高等学校教学参考书

概率论与数理统计习题集

华东师范大学数学系 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

概率论与数理统计习题集

华东师范大学数学系 编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书编选了概率论基础、数理统计、随机过程初步的习题共1430道，每章附有内容提要，书末有习题答案。可供高等院校有关专业的师生参考。

高等学校教学参考书

概率论与数理统计习题集

华东师范大学数学系　编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 13.25　字数 319,000

1982年3月第1版　1982年9月第1次印刷

印数 00,001—40,500

书号 13012·0735　　定价 1.25 元

前　言

在数学的学习中，做习题可以帮助学生正确理解和熟练掌握数学中的概念和定理，它也是引导学生走向研究数学和把数学用于实际的一座桥梁。所以做一定数量的习题是学好数学的一个重要环节。一门数学课能有一本习题集作为教学参考书是广大教师和学生的一个共同愿望。我们编写这本《概率论与数理统计习题集》正是为了实现这个共同的愿望。

概率论与数理统计是数学的一个有特色的分支，它的思想方法别具一格，它所研究的问题别开生面，它的解题技巧更是多种多样。我们编纂这本习题集就是想把这些特色能通过一道一道习题充分地反映出来，引起学生对这门学科的浓厚兴趣，扩大他们的眼界，加强他们的基础训练。因此这本习题集可以认为是这门课程的一种补充。

这本习题集共分九章，前四章为概率，后四章为数理统计，第九章为随机过程。每章开头附有内容提要，说明基本概念和基本结论。每章习题略加分类。习题集末尾附有习题答案。为了发挥习题集的效用，我们竭诚恳求读者切勿将习题解答汇编成册，广为流传。因为缺少独立作业，造成依赖心理，对学好这门课程是极为不利的。

这本习题集共收集和编纂了概率论与数理统计习题一千四百余道，大体分为基本训练题和提高题两大类。基本训练题保持一定数量的重复。在这些习题中有容易的，也有需要稍加思考的，对于较难的则打上*号。本习题集可供综合大学、工科和师范院校学专业使用，经过选择也可供其他非数学专业使用。对于初学

最好能在教师指导下根据专业特点和学生情况选部分习题独立完成，这样可以较快地达到正确理解和熟练掌握教学内容的目的。倘若全本照做，花费许多时间，可能难以达到预期的效果。其中部分题目，特别是*号题可作为学生课外小组活动内容。在缺乏指导的情况下，*号题不宜多做。

这本习题集的习题是我们教研室诸任课同志在历年教学中收集起来的，最近在魏宗舒教授主持下做了一番整理编纂验算工作。参加这项工作的有茆诗松、何声武、王万中、周纪芗、梁小筠、周延昆、王玲玲、汪振鹏、程依明、胡应平等同志。在编写过程中，我室其他同志和部分大学生作了大力支持和襄助，在此特向他们致谢。

因限于水平，这本习题集的内容与范围颇多疵议之处，错误之处亦在所难免，读者如能惠予批评指正，以匡不逮，使本习题集发挥较大的作用，这将是对编者最好的支持与鞭策。

华东师范大学数学系
概率论与数理统计教研室

目　　录

附表

第一章　随机事件和概率

内 容 提 要

一、随机事件的运算

随机现象的某种结果称为随机事件(简称事件)，以拉丁字母 A、B、C、…表示。不可能事件记为 $\emptyset$(或 V)。必然事件记作 Ω(或 U)。

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。如果两个事件满足 $A\subset B$ 和 $B\subset A$，则称这两个事件相等，记作 $A=B$。

称"两个事件 A 与 B 中至少有一个发生"这一事件 C 为事件 A 与事件 B 的并(或和)，记作 $C=A\cup B$；称"两个事件 A 与 B 同时发生"这一事件 D 为事件 A 和事件 B 的交(或积)，记作 $D=A\cap B$ (或 $D=AB$)。设有事件族 $\{A_t, t\in T\}$，其中 T 是指标集，可以是有限集，也可以是无限集，称"事件族 $\{A_t, t\in T\}$ 中至少有一个事件 A_t 发生"这一事件 C 为事件族 $\{A_t, t\in T\}$ 的并(或和)，记作 $C=\bigcup\limits_{t\in T}A_t$；称"事件族 $\{A_t, t\in T\}$ 中诸事件 A_t 全都发生"这一事件 D 为事件族 $\{A_t, t\in T\}$ 的交(或积)，记作 $\bigcap\limits_{t\in T}A_t$。

若两个事件 A 与 B 满足 $AB=\emptyset$，则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥)；若事件 A 与 B 满足 $A\cup B=\Omega$，且 $AB=\emptyset$，则称它们为互余事件(或 A 是 B 的对立事件，B 是 A 的对立事件)。并记为 $B=\bar{A}$或 $A=\bar{B}$。

事件的运算与集合的运算相当。必然事件、不可能事件、事件分别相当于全空间、空集、全空间的某个子集，事件的并、差、交、对立事件分别相当于集的并、差、交、余集。由集的运算性质可推知相应的事件运算的性质，如事件的并(交)满足交换律、结合律、事件的并(交)对交(并)满足分配律，事件运算中的对偶法则等等。

二、古典概型

随机现象的每一基本结果称为样本点，样本点的全体称为样本空间。若随机现象的样本空间满足：(1) 只有有限个样本点；(2) 每个样本点的发生都

是等可能的。则称这类随机现象为古典概型。在古典概型情况下，事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点个数}}{\text{样本点总数}}$$

三、几何概率

当随机试验的样本空间是某一个区域，并且任意一点落在度量（长度、面积和体积）相同的子区域内是等可能的，则事件 A 的概率可定义为

$$P(A)=\frac{S_A}{S}$$

其中 S 是样本空间的度量，S_A 是构成事件 A 的子区域的度量。

四、概率空间、概率的性质

Ω 为样本空间，$\mathscr{F}$ 为 Ω 的某些子集组成的集类，满足：(1)$\Omega\in\mathscr{F}$，(2) 若 $A_n\in\mathscr{F}$，$n=1, 2, \cdots$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathscr{F}$，(3)若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\bar{A}\in\mathscr{F}$。$\mathscr{F}$ 中的集合就表示随机事件。定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个非负函数 $P(A)$，若满足 (1) 对任意 $A\in\mathscr{F}$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$，(2)$P(\Omega)=1$，(3)若 $A_n\in\mathscr{F}, n=1, 2, \cdots$，且 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$（可列可加性），就称 $P(A)$为事件 A 的概率，称$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间。

概率的基本性质有：

(1) $P(\varnothing)=0$。

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$（有限可加性）

(3) $P(\bar{A})=1-P(A)$。

(4) 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$。

(5) 若 $B_n\in\mathscr{F}$，$n=1, 2, \cdots$，$B_n\supset B_{n+1}$，$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=\varnothing$，则

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n)=0 \text{（连续性）}$$

五、条件概率

若 $P(B)>0$ 时，称 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ 为“在已知事件 B 发生的条件下事件 A 的条件概率”。

［全概率公式］ 设 $B\subset\bigcup_{k=1}^{n} A_k$，且 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

［贝叶斯公式］ 设 $B\subset\bigcup_{k=1}^{n}A_k$，且 $A_i\cap A_j=\emptyset(i\neq j)$，$P(B)\neq 0$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}$$

六、独立性、贝努里概型

称事件 A 与 B 独立，若 $P(AB)=P(A)P(B)$。称事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，若对任意 $k(1<k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

称事件 A_1，A_2，…，A_n 两两独立，若对任意 $1\leqslant i_1<i_2\leqslant n$，有 $P(A_{i_1}A_{i_2})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})$。事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立一定两两独立，两两独立不一定相互独立。

做 n 次随机试验，每次试验的结果是 A 或 $\bar{A}$ 且 $P(A)=p$，各次试验的结果相互独立，这样一种概型称为贝努里概型。在贝努里概型中，n 次试验中事件 A 发生 m 次的概率等于 $\binom{n}{m}p^mq^{n-m}$（其中 $q=1-p$）。

§1.1 事件的运算

1-1. 写出下列随机试验的样本空间及下列事件中的样本点：

(1) 掷一颗骰子，出现奇数点。

(2) 将一枚均匀硬币抛二次，

A：第一次出现正面，

B：两次出现同一面，

C：至少有一次出现正面。

(3) 一个口袋中有 5 只外形完全相同的球，编号分别为 1、2、3、4、5，从中同时取 3 只球，球的最小号码为 1。

(4) 在 1、2、3、4 四个数中可重复地取两个数，一个数是另一个数的 2 倍。

(5) 将 a、b 两个球随机地放到三个盒子中去，第一个盒子中至少有一个球。

(6) 10 件产品中有一件废品，从中任取两件得一件废品。

(7) 一个口袋中有 2 只白球、3 个黑球、4 个红球，从中任取一球，

A：得白球， B：不得红球。

(8) 两个口袋各装一个白球与一个黑球，从第一袋中任取一球记下其颜色放入第二袋，搅匀后再从第二袋中任取一球，两次取出的球有相同的颜色。

(9) 掷两颗骰子，

A：出现的点数之和为奇数，且恰好其中有一个 1 点，

B：出现的点数之和为偶数，但没有一颗骰子出现 1 点。

(10) 重复掷硬币，掷了偶数次后才第一次得到正面。

1-2. 在数学系学生中任选一名学生，令事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示该生是三年级学生，事件 C 表示该生是运动员。

(1) 叙述事件 $AB\bar{C}$ 的意义。

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

(3) 什么时候关系式 $C\subset B$ 是正确的？

(4) 什么时候 $\bar{A}=B$ 成立？

1-3. 靶子由 10 个同心圆组成，半径分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_{10}$，且 $r_1<r_2<\cdots<r_{10}$。以事件 A_k 表示命中点在半径为 r_k 的圆内，叙述下列事件的意义：

(1) $\bigcup\limits_{k=1}^{6} A_k$， (2) $\bigcap\limits_{k=1}^{8} A_k$，

(3) $\bar{A}_1A_2$。

1-4. 一个工人生产了 n 个零件，以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品 $(1\leqslant i\leqslant n)$。用 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 表示下列事件：

(1) 没有一个零件是次品； (2) 至少有一个零件是次品；

(3) 仅仅只有一个零件是次品；

(4) 至少有两个零件不是次品。

（在下列 5～16 各题中，大写字母均表示随机事件）

1-5. 将下列事件用 A、B、C 表示出来：

(1) A 发生，　　(2) 只有 A 发生，

(3) A 与 B 都发生而 C 不发生，

(4) 三个事件都发生，

(5) 三个事件中至少有一个发生，

(6) 三个事件中至少有二个发生，

(7) 三个事件中恰好发生一个，

(8) 三个事件中恰好发生二个，

(9) 三个事件都不发生，

(10) 三个事件中不多于二个事件发生，

(11) 三个事件中不多于一个事件发生。

1-6. 证明下列各式：

(1) $A \cup B = B \cup A$，　　(2) $A \cap B = B \cap A$，

(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

(4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$，

(5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，

(6) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$。

1-7. 证明下列各式：

(1) $\overline{\overline{A}} = A$，　　(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，

(3) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$，　　(4) $A - B = A \cap B$，

(5) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$，

(6) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$。

1-8. 证明下列关系式相互等价：

$A \subset B$，$\overline{A} \supset \overline{B}$，$A \cup B = B$，$A \cap B = A$，$A \cap \overline{B} = \emptyset$

1-9. 证明下列各式：

(1) $A\cup B=AB\cup(A-B)\cup(B-A)$,

(2) $A-B=A-(A\cap B)$,

(3) $\overline{(A-B)\cup(B-A)}=AB\cup\overline{A}\overline{B}$,

(4) $(A-B)\cup(B-A)=[(\overline{AB})-(\overline{A}\overline{B})]\cup[(\overline{AB})-(\overline{A}\overline{B})]$。

1-10. 化简下列各式:

(1) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$,

√(2) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)$,

(3) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$。

1-11. 指出下列各式成立的条件并说明条件的意义:

(1) $ABC=A$,　　(2) $A\cup B\cup C=A$,

(3) $A\cup B=A\cap B$,　　(4) $(A\cup B)-A=B$,

(5) $A\cup B=\overline{A}$,　　(6) $AB=\overline{A}$。

1-12.* 什么样的事件 X 满足下列等式?

(1) $(\overline{X\cup A})\cup(\overline{X\cup A})=B$,

√(2) $A\cup X=A\cup B$,

(3) $AB\cup X=(A\cup C)\cap(B\cup C)$。

1-13. 指出下列关系式中哪些是正确的? 哪些是错误的? 应如何改正? 哪些成立是有条件的? 条件是什么?

(1) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$,

(2) $ABC=AB(C\cup B)$,

(3) $A\cup B\cup C=A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$,

(4) $A\cup B=(A-AB)\cup B$,　　(5) $AB\cup BC\cup CA\supset ABC$,

(6) $AB\cup BC\cup CA\subset A\cup B\cup C$,

(7) $(A\cup B)-A=B$,　　(8) $A\overline{B}\overline{C}\subset A\cup B$,

(9) $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$,

(10) $(\overline{A\cup B})C=(\overline{A}C)\cup(\overline{B}C)$,

(11) $(\overline{A\cup B})C=\overline{A}\overline{B}C$,

(12) $(\overline{A\cup B})C=C-C(A\cup B)$。

1-14.* 证明：若$(A-B)\cup(B-A)=(C-D)\cup(D-C)$，则

$$(A-C)\cup(C-A)=(B-D)\cup(D-B)$$

1-15.* 证明：若$(A-B)\cup(B-A)\subset C$，则$A\subset(B-C)\cup(C-B)$的充要条件是$ABC=\emptyset$。

1-16. 把$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$表示成不相容事件的和。

1-17.* 以A_n表示在第n次重复试验中事件A出现，$B_{n,k}$表示在前n次试验中A出现了k次。

(1) 用A_i表示出$B_{4,2}$,

(2) 叙述事件$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m\right)$及$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m\right)$的意义,

(3) 叙述事件$B_m=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{m}B_{n,k}\right)$的意义,

(4) 若$B=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}B_m$，下列关系式是否成立：

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\overline{B},\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\subset B$$

§1.2 古典概型

1-18. 一部五卷文集任意地排列到书架上，问卷号自左向右或自右向左恰好为12345的顺序的概率等于多少？

1-19. 在分别写有2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13的八张卡片中任取两张，把卡片上的两个数字组成一个分数，求所得分数为既约分数的概率。

1-20. 有五条线段，长度分别为1, 3, 5, 7, 9。从这五条线段中任取三条，求所取三条线段能构成三角形的概率。

1-21. 把一个表面涂有颜色的立方体等分为一千个小立方体，从这些小立方体中任取一个，求所取小立方体有k面($k=0,1,2,3$)涂有颜色的概率P_k。

1-22. 一个小孩用十三个字母 $A, A, A, C, E, H, I, I, M, M, N, T, T$ 作组字游戏。如随机地排列字母，问他组成“$MATHEMATICIAN$”的概率等于多少？

1-23. 甲从 2, 4, 6, 8, 10 中任取一数，乙从 1, 3, 5, 7, 9 中任取一数。求甲取的数大于乙取的数的概率。

1-24. 在中国象棋的棋盘上任意地放上一只红“车”及一只黑“车”，求它们正好可以互相吃掉的概率。

1-25. 一批灯泡有 40 只，其中 3 只是坏的，从中任取 5 只检查。问：(1) 5 只都是好的概率为多少？(2) 5 只中有 2 只坏的概率为多少？

1-26. 一幢 10 层楼中的一架电梯在底层走上 7 位乘客。电梯在每一层都停，乘客从第二层起离开电梯，设每位乘客在每层离开都是等可能的，求没有 2 位乘客在同一层离开的概率。

1-27. 从一副扑克牌(52 张)中任取 6 张，求得 3 张红色的牌 3 张黑色的牌的概率。

1-28. 掷两颗骰子，求所得的两个点数中一个恰是另一个的两倍的概率。

1-29. 掷三颗骰子，求所得的三个点数中最大的一个恰是最小的一个的两倍的概率。

1-30. 一个班级有 $2n$ 个男生及 $2n$ 个女生，把全班学生任意地分成人数相等的两组，求每组中男女生人数相等的概率。

1-31. 某城市的自行车共 10000 辆，牌照编号从 00001 到 10000。问事件“偶然遇到的一辆自行车，其牌照号码中有数字 8”的概率为多大？

1-32. 从 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 中随机地取出两个数（不重复）问其中一个小于 $k(1<k<n)$、另一个大于 k 的概率是多少？

1-33. 有 $2n$ 个数字，其中 n 个是 0，n 个是 1。从中任取两数，

求所取两数之和为 0 或偶数的概率。

1-34. 在十个数字 0, 1, 2, …, 9 中任取四个(不重复), 能排成一个四位偶数的概率是多少?

1-35. 四颗骰子掷一次至少得一个一点与两颗骰子掷 24 次至少有一次得两个一点, 哪一个概率大?

1-36. 从一副扑克牌(52 张)中任取 10 张, 问:

(1) 至少有一张"A"的概率是多少?

(2) 至少有二张"A"的概率是多少?

1-37. 一个中学有十五个班级, 每班选出三个代表出席学生代表会议, 从 45 名代表中任选 15 名组成工作委员会。求下列事件的概率:

(1) 一年级(1)班在委员会中有代表,

(2) 每个班级在委员会中都有代表。

1-38. 设甲袋中有 a 只白球 b 只黑球, 乙袋中有 c 只白球 d 只黑球。从两袋中各取一球, 求所得两球颜色不同的概率。

1-39. 设一只口袋中装有 a 只白球 b 只黑球, 从中陆续取三只球(不返回), 求三只球依次为黑白黑的概率。

1-40. 从数 1, 2, …, n 中任取两数, 求所取两数之和为偶数的概率。

1-41. 任取两个正整数, 求它们之和为偶数的概率。

1-42. 任取一个正整数, 求下列事件的概率:

(1) 该数的平方的末位数字是 1,

(2) 该数的四次方的末位数字是 1,

(3) 该数的立方的最后两位数字是 1。

1-43. 设一个人的生日在星期几是等可能的, 求 6 个人的生日都集中在一星期中的某两天但不是都在同一天的概率。

1-44. 一个小组有 8 个学生, 问这 8 个学生的生日都不相同