王健真

论费尔马大定理

中国统计出版社

论费尔马大定理
LUN FAJERMA DA DJNGLJ
王 健 真
*
中国统计出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京顺义北方印刷厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 3印张 6.4万字
1989年7月第1版 1989年7月北京第1次印刷
印数：1—2,300
ISBN 7-5037-0215-X/O·5
定价：2.10元

出版说明

费尔马大定理是多年来遗留下来的有争议的难题，曾引起众多数学家及数学爱好者的注意。本书作者经过多年来的研究，以朴素的思维方式和唯物主义的观点，应用初等数学知识归纳引证了这一问题，并提出了自己的一些猜想。

本书的行文不同于一般数学专著，属科普性质的读物。它深入浅出，循循善诱，有趣易懂，这是为了更好地适应广大数学爱好者、特别是青少年一代的需要，以引起对这一问题的进一步探索，活跃学术空气。

诚然，从文章的论述来看，其中有的地方是不够严谨的。正如作者在结束语中所述："不论对本文合理部分的肯定，或对本文错误部分的否定，都不要象对待教科书或数学专业论文的方式来看待。"既不能全对，也不会全错。肯定或否定其一，不能据此而肯定或否定其二。愿作者所抛出的"砖"，能引出真正的"玉"来。

1988 年 10 月

内 容 提 要

自从 1637 年法国著名数学家费尔马提出费尔马大定理以来，已经三百五十多年了。三百多年来数学家们为了论证费尔马大定理，创立和发展了代数数论等数学分支，大大推进了数学科学的发展。但对费尔马大定理的完整证明，至今一直没有找到。

本文作者为了思考费尔马大定理这一难题，一共归纳出了二十多个与费尔马高次不定方程有关的初等数学引理，首先将费尔马不定方程的基本特性搞清楚。这将引起青年读者广泛寻找论证费尔马大定理的各种途径的兴趣。

其次，在费尔马小定理的基础上，本文又归纳出了三个与费尔马小定理相类似的初等数学定理。这不仅在思考费尔马大定理的过程中可能有重要的作用，而且在初等数论的研究中也可能有一定的作用。

再次，本文还以朴素的方式论述了费尔马不定方程有无正整数解的判别式。这个思想是揭开费尔马大定理问题之谜的关键，费尔马大定理问题的难点可能就在于此。

接着，本文提出了“判别假设”，并列举了十种不同的讨论费尔马大定理的思考途径。其中有的接近于比较完善，有些还不够完善，可以提出这样或那样的问题。但是它对说明

论证费尔马大定理的途径多种多样，还是有益无害的。

费尔马除了提出妙趣横生的费尔马大定理和小定理之外，还提出过一个著名的关于素数的猜想公式。在分析研究了费尔马的素数猜想公式为什么会错误之后，并在费尔马大定理的基础上，本文又提出了一个新的关于素数的猜想公式，将会引起人们作更广泛的探讨。

本文作者并不是数学专业人员，故在本文的文字叙述方面并不完全符合数学规范。但正因为如此，本文写得比较通俗，所用数学符号不多。不仅略具初等数论常识的青年学生都可以参阅，而且对数学有爱好的各方面群众都不难参与其中的讨论。

目　录

一、什么是费尔马大定理

1621年，法国著名数学家费尔马（Fermat，1601—1665年）在巴黎买到一册古希腊数学家刁番都（Diophantos，210—290年）所著《算术学》的法文本，里面提到了毕达哥拉斯定理（即我国古代的勾股定理）。1637年费尔马在重新阅读这本书的时候，他在书上空白处作了一系列批注。批注中明确提出：二次不定方程

$$x^2+y^2=z^2$$

即刁番都三元二次不定方程有无穷多组整数解，而形如

$$x^n+y^n=z^n$$

的三元高次不定方程，在 $n>2$ 时，永远没有整数解。这就是著名的费尔马大定理，现在一般称它为"费尔马猜想"。费尔马还在批注中解释说："我想出了对这个定理的绝妙的证明方法，但是书边的空白太小了，写不完。"

1665年费尔马去世后，他的儿子于1670年把费尔马在《算术学》上面的全部批注，作为《算术学》再版的附录公诸于世，这已是三个世纪以前的事情了。从那个时候起，全世界最优秀的数学家曾费尽心思，想重新作出费尔马大定理的证明。但是时间已经过去了三百多年，至今还没有成功。当然在这样长的时期中，数学家们已经写了不少有关费尔马大定

理的专著，并且在探讨费尔马大定理问题的过程中建立和发展了代数数论。这些都是费尔马大定理这个“金鸡”所产的“金蛋”。

通过数学家们长期的努力，曾经证明，在$n \leqslant 269$的情况下，费尔马大定理都能够成立。后来又进一步扩展到$n<3000$。1977年有人利用电子计算机，证明了当n为小于125000的所有奇素数时，费尔马大定理都能成立。最近，又进一步证明到$n<41000000$为奇素数时，大定理成立。不过，对任意的正整数n，费尔马大定理是否都能成立，一直还没有解决。

1983年联邦德国的一位青年数学家伐尔廷斯(Faltings)证明：高次不定方程$x^p+y^p=z^p$，对每个奇素数p至多只能有有限组正整数解。1984年美国的两位数学家艾德勒曼(Adleman)和希斯布朗(Heath Brown)证明：存在无限多个奇素数p，当p与xyz互素时，$x^p+y^p=z^p$没有正整数解。这些都是费尔马大定理问题的非常重要的进展，但距问题的彻底解决仍有相当远的路程。

当数学家们满怀信心地去寻找费尔马的那个“绝妙的证明方法”时，人们把费尔马的结论称之为费尔马大定理。在人们无法重新找到那个“绝妙的证明方法”之后，便把费尔马的结论叫做“费尔马猜想”。而且为了征求这个世界数学难题的答案，十九世纪二十和五十年代，法国巴黎科学院曾两次公开悬赏，征求费尔马大定理的解答。二十世纪初德国格廷根科学院宣布，将给第一个解决费尔马大定理问题的人以巨大数额的奖金。从此有许多数学家绞尽了脑汁，甚至将毕生精力献给了对费尔马大定理问题的研究。但是时间又过去

了八十年，仍未找到肯定或否定的答案。

于是人们便对费尔马大定理，进行了各种各样的猜想。其中之一是：费尔马是在开玩笑，他根本没有想出什么“绝妙的证明方法”。他说书边的空白太小了，写不完他的证明，完全是故弄玄虚，根本不是那回事。其中之二是：费尔马有可能想出了某种证明方法，但在证明过程中肯定有什么地方搞错了。其中之三是：费尔马大定理很可能是错误的，根本不能成立，从而也就无法找到完善的证明。其中之四是：费尔马大定理有可能是正确的，但必须用代数数论、解析数论、几何数论等高等方法去证明，想用初等方法彻底解决费尔马大定理问题，肯定是不可能的。

比较著名的数学家大都知难而退了，或者另找崭新的高等方法了。一些无名小卒，还想用初等数学方法找到这个数学难题的正确答案。于是在某些文学家的笔下，继续探求真理者，便成为冷嘲热讽的对象，被讥讽为“拜金的业余数学家”。意思是说，这样复杂艰巨的数学大难题，全世界的大数学家们几百年都证明不了，这些无名小卒完全是为了追求巨额奖金，才花费业余时间搞这种徒劳无益的蠢事。而那些最著名的大数学家们，则用关怀的口吻反复不断的讲：费尔马大定理是一座“固若金汤的城堡”，当代数学还没有成熟到能够解决这个难题。业余数学爱好者应当采取这样的态度，别去碰它！免得白白浪费自己的时间和精力。

二、我们对费尔马大定理的判断

我们既不是真正的数学家，又不是什么“拜金的业余数学家”。但在读到数学家对费尔马本人及其大定理的评价之后，产生了一些完全不同的想法。

第一、费尔马是一个受人尊敬的伟大的数学家，是初等数论、解析几何和概率论的奠基人之一。他不可能用自欺欺人的手法，把一个还没有找到证明的猜想，说成是有了“绝妙的证明方法”的定理。他的数学家和物理学家兼律师的身份，也不允许他那样做。为了证明大定理的特例，$n=4$ 的情形，他还创造出了无穷递降法这个至今还颇有用场的独特证明方法。由此可见，他对大定理的研究是严肃认真的，而不是偶尔从事的。所谓“绝妙的证明方法”，也不是轻易得到的。

第二、象费尔马那样给人类留下了费尔马小定理以及费尔马大定理等等极其美妙的数学定理的著名数学家，他必然是一个思维非常严谨的科学家。费尔马在牛顿(Newton，1642-1727 年)和莱布尼茨(Leibniz，1646-1716 年)之前，已经正确运用了微分学的思想。他的天赋和观察分析能力，是无可置疑的。很有可能在费尔马本人对他的大定理的证明过程中，包括了某些会被人们认为还需要证明，但在他看来是

不证自明的结论。同时，在十七世纪的费尔马的头脑中，没有现代人的某些固定框框(如这个难题不能用初等方法证明等等)，这也是他那“绝妙的证明方法”不易重新找到的主要原因。因此，我们认为主观武断地下结论说：“费尔马的证明方法肯定有什么地方搞错了”，恐怕不太确切。有些数学家还用费尔马关于素数的猜想公式等曾被后人推翻了，来推断出他对大定理的证明“看来搞错了”，更是没有道理的。费尔马本人并没有把大定理包括在他的猜想之中，后人也把他的结论尊称为大定理。而猜想本来是可以推翻的。

第三、既然费尔马自称他对大定理的证明方法非常“绝妙”，则其证明过程肯定是简单明了的，而不会是复杂繁琐的。因此，在他那个证明过程中，出现错误的可能性也就十分微小。同时，三百五十年来，经过全世界数学家的共同努力，已经逐步证明了在 n 为相当大的数值内，费尔马大定理都能够成立。虽然普遍成立的证明还没有重新作出，但其能够成立的趋势是十分明显的。因此，说费尔马大定理“很可能是错误的，根本不能够成立”等等，也是没有任何根据的。

第四、有些数学家还认为，“费尔马是否给出了大定理的证明，这在费尔马大定理的研究史上已显得并不重要，重要的是要创造出新的方法，去证明费尔马大定理”。这种说法表面上好象很公正，实际上也是主观武断的。因为他们实质上不仅肯定了费尔马本人并未证明大定理，而且还肯定了费尔马大定理不可能用初等的方法去证明，必须“创造”出一种“前所未有的高等的方法”才能够证明它。我们认为费尔马是否给出了大定理的证明，绝非什么“并不重要”的问题，而是一个非常重要的关键性问题。这是因为，费尔马本人在三

百五十年前，对大定理所能作出的证明，肯定是属于初等的方法，不可能是什么高等数论的方法。因为在费尔马的时代，解析数论、代数数论和几何数论等高等数论都不存在。这个问题不明确，就会把人们引向迷途。

第五、费尔马本人在三百多年前就已经用他所独创的方法——无穷递降法，证明了 $n=4$ 时大定理成立，并且给后人留下了具体的证明过程。如果再能证明 n 为任意奇素数 p 的情形，则整个证明就完全充足了。但这时可分为两种情形：通常人们将 $p\nmid xyz$ 叫做费尔马大定理的第一种情形；而把 $p|xyz$ 叫做费尔马大定理的第二种情形。

目前数论专家们比较普遍地认为：用初等的方法有可能解决费尔马大定理的第一种情形；而要证明费尔马大定理的第二种情形，不仅用初等的方法不太可能，就是用高等数论的方法也是异常困难的。但我们认为，第二种情形所要求具备的条件并不比第一种情形高。如若第一种情形能够用初等的方法作出证明，则第二种情形也能够用初等的方法作出证明。

第六、在本文作者看来，三百多年以前，费尔马本人不仅用无穷递降法证明了 $n=4$ 时大定理成立，而且从他的具体证明过程中，可以得出更强的结果，即在 $n>2$ 为任何偶数时，大定理普遍成立。这是因为，费尔马是用

$$x^4+y^4=z^2,\ (x,y)=1$$

来证明 $n=4$ 的情形。其具体论证过程，完全可以套用到证明

$$x^{2m}+y^{2m}=z^2,\ (x,\ y)=1。$$

综上所述，我们认为所谓“费尔马猜想”乃是名符其实的

费尔马大定理。三百五十年前费尔马所想出的证明方法，一定能够重新找到。但要达到这个目的，必须把费尔马大定理的研究不要限制在某些数论专家所划定的框框内，不懂得高等数论就不准研究，这条无形的“禁令”应当坚决废弃。不仅能够用初等的方法证明费尔马大定理，而且必须用初等的方法才能首先证明费尔马大定理。特别是部分数论专家们颇有反感的二项式定理是十分重要的，绝对不能忽视它。

三、一些有关的基本概念

在探讨费尔马大定理的具体论证过程之前，首先必须把一些有关的基本概念弄明确。

第一、探讨费尔马大定理所要回答的问题是三元高次不定方程(其中 n 为大于 2 的自然数)。

$$x^n+y^n=z^n$$

究竟有没有整数解。如果把 0 包括在整数之中，则这样的整数解显然是存在的。这是因为，当 $n>2$ 时，仍然有

$$0^n+0^n=0^n$$

同时，当 x 与 y 之中有一个为 0，另一个和 z 相等时，费尔马高次不定方程也同样成立。故在以下的讨论中，我们把这两种情况简称费尔马高次不定方程的 0 解而加以排除。

如果把负整数也包括在所谓整数解之中，则费尔马高次不定方程的整数解，同样也明显地存在。亦即，当 n 为奇数时，$x=a$，$y=-a$，$z=0$(其中 a 为任何自然数)，都是费尔马高次不定方程的整数解。

第二、负数在费尔马高次不定方程的所谓整数解中，只会置换 x、y、z 三者的位置，而不可能起到任何实质性的作用。比如，当 n 为偶数时，有负整数解就必有正整数解；当 n 为奇数时，$x^n+(-y)^n=z^n$，是将 x 和 z 的位置互换而

得$z^n+y^n=x^n$。故在论证费尔马大定理的过程中，可将负整数排除在非0整数解之外。

由上可知，在论证费尔马高次不定方程有无整数解的时候，应当首先把所谓整数解，确切地规定为正整数解。

第三、任何一个大于2的自然数n,如果不是4的倍数，就一定有某个奇素数p为其因子。

因此，费尔马大定理只需论证$n=4$,以及n为一个奇素数p的情况，则整个证明就充足了。n等于4时大定理能够成立，这在三百多年前，费尔马本人就已经用无穷递降法给后人留下了具体的证明过程；n是一个奇素数p的情况，目前已经证明到在$p<41\ 000\ 000$时，费尔马大定理都能够成立。

第四、在后面的讨论中，我们把齐次不定方程$x^2+y^2=z^2$，简称刁番都不定方程或刁番都三元二次不定方程。而把齐次不定方程$x^n+y^n=z^n$（其中$n\geqslant3$），简称费尔马高次不定方程或费尔马三元高次不定方程。

第五、假定费尔马高次不定方程有正整数解。亦即，$x=a$、$y=b$、$z=c$是已知的一组正整数解。则$x=ka$、$y=kb$、$z=kc$亦为其正整数解，其中k可为任意正整数。也就是说，如若费尔马高次不定方程能够找到一组正整数解，就等于找到了无限多组正整数解。因此，如果a、b、c都是偶数，则可通过约去偶数因子的办法，简化成只有一个为偶数。倘若在约去偶数因子之后，还有共同的奇数因子，则可进一步约去共同的奇数因子，使x、y、z两两互素[即$(x,y)=(y,z)=(z,x)=1$]。在后面的讨论中，我们把满足这一条件的解，称之为费尔马不定方程的正整数基本解；将

不具备 x、y、z 两两互素条件的正整数解，称之为倍数派生解。而将包括正整数和正有理数在内的解，称之为派生解。

四、有关大定理的若干引理

用初等方法考察费尔马大定理，要用到一些有关的引理。如果费尔马大定理不是世界性的著名数学难题，某些很简单的引理就可当成不证自明的结论而直接加以引用。但是费尔马大定理已经成为全世界的数学家几百年都证明不了的难题，这就必须先用一定篇幅来说明这些引理确有出处和根据，才能够使人们信服。

引理 1：假定 a、b、c 是费尔马不定方程 $x^n+y^n=z^n$ 的一组正整数解，若 a 与 b 互素，即 $(a, b)=1$。则有：$(a, b)=(b, c)=(c, a)=1$。

证明：设 a 与 b 互素，而 a 与 c 不互素。则有 $a=ka_1$，$c=kc_1$，其中 k 为 a 和 c 的最大公约数，且 $k\neq1$。代入 $x^n+y^n=z^n$，即得

$$(ka_1)^n+b^n=(kc_1)^n$$

$$\therefore \quad b^n=k^nc_1^n-k^na_1^n=k^n(c_1^n-a_1^n)。$$

从而 b 也含有 a 的因子 k，即 a 与 b 并不互素，这和假设的前提相矛盾。故 c 与 a 必互素；同理 b 与 c 亦互素。即 $(a, b)=(b, c)=(c, a)=1$。

引理 2：假定 a、b、c 是费尔马不定方程 $x^n+y^n=z^n$ 的一组正整数解，而且 $(a, b)=(b, c)=(c, a)=1$。则有：