= (a+b)^2 + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \end{aligned}$$

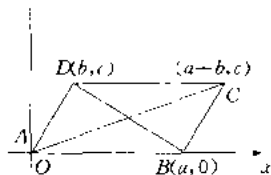
$$\begin{aligned} |BD|^2 &= (a-b)^2 + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \end{aligned}$$

$$|AD|^2 = |BC|^2 = b^2 + c^2$$

$$|AB|^2 = |CD|^2 = a^2$$

$$\therefore |AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2$$

即平行四边形的对角线平方和等于四条边的平方和



题型 3 求点的坐标

例 4 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(4, 1)$, $B(7, 5)$, $C(-4, 7)$ 试求 (1) 三边的长

(2) AB 边上的中线 CM 的长

(3) 重心 G 的坐标

(4) $\angle A$ 的平分线 AD 的长

解: (1) $|AB| = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = 5$

$$|BC| = \sqrt{(7+4)^2 + (5-7)^2} = 5\sqrt{5}$$

$$|AC| = \sqrt{(4+4)^2 + (1-7)^2} = 10$$

(2) $\because M$ 是 AB 的中点 $\therefore x_M = \frac{4+7}{2} = \frac{11}{2}$ $y_M = \frac{1+5}{2} = 3$

$$\therefore |CM| = \sqrt{\left(-4 - \frac{11}{2}\right)^2 + (7-3)^2} = \frac{5\sqrt{17}}{2}$$

(3) $\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心

$$\therefore x_G = \frac{4+7-4}{3} = \frac{7}{3}, y_G = \frac{1+5+7}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\therefore G\left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

(4) $\because D$ 为 $\angle A$ 的平分线与 BC 的交点,

$$\therefore D \text{ 分 } \overline{BC} \text{ 所成的比 } \lambda = \frac{BD}{DC} = \frac{|BD|}{|DC|}$$

$$\text{根据角平分线的性质 } \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x_D = \frac{x_B + \lambda x_C}{1 + \lambda} = \frac{7 + \frac{1}{2} \cdot (-4)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$$

$$y_D = \frac{y_B + \lambda y_C}{1 + \lambda} = \frac{5 + \frac{1}{2} \times 7}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{17}{3}$$

$$\therefore |AD| = \sqrt{\left(4 - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{17}{3}\right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

【巩固性训练题】

一、选择题

- 已知两点 $A(5, 2)$ 和 $B(-3, 4)$, A, B 在 y 轴上的射影分别是 A', B' , 则有向线段 $\overline{B'A'}$ 的数量为 ()
 A. -2 B. 2 C. 8 D. -8
- 设 $Q(1, 2)$, 在 x 轴有一点 P , 且 $|PQ| = 5$, 则点 P 的坐标是 ()
 A. $(0, 0)$ 或 $(2, 0)$
 B. $\{1 - \sqrt{21}, 0\}$
 C. $\{1 - \sqrt{21}, 0\}$
 D. $\{1 + \sqrt{21}, 0\}$ 或 $\{1 - \sqrt{21}, 0\}$
- 以 $A(-1, 1), B(2, -1), C(1, 4)$ 为顶点的三角形是 ()
 A. 锐角三角形 B. 直角三角形
 C. 等腰三角形 D. 等腰直角三角形
- 若点 B 分 $\overline{AC}$ 的比为 $\frac{1}{2}$, 则点 C 分 $\overline{BA}$ 的比是 ()
 A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 3
- 设点 A 在 x 轴上, 点 B 在 y 轴上, AB 的中点是 $P(2, -1)$, 则 $|AB|$ 等于 ()