

高等学校试用教材

结 构 力 学

上海交通大学范祖尧 郁永熙 主编

机械工业出版社

高等学校试用教材

结 构 力 学

上海交通大学范祖尧 郁永熙 主编

机械工业出版社

结 构 力 学

上海交通大学范祖尧 郁永熙 主编

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ · 印张 $25 \frac{1}{2}$ · 字数 630 千字

1980 年 7 月北京第一版·1983 年 3 月北京第三次印刷

印数 9,101-20,100 · 定价 2.60 元

*

统一书号: 15033·4874

前 言

本书是根据 1978 年 4 月在天津召开的高等学校一机部对口专业座谈会精神, 和 1978 年在上海和太原召开的矿山、工程、起重运输、石油矿场机械四个专业教材会议所制订的《结构力学》教材编写大纲编写的。

全书共分十七章, 第一章到十二章的内容主要包括: 结构机动分析, 静定结构, 影响线, 结构位移, 超静定结构的力法, 位移法及力矩分配法, 受压杆件稳定性, 板的弯曲与稳定性, 以及薄壁杆件理论基础等; 第十三章到十七章的内容主要包括: 杆系及其稳定性的、板的、结构动力学的有限单元法, 以及能量原理简介等。

在编写过程中尽量保留了原有教材《起重运输机械结构力学》(上海交大编, 中国工业出版社出版, 1962 年) 中的优点与特点, 加强了理论的系统性与严密性, 贯彻“少而精”的原则, 力求概念清楚; 对于结构力学的经典理论给予充分的重视。另一方面注意到近年来结构力学的最新成就与发展, 在本书内容中引进了有限单元法的理论与应用, 并从第七章开始逐渐应用矩阵分析方法。

本书可作为高等工业院校机械类专业的教材, 也可供从事机械和结构方面工作的工程技术人员参考。

本书由上海交通大学机械工程系范祖尧、郁永熙主编。参加编写的有范祖尧(五、六、十七章), 郁永熙(一、十三、十四、十六章), 周国梁(七、八章), 黄秉刚(四、九、十一、十五章), 王殿臣(二、三章), 占侃(十章)及上海海运学院朱从鉴(十二章)。大连工学院机械系刘守成负责主审。一机部教材编辑室编辑孙祥根对本书进行了认真的编审, 在此对他表示感谢。

限于我们的水平, 书中一定有不妥及错误之处, 希望读者批评指正。

编 者

1979 年 11 月

目 录

前言		§ 7-1 概述	137
第一章 绪论	1	§ 7-2 转角位移方程	137
§ 1-1 结构力学的对象与任务	1	§ 7-3 基本原理	142
§ 1-2 发展简史与方向	2	§ 7-4 用位移法计算超静定刚架	152
§ 1-3 结构的分类、支座、载荷和计算简图	3	第八章 力矩分配法	155
第二章 结构的机动分析	8	§ 8-1 概述	155
§ 2-1 基本概念	8	§ 8-2 基本原理	155
§ 2-2 自由度	9	§ 8-3 示例	158
§ 2-3 几何组成分析	15	§ 8-4 杆端弯曲刚度	161
§ 2-4 平面桁架机动分析	18	§ 8-5 无线位移结构的简化计算	163
§ 2-5 空间桁架机动分析	21	§ 8-6 有线位移刚架的计算	167
第三章 静定结构	23	§ 8-7 无剪力分配法	170
§ 3-1 基本概念	23	§ 8-8 替代刚架法	174
§ 3-2 桁架类别与型式	25	§ 8-9 变截面杆件刚架的计算	177
§ 3-3 平面桁架的内力分析	27	第九章 受压杆件稳定性	180
§ 3-4 节点图解法	32	§ 9-1 基本概念	180
§ 3-5 空间桁架的解法	37	§ 9-2 临界力的确定方法	182
§ 3-6 空间桁架受扭分析	40	§ 9-3 中心压杆稳定性	186
§ 3-7 桁架结构受扭示例	46	§ 9-4 剪力对临界力的影响	190
§ 3-8 静定刚架的分析与内力图	52	§ 9-5 组合杆件的稳定性	192
第四章 影响线	56	§ 9-6 变截面杆件的稳定性	195
§ 4-1 基本概念	56	§ 9-7 偏心压杆的稳定性	200
§ 4-2 简支梁的内力影响线	57	第十章 板的弯曲	204
§ 4-3 桁架杆件内力影响线	63	§ 10-1 弹性理论基本知识	204
§ 4-4 广义影响线(最大内力分布图)	69	§ 10-2 板的定义与类别	209
第五章 结构位移	74	§ 10-3 板的基本假设和简化	210
§ 5-1 概述	74	§ 10-4 板弯曲的基本方程式——弹性曲面微分方程式	211
§ 5-2 功和能的概念及其计算	76	§ 10-5 板的内力及应力公式	214
§ 5-3 虚功原理	86	§ 10-6 边界条件	219
§ 5-4 结构位移计算的单位载荷法	90	§ 10-7 简支矩形板的计算	221
第六章 超静定结构的概念及力法计算	110	§ 10-8 板在横向载荷和中面力共同作用下的弯曲	225
§ 6-1 超静定结构的概念	110	§ 10-9 圆板弯曲	227
§ 6-2 力法基本原理	121	第十一章 板的稳定	233
§ 6-3 用力法计算超静定结构	130	§ 11-1 基本概念	233
第七章 位移法	137	§ 11-2 板弯曲的应变能及求解临界	

载荷的主要方法	233	§ 13-7 载荷处理	333
§ 11-3 矩形板受均布压力的稳定性	237	第十四章 板的有限单元法	334
§ 11-4 在弯曲与压缩共同作用下 简支矩形板的稳定性	244	§ 14-1 概述	334
§ 11-5 切应力作用下矩形板的稳定性	246	§ 14-2 平面三角形板单元的刚度矩阵	335
§ 11-6 切应力与压应力联合作用下 板的稳定性	247	§ 14-3 平面矩形板单元的刚度矩阵	338
§ 11-7 板的弹塑性失稳	249	§ 14-4 板单元弯曲刚度矩阵	342
第十二章 薄壁杆件理论基础	252	§ 14-5 矩形板的弯曲计算	347
§ 12-1 基本概念	252	第十五章 杆件系统稳定性的 有限单元法	350
§ 12-2 薄壁梁的弯曲	254	§ 15-1 基本概念	350
§ 12-3 薄壁杆件的扭心计算	258	§ 15-2 铰接杆件的几何刚度矩阵	352
§ 12-4 自由扭转与约束扭转的概念	261	§ 15-3 梁单元的几何刚度矩阵	354
§ 12-5 开口薄壁杆件的变形和位移	262	§ 15-4 杆件的临界载荷	358
§ 12-6 约束扭转法向应力和双力矩	264	§ 15-5 杆件系统的临界载荷	362
§ 12-7 约束扭转切应力和 约束扭转力矩	269	第十六章 结构动力学	371
§ 12-8 开口薄壁杆件扭角的微分方程	274	§ 16-1 基本概念	371
§ 12-9 闭口薄壁杆件的约束扭转	284	§ 16-2 单自由度系统的振动	371
第十三章 杆件系统的有限单元法	294	§ 16-3 多质点结构系统的振动	379
§ 13-1 有限单元法的基本概念	294	§ 16-4 分布质量系统的振动 (有限单元法)	386
§ 13-2 结构的离散	298	§ 16-5 固有振型的正交性与多自由度 弹性系统的动力响应	391
§ 13-3 刚度矩阵与柔度矩阵的概念	301	第十七章 能量原理简介	398
§ 13-4 桁架杆件与刚架杆件的 刚度矩阵	305	§ 17-1 概述	398
§ 13-5 坐标变换	317	§ 17-2 基于虚功原理的能量原理	398
§ 13-6 位移法平衡方程	322	§ 17-3 基于余虚功原理的能量原理	402

第一章 绪 论

§ 1-1 结构力学的研究对象与任务

结构力学是固体力学中的一个重要分支。在近代的工程技术领域内,广泛地应用结构力学的理论。建筑工程中的厂房和桥梁设计,飞机结构、船舶结构的设计,起重运输机械和工程机械中的金属结构设计,热力机械的结构以及矿井的井架等设计,都必须应用结构力学的基本理论与计算方法,才能使设计对象完善地满足使用要求。总括起来,凡是设计承受各种载荷的结构物时,都要应用到结构力学的理论。工程技术所指的结构是由许多单元件(例如杆件、板或壳等)所组成的整体,它用来支持或承受各种外来载荷。因此结构力学是研究上述结构物的整体及其各个组合单元件的力学性能的理论,也就是研究结构在静力、动力及其它因素作用下结构的强度、刚度和稳定性的理论。

结构力学与材料力学的主要区别,在于前者研究的对象是整个结构体系及各单元互相之间的关系,而后者主要研究单个杆件的力学性能,两者既有区别,但又有密切的联系,有时它们研究的对象不能作出严格的区分。弹性力学也是研究单元体的,例如杆件、板或壳等,但是它的研究方法跟材料力学不同,它不像材料力学那样利用简化的假设,而是采用比较严格的假设和比较精确的数学方法,所得到的解答也比材料力学中所得到的解答更加精确。塑性力学是研究单元体或结构在材料处于塑性阶段时的力学性能的理论。

自从五十年代出现数字电子计算机以后,大大地推动了结构力学的发展。当代最明显的一个特点,就是结构分析广泛地采用矩阵方法和有限单元法,使原来用古典力学理论难以求解或无法计算的问题,可得到比较满意的解决,并提供了一种迅速而准确、并能分析复杂结构的计算方法,例如对于一些大型的、复杂的结构,或复杂受力状态下的结构,有关的强度、刚度、稳定性及动力学等的计算问题,都逐渐得到了解决。由于在结构力学中广泛采用了数字电子计算机,使得结构力学的研究内容和研究的方法更加丰富,而且有新的特色,例如,研究某一理论问题或计算方法时,必须和使用电子计算机作为一个条件而加以考虑。有限单元法就是在这个基础上发展起来的。又如,过去把结构分成静定和超静定两类。但是,如果用有限单元法求解,这个区分已显得没有什么必要了,因为,静定和超静定结构求解时的方法完全是一样的;再由于结构力学中引入了矩阵理论以后,广泛应用了多维空间的概念,使得在力学理论的阐述和计算方法上比过去更加简洁和明了得多。基于以上这些原因,本书内容的叙述或公式的推导和表达方式,尽量使其能适应计算机计算的要求。但是,这并不意味着可以忽视结构力学基本理论和概念的学习和研究。适用于计算机计算的方法都是从这些基本理论推导而来。同时,还应该指出,必须重视手算的技能,因为运用手算,对于掌握基本理论与理解基本概念仍然是十分重要的,而且在目前条件下,手算还是必不可少的一种基本手段,即使在将来,使用电子计算机非常普遍的情况下,手算亦不能忽视或甚至偏废。

§ 1-2 发展简史与方向

结构力学在十九世纪初叶才作为力学的一个分支逐步发展成为一门独立的学科，它也是从古代开始随着生产的发展和社会的进步而发展的。古代仰韶文化期的我国人民对物体的重心就有了认识。在春秋战国时期，就开始应用简单的机械，如杆件、滑车、辘轴、桔槔、辘轳等，因而对力和力矩有了初步的认识。以后在长期的器物制造和工程建筑中，人们逐渐懂得了材料的性能，而且了解了材料会变形的性能。《墨经》中以弯曲的现象经验地区分了不同性质的材料。在《荀子》中论述了材料的塑性变形问题。早在春秋战国时期，就开始修建了宏伟的万里长城，建造这一伟大建筑物的我国劳动人民，已经具备了丰富的结构力学知识。公元前 257 年，在山西蒲州（现在的风凌渡），劳动人民架设了横跨黄河的大浮桥，显示了我国古代人民在结构力学方面的卓越水平。河北省赵县的安济桥（亦称赵州桥），建于公元 605～618 年间，离开现在已经一千三百多年，经历了洪水、地震等自然条件的袭击和一千多年使用的考验，依然巍然挺立雄姿焕发。该桥是跨度为三十七米的开式拱桥，布局合理美观，造型大方，气势雄壮，比十九世纪欧洲兴建的同类桥，早了一千二百年，充分显示了该桥的杰出设计者李春及建桥工人在力学方面的高度水平。另外，如众所周知，我国古代人民在建筑和造船技术方面都有悠久历史，这些充分说明，我国古代人民对力学的发展作出了许多重大贡献。后来，由于长期的封建统治和帝国主义的侵略，使得我国在力学方面的发展受到了阻碍。新中国成立后，我国在结构力学方面又有了许多重大的发展，例如，我国技术人员和工人自己设计建造了南京长江大桥，万吨级轮船，人造卫星，150 吨起重量的门座起重机，200 吨回转式浮式起重机等许多巨型或特殊结构；另外最近几年，我国科技人员在固体力学的研究方面取得了新的成就。

在国外，十七世纪中叶，意大利科学家伽利略开始研究了强度理论，标志着“材料力学”开始形成了一种专门的学科。到了十九世纪前半期，由于资本主义的发展，需要建造许多现代化的工厂建筑物、铁路、大型的桥梁，逐渐形成了力学的一个分支：结构力学。以后，随着资本主义商业贸易的发展，需要先进的交通运输工具，因此结构力学在机械、造船和飞机制造中又得到进一步的应用和发展。概括来说，十九世纪末到二十世纪初，结构力学主要研究梁、拱和桁架的计算理论。到本世纪的二十年代至三十年代，比较集中地研究了刚架计算理论，到四十年代以后开始研究板、壳、薄壁杆件和结构动力学等理论。

本世纪五十年代开始，由于电子计算机的出现，大大推动了结构力学的发展。对于过去许多无法解决的问题得到了解决，并且提出了新的研究方向。特别在广泛应用矩阵理论和采用有限单元法以后，在结构力学中开辟了数值解法的新领域。可以说，在这个领域内，目前还有许多研究课题需要进一步开展，特别是对于大型的、复杂的结构计算理论和方法，目前研究得还是很不够的。当前，任何计算机（即使是最先进的计算机）的计算速度和单元存储量都是有限的。因而每一种新的计算方法或理论必然要考虑电子计算机的计算速度。另外新的计算方法或理论必须考虑计算结果的误差和收敛性，有限单元法作为一种方法的基本原理来说，日趋成熟，但目前仍在继续发展中。有限单元法的具体应用方面的研究，发展前途是极为宽广的。

目前对于结构的非线性计算方面，例如结构的材料处于弹塑性范围的力学性能方面的研

究,也是一个重要的方向。由于力学工作者有了电子计算机作为有效的计算工具以后,提出了许多实用的计算理论和方法。但是有许多理论问题还没有得到彻底的解决,例如,结构在复杂条件下,在材料处于塑性阶段时的稳定性问题,振动问题等。

由于当前科学技术水平的不断提高,生产实践向力学工作者提出了许多新的课题,例如在高温或极低温条件下的结构力学问题,其它介质(如气流、水流、地震和冲击波)对结构强度的影响问题,结构的非线性问题,稳定振动问题,工程结构物的优化设计问题等等。总之,当前结构力学工作者的任务,应该致力于研究与探讨生产实践所提出的对国民经济和基本理论有重大影响的课题,为人类做出应有的贡献。

§ 1-3 结构的分类、支座、载荷和计算简图

一、结构的类型很多,对结构进行分类,主要目的在于区分各种不同的结构构造,找出相同类型结构的共同点,以利于计算和制造。结构可以按不同的方法加以分类,这里主要按照组成结构的单元体形状,杆件之间连接方式,以及组成结构的单元体和载荷在空间的相互位置等三个方面进行分类。

(一) 按照单元体的形状可以分为以下几类:

1. 杆系结构。这种结构是由许多杆件组合而成。每一根杆件的特点是它的长度较大,但其截面的尺寸(厚度和宽度)较小,例如工字钢,槽钢等都是杆件。如果杆件的壁厚特别薄(一般壁厚度与截面尺寸之比小于0.1时),则称为薄壁杆件,由薄壁杆件所组成的结构,称为薄壁杆件结构。

2. 板壳结构。整个结构由薄板或薄壳单元体组成。在机械工程中,壳体结构用得较少,但板结构用得较多,例如桥式起重机的箱形桥架,是用钢板焊接而成的,通常称为箱形结构,实际上是一种板组结构。

3. 实体结构。这种结构的主要特点是它的长、宽和高三个尺度都比较大,属同一个数量级,构成一个实体,例如地基、堤坝等,在机械工程中较少。

4. 悬索结构。这种结构的特点是它具有刚性杆件外还具有柔性(如钢绳)元件,如图1-1所示的挖掘机臂架。

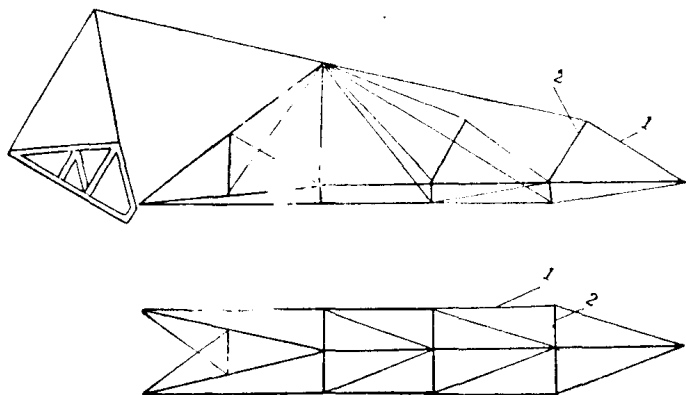


图 1-1

1—钢绳 2—钢管

(二) 按照杆件的连接方式也可分为以下三类。

1. 铰接结构。凡是几根杆件相连接或汇交的点,称为节点。若结构中所有的节点都是铰接时,或受力情况接近于铰接时,则称为铰接结构。在实际结构中,真正用铰接

杆件还是比较少见的。通常在杆件结构中,如果其杆件主要承受轴向力,而杆件中弯矩甚小时,或节点处的连接状态与铰接连接非常接近时,我们亦称它为铰接结构。如图1-2 a上所

示的桁架结构，就是一个典型的实例。

2. 刚接结构。亦称刚架结构。这种结构节点处的连接比较刚强，在外载荷作用下节点各杆件之间的相对夹角不会变化，这样的节点，称为刚性节点。例如图 1-2 b 的刚架结构，在外载荷作用下，节点移动到新位置以后，水平杆件和垂直杆件之间的夹角和变形以前一样，保持直角。

3. 混合结构。结构杆件的连接，既有铰接，又有刚接，称混合结构，图 1-2 c 所示。

(三) 按照外载荷与结构在空间互相位置，可以分为两类。

1. 平面结构。当外载荷和全部杆件的轴线都位于一个平面内时，则称为平面结构，例如图 1-2 的结构都是平面结构。

2. 空间结构。当结构杆件的轴线不在一个平面内，称为空间结构，如图 1-3 所示的龙门架。有的结构杆件轴线位于同一平面内，但外力 P 却不作用在这个平面内，这种平面结构而空间受力的状态，则亦称它为空间结构，有时称为板架结构，例如安装机器设备的底架。

二、任何结构都必须设置和支承在某一基础或其它结构之上，才能承受外载荷和正常地进行工作。结构与基础相连接或接触的部分称为支座，所以结构是靠支座而支承在基础上的。同时，结构上所承受的外载荷可以通过支座部分达到基础或其它结构上，因此支座是一个很重要的传力部分，在传力过程中，支座将产生支座反力。在机械工程的实际结构中，经常遇到的有下列一些不同型式的支座：

(一) 活动铰支座。这种支座的特点是在支承部分有一个铰结构或类似于铰结构的装置，上部结构可以绕铰点自由转动，而整个结构部分又可在一个方向内自由移动。图 1-4 a 为一简化后的实际活动铰支座，上部结构与走轮用轴相连接，可以绕走轮轴旋转，走轮则可在轨道上行走，这种支座在计算简图中用一个两端有铰的链杆表示，见图 1-4 b。很显然这种支座只有垂直方向的支反力，它的作用点在链杆的顶铰处，其作用线即为支座链杆的轴线。

(二) 固定铰支座。这种支座和活动铰

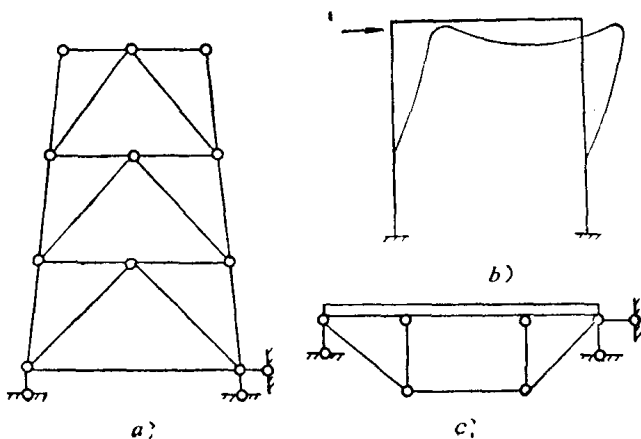


图 1-2

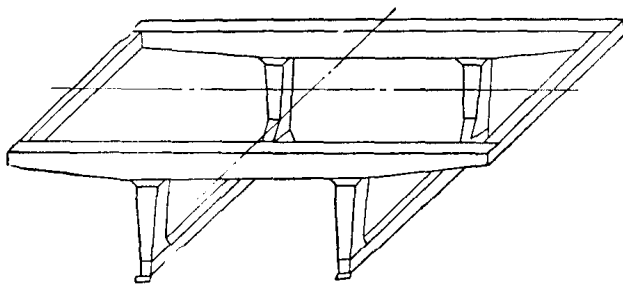


图 1-3

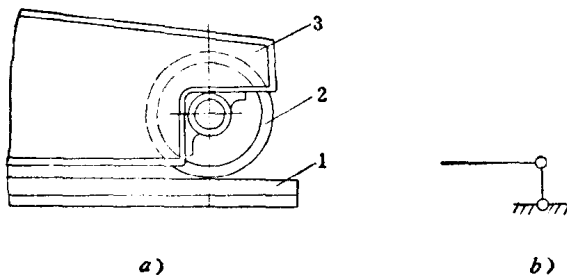


图 1-4

1—轨道 2—走轮 3—横梁

支座的区别, 在于整个支座不能移动, 但上部结构仍可绕一固定轴线或铰自由转动。例如如图 1-5 a 为一固定铰支座结构。这种支 座在计算简图中用两根交于顶点的铰接链杆来表示, 如图 1-5 b 所示。其反力必须通过铰点, 但其方向大小均未定。

(三) 固接支座。如果一个结构与基础相连接时, 前者相对于后者既不能移动, 又不能转动, 这样的支座, 称为固接支座, 如图 1-6 a 所示。结构支承在基础上, 并用焊接固定。这种支座的简图示于图 1-6 b 上。

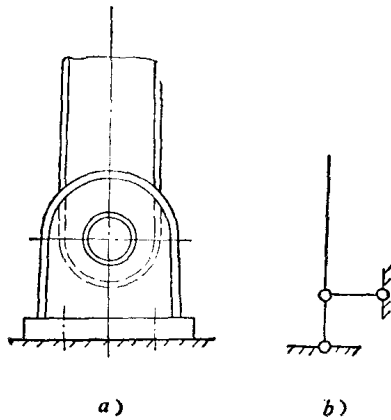


图 1-5

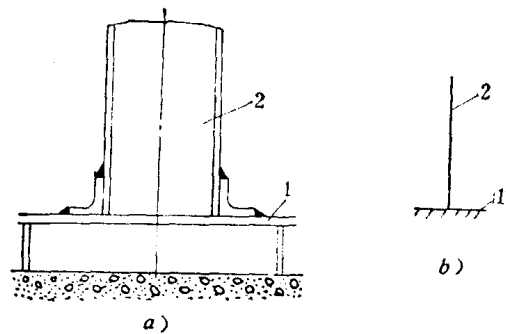


图 1-6

1—基础 2—结构杆件

以上三种支座情况是最常见的和最基本的型式。上述这些支座均认为是刚性支座, 即在外载荷作用下, 这些支座本身不产生弹性变形。但是, 有时在实际的结构中, 经常会遇到支承结构的基础具有一定的弹性, 因此外载荷作用下, 这种支座本身将会产生弹性变形, 从而会影响结构的变形与内力, 这种支座称为弹性支座。另外, 以上所讨论的三种基本支座型式都是平面结构的支座, 因而它的角位移和线位移都是指在同一个平面内的位移。例如图 1-3 a 中的支座线位移 (走轮的移动) 是沿着轨道的, 转动 (角位移) 是绕着走轮中心轴的, 即线位移和角位移都处于轨道和走轮组成的平面中。在实际结构中的支座, 往往是属于空间结构的支座, 因此按平面结构支座进行分析时, 可能在一个平面内是属于某一种支座情况, 而在另外一个平面中, 又可能属于另一种支座情况。例如图 1-4 a 上的支座, 沿着轨道方向是活动铰支座, 而在垂直于轨道的平面中, 若不允许产生线位移时, 则是固定铰支座。

最后还必须指出, 机械工程中的铰支座, 在不同的工作条件下, 有时认为是活动铰, 而有时认为是固定铰, 例如龙门起重机的门腿支座情况就是这样。因为由于门腿的变形、制造上的误差、轨道的铺设质量等因素, 上述两种铰支情况都可能发生。

三、任何工程结构都承受某种载荷。载荷的分类方法亦很多。如果按照载荷在结构上分布情况来分类, 可分为:

(一) 集中载荷。任何载荷作用在结构上时, 如果作用点 (或面) 很小时, 例如轮压作用在轨道上时接触点很小, 则可认为是集中载荷。

(二) 分布载荷。某种载荷, 按其在空间的位置是连续的, 例如结构的自重或结构在运

动状态中由结构质量引起的惯性力，风载荷等，都是分布载荷，当分布载荷的分布程度是均匀的，则又称为均布载荷。

在实际的结构中，载荷通过一个点传递到结构上去的情况是较少的，而往往通过一个区间或一块面积传到结构上去，当这个区间或这块面积很小时，这种情况可简化为集中载荷。有时为了计算方便，把分布载荷近似当作集中载荷。例如作用于桁架结构上的风载荷，实际上是分布载荷，而通常将它作为集中载荷，作用在各个节点上。

如果按照载荷作用随时间变化的情况来分类，可分为：

(一) 静载荷。如果载荷的位置、大小和方向不随时间而变的，则称为静载荷，例如固定在结构上的设备重量，结构的自重等。

(二) 动载荷。如果载荷的位置、大小或方向随着时间而变化的，则称为动载荷，在行走中车轮的轮压、惯性力等。

四、在计算实际结构时，必须把实际结构简化为一种理想的计算简图，才能进行计算。例如把变截面的杆件，视为等截面的杆件，略去某些不重要的部分，把某些实际支承部分简化为某一理想的支座。例如，图 1-7 a 上为一龙门架，上部支承在钢轨上，并可沿着钢轨行走。在实际结构中两条门腿是变截面的。在上部横梁上有栏杆、小车轨道、电缆线等设备。其计算简图示于图 1-7 b、c 上。横梁和支腿均用其中心线代替，横梁的截面形状几何参数即为原来的参数，支腿可近似地当作等截面的，其取离支座的距离为整个支腿高度的 $3/4$ 处

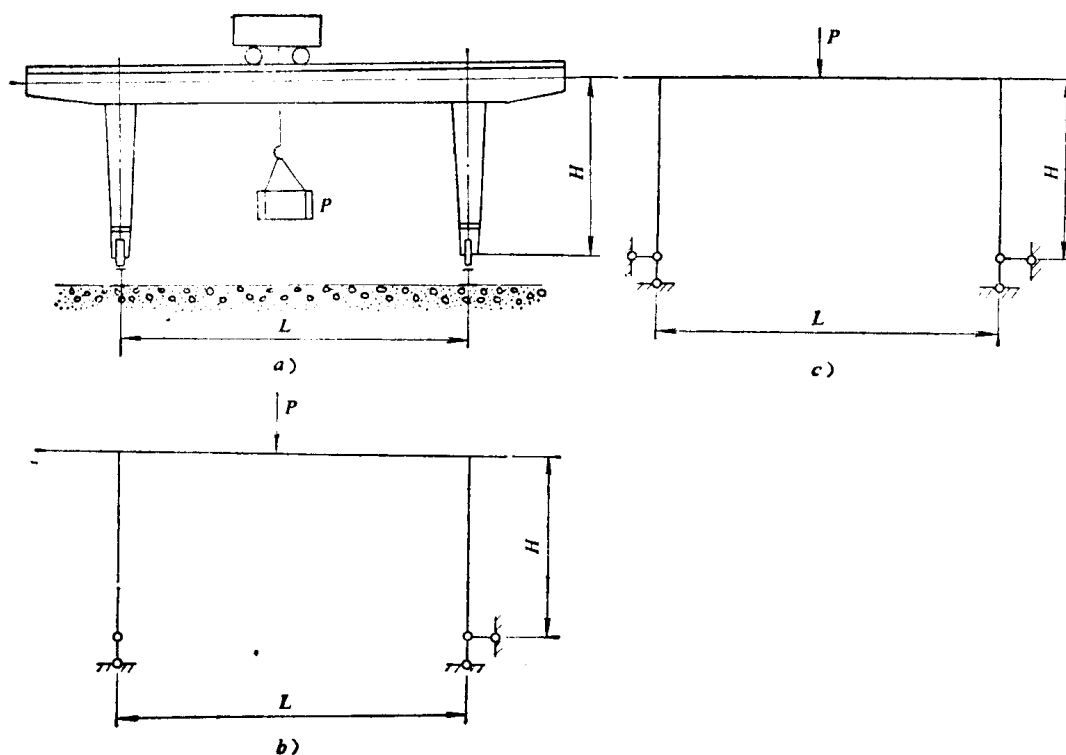


图 1-7

的截面尺寸作为整个支腿的截面尺寸。支座情况取为图 1-7 *b* 和 *c* 两种，这两种支座情况都可能产生，它们的内力的分布是不一样的，所以都应计算。图 1-7 *b* 上的支座情况对计算横梁时弯矩较大，图 1-7 *c* 上的支座情况，用于计算支腿的内力。

再如实际桁架结构中，每个节点都没有用铰来连接，相反，而是往往焊有节点板，而计算简图中节点均当作为理想铰。因为虽然粗看上去似乎和实际情况相差很大，但计算和实验证明，这样的简化是和实际情况相差不大的。

如何把实际结构合理地简化为计算简图，虽然这并不是结构力学课程的主要任务，但是在进行计算分析时，必须采用这些计算简图，因此它对结构计算是必不可少的，是结构计算中很主要的一个基本内容。计算简图选择得合理与否，将直接影响到结构分析的正确性，因此它与结构力学有一定的联系，这里就不多作详细的叙述。

第二章 结构的机动分析

§ 2-1 基本概念

结构是用来支承载荷的。因此，这就要求结构在承载时，牢固地维持本身原有的几何形状和位置。例如图 2-1 a 所示四个杆件的铰接支架， A 、 D 分别与固定铰支座和活动铰支座相连。很显然这个支架是不牢固的，它只要受到很小的侧向载荷，就会倾倒使支架形状发生极大的改变，成为 $AB'C'D$ ，如图中虚线所示。如果加上一个斜撑 BD （如图 2-1 b 所示），这个支架是牢固的，其形状和位置都不会改变。

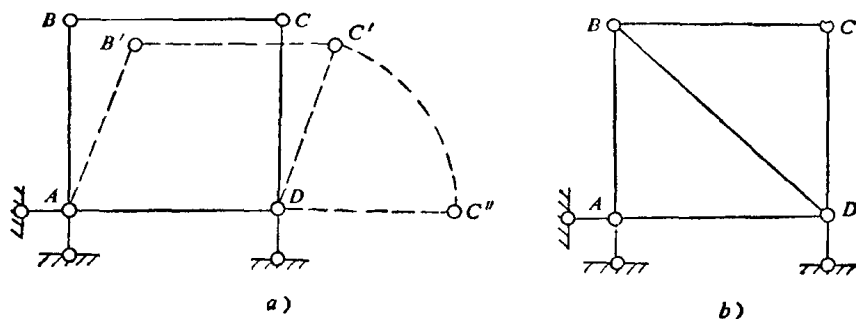


图 2-1

又如图 2-2 a 所示五个杆件的铰接支架， A 、 D 都与活动铰支座相连。这个支架很显然也是不牢固的，因为受侧载时，虽然支架形状不变，但位置却发生改变，成为 $A'B'C'D'$ ，如图中虚线所示。如果将其中任一支座改成固定铰支座（如图 2-2 b 所示），则这种支架也是牢固的，其形状和位置都不改变。

因此，一个结构承载时，其结构本身几何形状和位置都不改变的，我们称这类结构为几何不变结构（又称几何稳定结构）。

反之，由于结构本身组成或支承条件不够完善，在承载时不能保持自己的形状和位置的，这类结构称为几何可变结构（又称为几何不稳定结构）。

在机械上，可动部分要采用几何可变结构，如四连杆机构。但在一般结构中都必须几何不变的，否则就不能承受任意外载荷的作用。

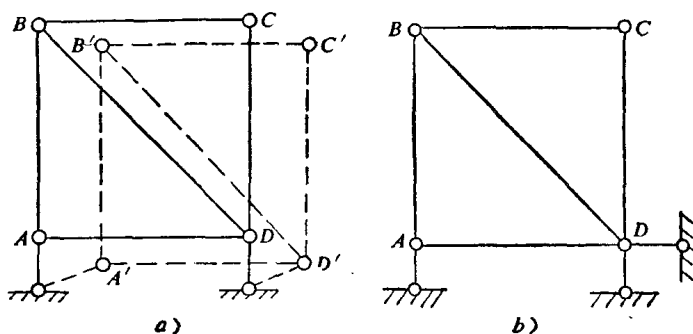


图 2-2

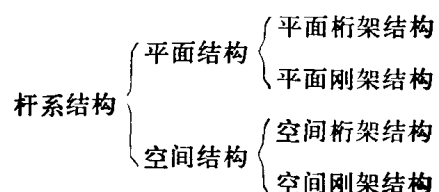
关于结构几何不变性的研究称为机动分析。结构机动分析的目的在于判别一个已知结构在任意载荷作用下是否保持其几何不变的能力，并且研究在怎样的情况下，这种能力才能得

到保证。结构的自由度分析和几何组成分析就是判别结构是否可变的主要条件,前者是结构几何不变的必要条件,而后者则为其充分条件。

在结构的机动分析中,我们不考虑由于材料的应变所产生的变形。这种变形一般是很小的。这样,就意味着可将组成杆系结构的基本单元(杆件)看成“刚体”一样。这对机动分析会带来很大的方便。

§ 2-2 自 由 度

任何一个刚体在其所研究的空间(或平面)内运动时,用来完全确定其位置的独立几何参数的数目,称为该刚体的空间(或平面)自由度。我们所讨论的杆系结构是由几何形状不变的个别刚体(杆件)所组成的,按其构造和受力特点可分为:



因此,对其自由度也将分别进行讨论。

一、平面桁架结构的自由度

平面桁架是由杆件互相铰接而成的结构。现讨论平面桁架在其平面内运动的自由度。

图 2-3 表示平面内一铰点 A 的位置运动至 A' 。在平面坐标系中,铰点 A 可沿 x 轴方向移动 Δx ,又可沿 y 轴方向移动 Δy ,这表明一铰点在平面内有二个独立坐标(x 、 y)可以改变,所以我们称一个平面铰点有两个自由度。

下面再来分析两个铰点用一个杆件连接的情况。图 2-4 为两铰点 A 、 B 用杆件 AB 相连。当其运动到新的位置 $A'B'$ 时,并不需要用四个座标 Δx_A 、 Δy_A 、 Δx_B 、 Δy_B 表示,而只需三个座标 x 、 y 、 θ 。由此可看出,在平面桁架中,两个铰点之间的每根杆件相当于一个约束,使自由度减少一个。

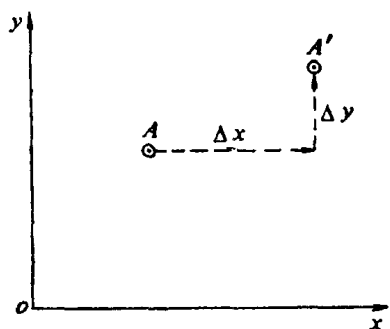


图 2-3

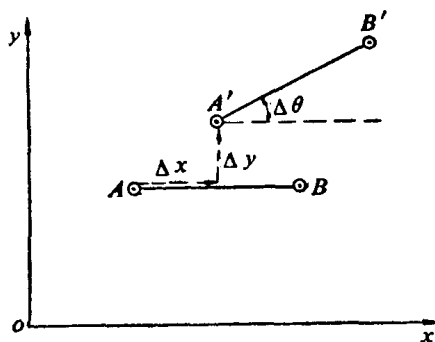


图 2-4

在平面桁架中,每个支座链杆也相当于连接两铰之间的杆件。因此,每根支座链杆也相当于一个约束。

为了得到平面桁架自由度的计算公式,设 j 为铰节点数, m 为杆件数, c 为支座链杆数。根据上述分析,自由度计算公式应为

$$W = 2j - (m + c_0) \quad (2-1)$$

如 $W > 0$ ，表示平面桁架具有可动性（几何可变）。

$W \leq 0$ ，表示平面桁架不可动，这是几何不变的必要条件。

其中 $W = 0$ ，表示组成平面桁架所有铰节点的自由度总数与约束数相等。

$W < 0$ ，表示所有铰节点自由度小于约束数，具有多余约束。

例2-1 求图 2-5 结构的自由度。

解 在该结构中

$$j = 4; m = 4; c_0 = 3。$$

按公式 (2-1) 得

$$W = 2j - (m + c_0) = 2 \times 4 - (4 + 3) = 1 > 0$$

这表明该结构具有可动性。

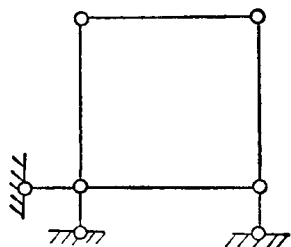


图 2-5

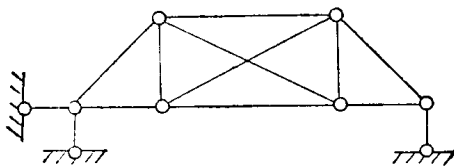


图 2-6

例2-2 试求图 2-6 结构的自由度。

解 在该结构中

$$j = 6; m = 10; c_0 = 3。$$

按公式 (2-1) 得

$$W = 2j - (m + c_0) = 2 \times 6 - (10 + 3) = -1 < 0$$

计算表明该结构具有一个多余约束，满足几何不变的必要条件。

二、平面刚架结构的自由度

平面刚架结构是由杆件互相刚接而成的平面结构。现讨论平面刚架在其自身平面内运动的自由度。

图 2-7 表明一刚性节点在 xoy 平面内从 A 运动至 A' 。新的位置 A' 可用 Δx 、 Δy 以及相对于 x 轴的转角 $\Delta\theta$ 来确定。因此，一个刚性节点在平面内有三个自由度。

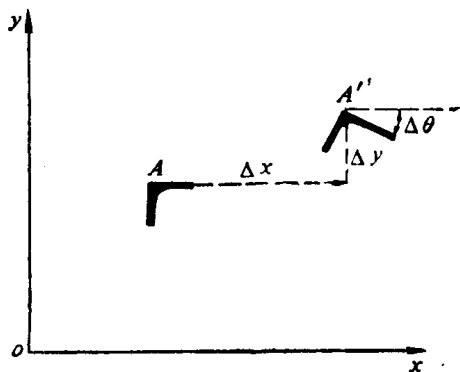


图 2-7

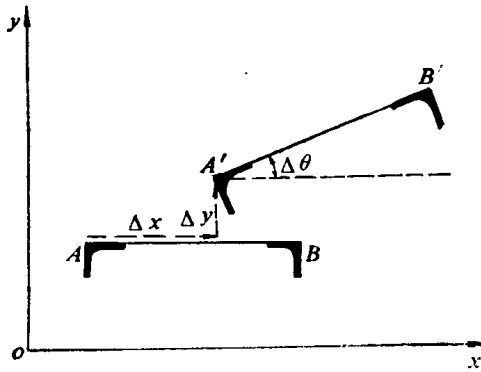


图 2-8

下面再来分析两个刚性节点用一个杆件相连接的情况。图 2-8 为两个刚性节点 A 、 B 用杆 AB 相连, $A'B'$ 是其运动后的新位置。同样可以看出, 只需要三个独立座标 Δx_A 、 Δy_A 、 $\Delta \theta_A$ 就可以确定 $A'B'$ 的位置。

在刚性节点时, 用三个座标确定一个节点后, 另一节点就自然能确定。这就相当于原来两个刚性节点应有的六个自由度, 在用一杆相连后, 就减少为三个自由度。因此, 在平面刚架中, 一个两端刚接的杆件, 相当于三个约束。

为了计算平面刚架的自由度, 设 j_R 为刚性节点数, 在计算时, 与支座相连的节点也要看成刚性节点, m 为两端刚性节点的杆件数, c_o 为支座链杆数, 则平面刚架自由度的计算公式应为

$$W = 3j_R - (3m + c_o) \quad (2-2)$$

和平面桁架一样,

$W > 0$, 表示平面刚架具有可动性 (几何可变)。

$W \leq 0$, 表示平面刚架具有几何不变的必要条件。其中

$W = 0$, 表示刚性节点的自由度总数与约束数相等, 而

$W < 0$, 表示其自由度数小于约束数, 具有多余的约束。

例2-3 试求图 2-9 平面刚架的自由度。

解 在该结构中

$$j_R = 3; \quad m = 2; \quad c_o = 3。$$

按公式 (2-2) 得

$$W = 3j_R - (3m + c_o) = 3 \times 3 - (3 \times 2 + 3) = 0$$

计算表明, 刚性节点自由度数与约束数相等, 即该结构具备了几何不变的必要条件。

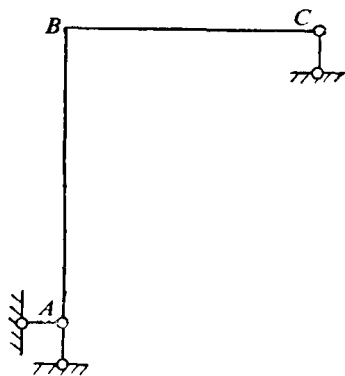


图 2-9

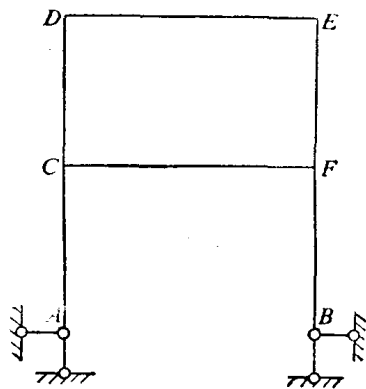


图 2-10

例2-4 试求图 2-10 结构的自由度。

解 在该结构中

$$j_R = 6; \quad m = 6; \quad c_o = 4。$$

按公式 (2-2) 得

$$W = 3j_R - (3m + c_o) = 3 \times 6 - (3 \times 6 + 4) = -4$$

这说明该平面刚架具有四个多余约束。