目　　录

第一章　绪论及轴向拉压

知识要点

1. 材料力学的基本概念

(1) 材料力学的任务

① 强度：构件受外力作用后抵抗破坏的能力。

② 刚度：构件受外力作用后抵抗变形的能力。

③ 稳定性：构件受外力作用后保持其原有平衡状态的能力。

④ 材料力学的任务：研究材料的力学性能，并为构件的强度、刚度、稳定性的计算提供必要的理论基础和方法，合理地选择材料及截面形状，以保证构件既安全又经济的设计要求。

(2) 材料力学的基本假设与变形

材料力学的研究对象是变形固体，其中以线弹性的直杆为主要研究对象。

① 材料力学的基本假设：连续性假设；均匀性假设；各向同性假设；小变形假设。

② 弹性变形与塑性变形（残余变形）：变形体受外力作用后产生变形，外力消除后，能够恢复的一部分变形称弹性变形，不能够恢复的一部分变形称塑性变形（也称残余变形）。

③ 完全弹性体：材料受外力作用后产生变形，外力消除后，能够完全恢复原状的物体称为完全弹性体。工程上的构件在不超过某一荷载限度时，可以认为变形是完全弹性的。

④ 线位移：构件受力后，其上各点的位置变化量。

⑤ 角位移：构件受力后，某一截面转动的角度。

⑥ 线应变：构件内某点处在某一方向上的单位长度的伸长

量，用 ε 表示。伸长为正，缩短为负。

⑦ 剪应变(角应变)：构件内某一点处的两个互相垂直的面，变形后其直角的改变量，用 γ 表示。

(3) 截面法与内力

① 内力：构件受外力作用后，构件内部所产生的抵抗力。

② 截面法：是求内力的基本方法。其步骤为

a. 截开。用一个假想截面把构件截成二部分，保留其中任一部分。

b. 代替。用作用于截面上的内力代替弃去部分对保留部分的作用。

c. 平衡。用静力学的平衡方程列出保留部分构件上的外力与内力关系，求出内力。

2. 轴力与轴力图

① 轴力(N)：轴向拉伸(压缩)构件的横截面上的内力，作用线在轴线上，规定轴力 N 与截面外法线方向一致为正，反之为负。

② 轴力图：表示杆件的轴力沿轴线的变化规律的图。轴力图上应标注数值、正负号。轴力图为强度校核提供依据。

3. 应力与强度条件

① 应力：应力是内力分布的集度。应力必须指明其作用的截面及该截面内的某一点这两个因素，其单位是 N/m^2 或 Pa。

② 正应力：与截面垂直方向的应力。规定与截面外法线 n 方向一致的正应力为正(拉应力)，反向为负(压应力)，用符号 σ 表示。

③ 剪应力：在截面上与截面相切的应力。用符号 τ 表示。

④ 极限应力：材料丧失工作能力时的应力。用 σ_u 表示。脆性材料的极限应力是强度极限 σ_b，塑性材料的极限应力是屈服极限 σ_s。即

$$\sigma_u = \begin{cases} \sigma_b & \text{脆性材料} \\ \sigma_s & \text{塑性材料} \end{cases}$$

⑤ 强度条件：

$$\sigma = \frac{N}{A} \leqslant [\sigma] = \begin{cases} \sigma_b / n_b \\ \sigma_s / n_s \end{cases} \tag{1-1}$$

式中，$\sigma = N/A$ 称为工作应力；$[\sigma]$称为许用应力（容许应力）；n_b、n_s 分别为脆性材料、塑性材料的安全系数。

强度条件可以用于：校核构件的强度；设计截面的尺寸或选择型材的型号；设计构件或结构所能承受的最大荷载（许用荷载）。

⑥ 轴向拉伸（压缩）时斜截面上的应力。

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2\alpha \\ \tau_\alpha = \dfrac{\sigma_0}{2}\sin 2\alpha \end{cases} \tag{1-2}$$

式中，σ_0 为横截面上的正应力。α 为斜截面的外法线 n 与轴线 x 轴的夹角，如图 1-1 所示。显然有

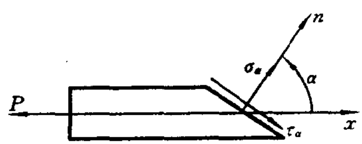

图 1-1

$$\sigma_{max} = \sigma_\alpha|_{\alpha=0} = \sigma_0$$

此时，$\tau_\alpha|_{\alpha=0} = 0$

而 $$\tau_{max} = \tau_\alpha|_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma_0}{2} = \sigma_\alpha|_{\alpha=45^\circ}$$

4. 胡克定律、横向效应

（1）胡克定律

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1-3a}$$

$$\Delta l = \int_l \frac{N(x)}{EA}\mathrm{d}x \tag{1-3b}$$

如果 N，A 在长度 l 上为常数，则

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \sum \frac{N_i l_i}{EA_i} \tag{1-3c}$$

（1-3a）式是应力与应变关系的胡克定律，（1-3b）式和（1-3c）式是变形与内力关系的胡克定律。E 为弹性模量，EA 称抗拉压刚度。

（2）横向效应

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon \tag{1-4}$$

式中，ε'为横向尺寸的线应变；ε为轴线方向（纵向）的线应变；ν为泊松比。(1-4)式表明当应力不超过比例极限时，杆的横向线应变与轴向线应变的大小成正比，但符号相反。

5. 材料拉伸（压缩）时的力学性能

（1）低碳钢拉伸时的力学性能

① 应力-应变（σ-ε）曲线如图1-2所示。该曲线分四个阶段，即弹性阶段（Ⅰ），屈服阶段（Ⅱ），强化阶段（Ⅲ），颈缩阶段（局部变形阶段）（Ⅳ）。

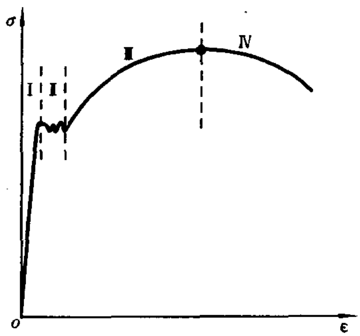

图 1-2

a. 比例极限 σ_p：弹性阶段内 σ 与 ε 成正比的最高应力值。

b. 弹性极限 σ_e：弹性阶段内的最高应力值。

c. 屈服极限 σ_s：屈服（流动）阶段的最低应力值。

d. 强度极限 σ_b：应力-应变曲线中应力最高值。

② 冷作硬化。在强化阶段内任一点 m 处卸载，则曲线沿着几乎平行于弹性阶段的直线段下降到 n 点，如图1-3所示。再加载时，则沿 nm 直线上升到达 m 点。此时材料的屈服极限、比例极限以 σ_m 代替，即材料的屈服极限、比例极限得到了提高。塑性变形减小。此现象称为冷作硬化。

③ 延伸率 δ、截面收缩率 ψ。

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% \tag{1-5}$$

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\% \tag{1-6}$$

(1-5)，(1-6)两式中的 l、A 为变形前试件工作段的长度及横截面面积，l_1、A_1 为试件拉断后工作段的长度及最小横截面的面积。δ、

ψ 是衡量脆性材料、塑性材料的指标。$\delta>5\%$的材料称塑性材料，$\delta<5\%$的材料称脆性材料。

(2) 低碳钢的压缩试验

① 应力-应变(σ-ε)曲线如图 1-4 所示。该曲线与拉伸时的 σ-ε 曲线(虚线所示)的弹性阶段重合。压缩时的屈服极限$(\sigma_s)_c$ 与拉伸时的屈服极限$(\sigma_s)_t$ 相等。试件越压越扁，呈腰鼓状。

② 由于$(\sigma_s)_c=(\sigma_s)_t$，所以低碳钢的抗拉性能与抗压性能相同。

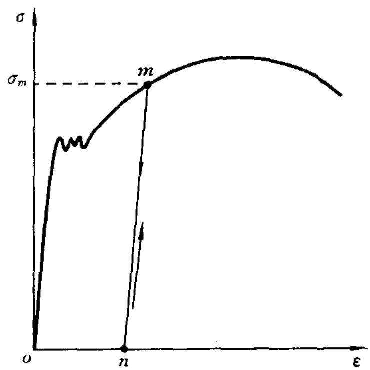

图 1-3

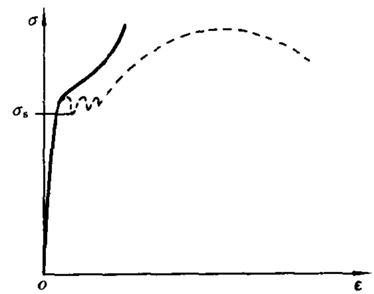

图 1-4

(3) 铸铁的拉伸与压缩时的力学性能

① 应力-应变(σ-ε)曲线如图 1-5 所示。铸铁的拉伸曲线 1 与压缩曲线 2 均无严格的直线段，二者的起始阶段可近似看成直线(遵循胡克定律)；二者又无屈服阶段，直至断裂时变形都很小，拉伸尤其如此，试验中只能测得铸铁的强度极限 σ_b。压缩的强度极限$(\sigma_b)_c$ 远大于拉伸的强度极限$(\sigma_b)_t$，说明铸铁适

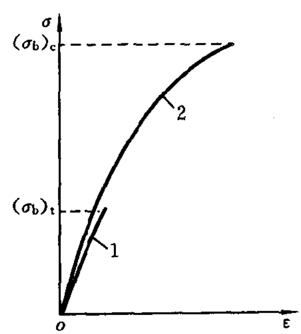

图 1-5

宜于做抗压的构件。

② 破坏断面及破坏原因。图 1-6(a)表示拉伸试件的断裂面为横截面，由拉应力引起。图 1-6(b)表示压缩试件的断裂面为斜截面，由剪应力引起，斜截面外法线与轴线夹角 α 为 45～55°左右。

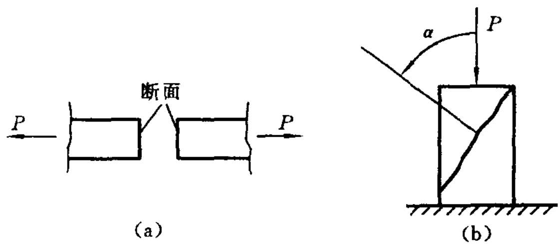

图 1-6

(4) $\sigma_{0.2}$的含义。

对于一些没有明显屈服阶段的塑性材料(如铝合金、锰钢等)，通常将对应于塑性应变 $\varepsilon=0.2\%=0.002$ 时的应力定义为该材料的屈服极限，称为名义屈服极限，记为 $\sigma_{0.2}$。如图 1-7 所示。

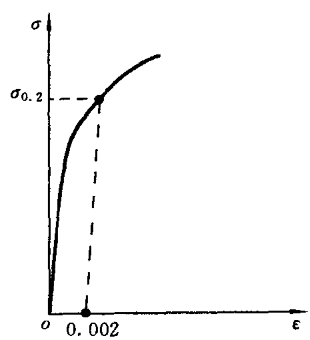

图 1-7

6. 应力集中概念

应力集中：构件尺寸发生突变处应力剧增的现象。

应力集中在塑性材料中的敏感性比脆性材料低，在静载荷作用时，对塑性材料可以不考虑应力集中的影响。

7. 拉伸(压缩)的超静定问题及解

在静定结构的杆件中，内力只与外力大小有关，而与材料，截面形状、大小无关，也与温度变化、装配误差等因素无关。但在超静定结构中的杆件，内力不但与外力大小有关，还与材料、截面形状

及大小、温度变化、装配误差等因素有关。

超静定结构的约束反力等未知力的数目比平衡方程数多，不能靠用平衡方程求出所有未知力。未知力数比平衡方程数多几个就称几次超静定。材料力学中一般只讨论一次、二次超静定问题。

求解拉压超静定问题的基本步骤如下。

① 列出问题的平衡方程，确定问题的超静定次数。

② 列变形几何协调方程。找出问题中必须满足的变形协调关系，其数目即为问题的超静定次数。

③ 列物理方程，即胡克定律(变形与受力之间的关系)。

④ 将几何方程代入物理方程，得到补充方程(几何方程变为力之间的关系)。

⑤ 由平衡方程与补充方程联立即可求出全部未知力。

8. 理想弹塑性材料

当应力小于屈服极限(σ_s，τ_s)时，应力与应变成正比，服从胡克定律。应力一旦达到屈服极限时，应力不再发生变化，保持不变，而应变不断增长，为塑性变形。如图 1-8 所示。塑性材料在极限设计时，经常把材料看成为理想弹塑性材料，这时超静定结构往往简化成静定结构，极限设计可以提高结构的承载能力。

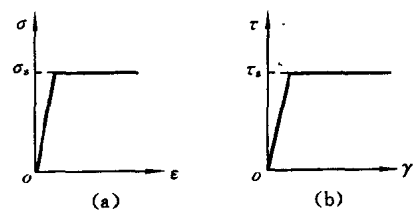

图 1-8

例题解析

［**例 1-1**］ 混凝土柱尺寸如图 1-9(a)所示，柱的弹性模量 $E=20$ GPa，柱受轴向压力 $P=200$ kN，若不计柱自重的影响，求柱的压缩量。

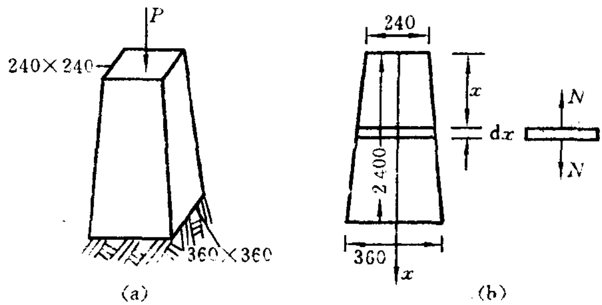

图 1-9

解　柱内的轴力为

$$N = P = 200\ \text{kN}$$

距离柱顶 x 处的截面边长由图 1-9(b)得到：

$$a(x) = (240 + \frac{x}{20})$$

在 x 截面处取微段 $\mathrm{d}x$，该微段的压缩量：

$$\mathrm{d}(\Delta l) = \frac{N\mathrm{d}x}{EA(x)} = \frac{P\mathrm{d}x}{Ea^2(x)}$$

整个柱子的压缩量为

$$\Delta l = \int_0^l \frac{P\mathrm{d}x}{Ea^2(x)} = \int_0^{2.4} \frac{200 \times 10^3 \mathrm{d}x}{20 \times 10^9 \times \left(240 + \dfrac{x}{20}\right)^2 \times 10^{-6}}$$

$$= \frac{-200 \times 10^3 \times 20}{20 \times 10^9 \times 10^{-3}} \times \left(\frac{1}{360} - \frac{1}{240}\right) \mathrm{m} = 0.278\ \mathrm{mm}$$

析　由于柱子的截面是变截面，所以采用微段 $\mathrm{d}x$ 的伸长量的计算公式。即 $\mathrm{d}(\Delta l) = N\mathrm{d}x/EA$。然后采用整根杆积分求得柱的压缩量。同样当力是分布力时，也可用微段 $\mathrm{d}x$ 的伸长量的方法，用积分求得杆的伸长量。

［**例 1-2**］　直径相同的铸铁圆截面直杆，可设计成图 1-10(a)、(b)两种结构的形式，问哪种结构所承受的荷载 P 大？大多少？

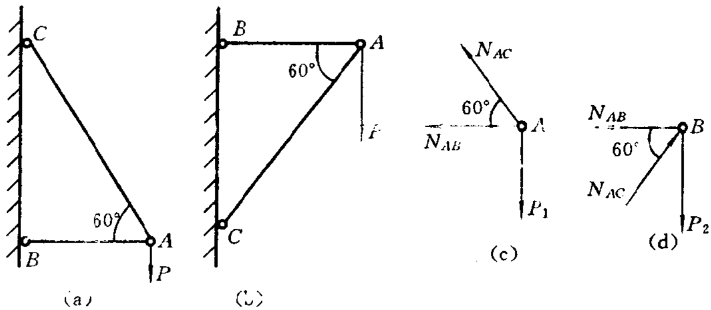

图 1-10

解 由于杆件材料、截面形状相同，并且为铸铁，属于脆性材料，抗压性能优于抗拉性能，因此比较两种结构的拉应力与 P 的关系。图 1-10(a)中的 AC 杆受拉，取 A 点为受力体，受力图如图 1-10(c)。$(\sigma_b)_t$ 为拉伸的强度极限。令 $N_{AC}=(\sigma_b)_tA=2P_1$，则

$$P_1=\frac{(\sigma_b)_tA}{2}$$

图(b)中 AB 杆受拉，取 A 点为受力体，受力图如图 1-10(d)。

令 $N_{AB}=(\sigma_b)_tA=\dfrac{P_2}{\sqrt{3}}$，$P_2=\sqrt{3}(\sigma_b)_tA$，所以 $P_2>P_1$，即图(b)承受荷载 P 大。

又
$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{2\sqrt{3}(\sigma_b)_tA}{(\sigma_b)_tA}=2\sqrt{3}$$

所以图(b)承受的荷载 P 是图(a)承受的荷载 P 的 $2\sqrt{3}$ 倍。

析 本题的关键是杆件的材料为铸铁，是典型的脆性材料，拉伸强度极限$(\sigma_b)_t$ 远远小于压缩的强度极限$(\sigma_b)_t$，因此用拉伸杆件来控制设计，即求拉伸杆件的应力达到拉伸强度极限时的承受荷载 P，然后比较两结构的 P 值。

［**例 1-3**］ 如图 1-11(a)所示结构中，1，2 两杆的横截面直径分别为 $d_1=10$ mm，$d_2=20$ mm，$P=10$ kN。横梁 ABC，CD 视为刚体。求两杆内的应力。

解　CD 杆的 D 支座不受力，CD 杆内也不受力，所以 P 可视为作用于 ABC 杆的 C 端。取 ABC 为受力体，受力图如图 1-11(b)所示。

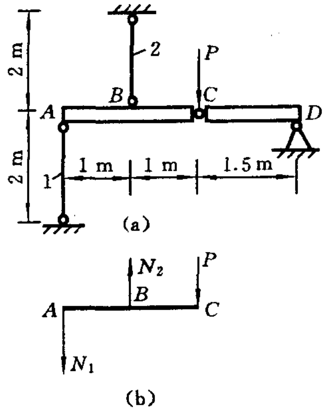

图 1-11

$$N_1 = 10\ \text{kN}, N_2 = 20\ \text{kN}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10 \times 10^3 \times 4}{\pi \times 10^2 \times 10^{-6}}\ \text{MPa} = 127.3\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{20 \times 10^3 \times 4}{\pi \times 20^2 \times 10^{-6}}\ \text{MPa} = 63.7\ \text{MPa}$$

析　此题属静定问题，在分析 CD 杆平衡时可知 D 点的支反力 $R_0 = 0$，即 CD 杆完全不受力，仅在 P 作用于 ABC 杆时被其带动绕 D 点作刚体转动。所以只需对 ABC 杆作静力分析即可求解。

[例 1-4]　如图 1-12 所示三角架，BC 为钢杆，AB 为木杆。BC 杆的横截面面积为 $A_2 = 6\ \text{cm}^2$，许用应力为 $[\sigma]_2 = 160\ \text{MPa}$。$AB$ 杆的横截面面积为 $A_1 = 100\ \text{cm}^2$，许用应力为 $[\sigma]_1 = 7\ \text{MPa}$。试求许可吊重 P。

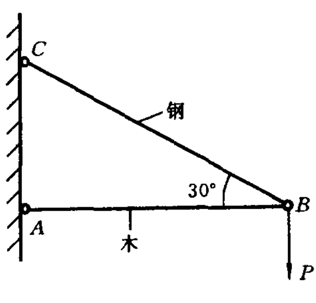

图 1-12

解　钢杆 BC 的强度设计：

令　$N_{BC} = [\sigma_2]A_2 = 160 \times 10^6 \times 6 \times 10^{-4}\ \text{N} = 96\ \text{kN}$

$$N_{BC} = 2P_1,\quad P_1 = 48\ \text{kN}$$

木杆 AB 的强度设计：

令　$N_{AB} = [\sigma]_1 A_1 = 7 \times 10^6 \times 100 \times 10^{-4}\ \text{N} = 70\ \text{kN}$

$$N_{AB} = \sqrt{3} P_2,\quad P_2 = \frac{N_{AB}}{\sqrt{3}} = 40.4\ \text{kN}$$

所以 $$P=P_2=40.4\ \text{kN}。$$

析 结构中有两种不同材料的杆件，在设计结构的许可荷载时，可以令一种材料达到许用应力值，求出这时的许可荷载，而此时另一杆件暂不考虑。然后再令另一种材料达到其许用应力，而前一杆件暂不考虑，这时设计出另一种情况下的许可荷载。比较两种许可荷载，取较小的许可荷载作为结构的许可荷载。

［**例 1-5**］ 如图 1-13(a)所示拉杆沿斜截面 mn 由两部分胶合而成。设在胶合面上的许用拉应力为$[\sigma]=100$ MPa，许用剪应力为$[\tau]=50$ MPa。杆由胶合缝控制强度。求当杆件承受最大拉力 P 时 α 角为多大？若杆件横截面面积为4 cm^2，试确定许可荷载 P。

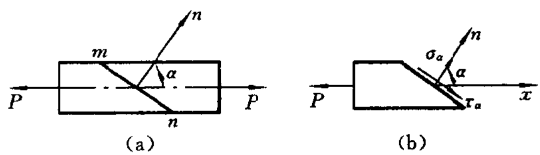

图 1-13

解 根据斜截面上的应力公式，有

$$\sigma_\alpha = \sigma_0\cos^2\alpha = \frac{P}{A_0}\cos^2\alpha \tag{①}$$

$$\tau_\alpha = \sigma_0\sin\alpha\cos\alpha = \frac{P}{A_0}\sin\alpha\cos\alpha \tag{②}$$

①，②式中的 σ_0，A_0 为横截面上的应力与横截面面积。斜截面上的应力 σ_α，τ_α，如图 1-13(b)所示。

令 $\sigma_\alpha=[\sigma]$，则得

$$P = \frac{[\sigma]A_0}{\cos^2\alpha} \tag{③}$$

令 $\tau_\alpha=[\tau]$，则得

$$P = \frac{[\tau]A_0}{\sin\alpha\cos\alpha} \tag{④}$$

所谓 P 最合理是斜截面上的正应力与剪应力同时达到许用

应力。这时的 P 为最大。即

$$③=④,\quad \frac{[\sigma]A_0}{\cos^2\alpha}=\frac{[\tau]A_0}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{[\tau]}{[\sigma]}=0.5,\quad \alpha=26.6^\circ$$

所以 $\alpha=26.6^\circ$时杆承受的拉力 P 最大。

当 $A_0=4\ \mathrm{cm}^2$ 时， $\alpha=26.6^\circ$， 所以

$$P_{\max}=\frac{[\sigma]A_0}{\cos^2\alpha}=\frac{100\times10^6\times4\times10^{-4}}{0.8}\ \mathrm{N}=50\ \mathrm{kN}$$

即杆件承受的最大拉力为 50 kN。

析 由于胶合缝的抗拉及抗剪强度决定杆的强度，因此斜截面位置最好是该斜截面上的正应力与剪应力同时达到其许用应力值。利用此关系可求出合理的 α 值。

当斜截面的角度比 α 大或小时，可根据公式③、④得知杆承受的最大拉力都将降低。

[**例 1-6**] 三角吊架如图 1-14 所示。两杆材料相同，都为塑性材料，水平杆的长度为 l，斜杆的长度随 θ 角的大小而定，设许用应力为 $[\sigma]$。求该结构具有最小重量时的 θ 角。

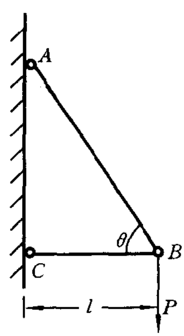

图 1-14

解 取节点 B 为受力体，求得

$$N_{BA}=\frac{P}{\sin\theta}\quad(拉)$$

$$N_{BC}=P\cot\theta\quad(压)$$

两杆材料相同，当 θ 角为合理值时，两杆的应力要求同时达到许用应力 $[\sigma]$。这时两杆的截面面积分别为

$$\sigma_{BA}=\frac{N_{BA}}{A_{BA}}=\frac{P}{A_{BA}\sin\theta}=[\sigma]$$

所以 $$A_{BA}=\frac{P}{[\sigma]\sin\theta}$$

$$\sigma_{BC}=\frac{N_{BC}}{A_{BC}}=\frac{P\tan\theta}{A_{BC}}=[\sigma]$$

$$A_{BC}=\frac{P\cot\theta}{[\sigma]}$$

同时 $$l_{BA}=\frac{l_{BC}}{\cos\theta}$$

结构的体积 V 为

$$V=l_{BA}A_{BA}+l_{BC}A_{BC}=\frac{l_{BC}}{\cos\theta}\times\frac{P}{[\sigma]\sin\theta}+l_{BC}\times\frac{P\cos\theta}{[\sigma]\sin\theta}$$

$$=\frac{Pl_{BC}}{[\sigma]}\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{Pl_{BC}}{[\sigma]}\times\frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

若体积 V 为最小，则应有 $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=0$$

得 $$2\cos^2\theta-\sin^2\theta=0$$

得 $$\tan\theta=\sqrt{2},\quad \theta=54.7^\circ$$

析 本题的关键在于计算体积时，由于 BC 杆处于水平，这时杆最短。所以两杆的长度都以 BC 杆的长度 l_{BC} 为依据。在计算面积时，由于两杆同时要满足强度条件，且同时要达到许用应力，因此面积都用许用应力 $[\sigma]$ 表达。这样就建立起了体积与角度 θ 的函数关系。再用求极值的方法，最后求出 θ 角。

[**例 1-7**] 一铸铁压缩试件如图 1-15(a)所示。其内摩擦系数 $f=0.28$。证明该试件受压破坏时破坏面的法线与轴线的夹角 $\alpha=53^\circ$。

解 铸铁试件受压破坏时为斜截面断裂，而斜截面上的应力如图 1-15(b)所示。

若材料的剪切强度极限为 τ_b，斜截面有 τ_α 及内摩擦力 F_τ。材料断裂必须满足：

$$\tau_\alpha A_\alpha - F_\tau \geqslant \tau_b A_\alpha \quad ①$$

①式中的 A_α 为斜截面面积。内摩擦力 F_τ 与正压力 $\sigma_\alpha A_\alpha$ 有关：

$$F_\tau=\sigma_\alpha A_\alpha f$$

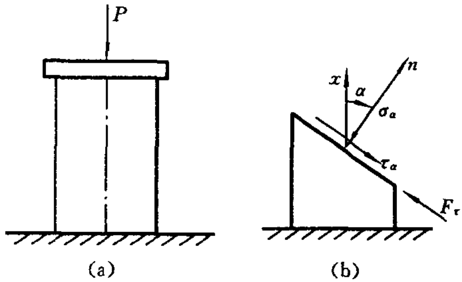

图 1-15

代人①式得 $$\tau_\alpha A_\alpha - \sigma_\alpha A_\alpha f \geqslant \tau_b A_\alpha$$

即 $$\tau_\alpha - \sigma_\alpha f \geqslant \tau_b \qquad ②$$

将斜截面应力公式(1-2)代人②式中，得到

$$\sigma_0 \sin\alpha\cos\alpha - \sigma_0 f \cos^2\alpha \geqslant \tau_b$$

$$\sigma_0 \geqslant \frac{\tau_b}{\sin\alpha\cos\alpha - f\cos^2\alpha} \qquad ③$$

σ_0 使材料破坏，必为破坏时的极小值。所以有

$$\frac{d\sigma_0}{d\alpha} = 0$$

得到 $$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2f\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

即 $$\tan 2\alpha = -\frac{1}{f} = -3.5714$$

$$2\alpha = 105.6°, \quad \alpha = 52.8° \approx 53°$$

析 由于剪应力 τ_α 的作用，使材料产生错动，错动时引起了错动面上的内摩擦，产生了内摩擦力 F_τ。所以剪应力 τ_α 要使材料破坏，其产生的剪力 $\tau_\alpha A_\alpha$ 必须克服内摩擦力 F_τ 之后还应大于材料的本身强度 $\tau_b A_\alpha$。再利用斜截面上的应力与横截面上应力关系(公式(1-2))，可求出 α。

[**例 1-8**] 在如图 1-16(a)所示的结构中，AB 为水平放置的刚性杆。1、2、3 杆材料相同，弹性模量 $E=210$ GPa。已知 $l=1$ m，$A_1=A_2=100$ mm^2，$A_3=150$ mm^2，$P=20$ kN。求 C 点的水平位移