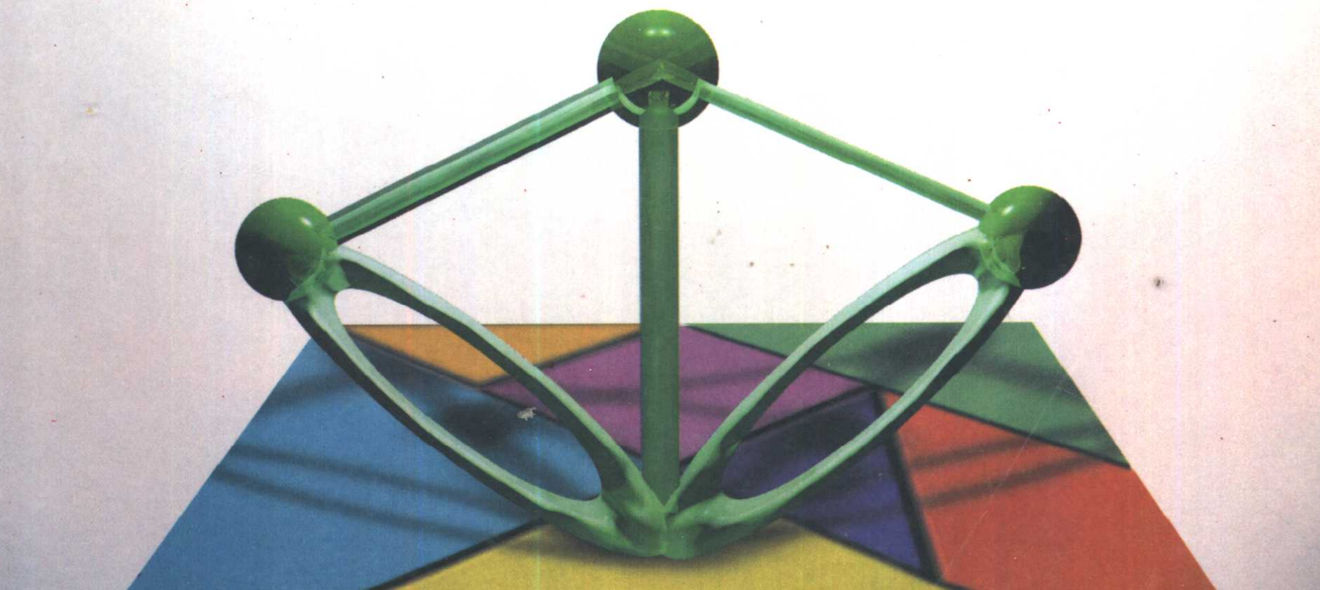
计算机科学组合学丛书

计算机算法导引

设计与分析

卢开澄　编著



清华大学出版社　http://www.tup.tsinghua.edu.cn

计算机科学组合学丛书(三)

计算机算法导引

——设计与分析

卢开澄 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书为《组合数学(算法与分析)》下册的第二版，书中内容、结构都作了极大的改变。本书讨论了动态规划、优先策略、分治策略、线性规划的分解原理、最佳二分树、密码学等 29 个问题，对算法和它的复杂性作了分析。本书可作为计算机系本科学生及研究生教材，对数学系师生和科研工作者可作为参考书。

图书在版编目(CIP)数据

计算机算法导引：设计与分析/卢开澄编著．—2 版．—北京：清华大学出版社，1996.10
ISBN 7-302-02277-1

Ⅰ．计…　Ⅱ．卢…　Ⅲ．① 电子计算机-计算方法-设计　② 电子计算机-计算方法-分析(数学)　Ⅳ．TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 16193 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
　　　　http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京市密云胶印厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：21　字数：493 千字
版　次：1996 年 11 月第 1 版　2000 年 12 月第 5 次印刷
书　号：ISBN 7-302-02277-1/TP・1118
印　数：11001～14000
定　价：21.00 元

计算机科学组合学丛书

前　言

电子计算机的出现是20世纪的大事，它改变了我们这个世界的面貌。可以毫不夸张地说，它的影响遍及所有的角落，几乎无处不感觉到它的存在。数学更不例外。严格地说，电子计算机本身就是近代数学的辉煌成就。将计算机与数学割裂开来，既不合理也不可能。组合学也就是在计算机科学篷勃发展的刺激下而崛起的，从而成为近若干年来最活跃的数学分支。它研究的问题有的可追溯到欧拉和哈密尔顿等18世纪的数学家，但它成为一新的分支还是近若干年的事。它从与计算机科学相结合中获得了广阔的发展空间，从而也为计算机科学奠定了理论基础。

什么是计算机科学呢？有的学者将它定义为研究算法的一门学科。研究算法无疑是计算机科学的重要领域，也是本丛书的核心内容，贯穿始终。组合学家在20世纪70年代初建立的算法复杂性"NP理论"，至今仍然令无数计算机科学工作者与数学工作者为之折腰。

计算机科学里的组合学内容十分广泛。本丛书涉及组合分析、图论、组合算法、近代密码学、编码理论及算法复杂性等七部分。

组合分析是算法的理论基础。组合分析之与组合算法犹如数学分析之与计算数学，众所周知，前者是后者的理论根基。

图论原本是组合数学这个"家族"的主要成员，只因它已成长壮大，故自立门户独立出去。

算法复杂性的NP理论是近30年的一大成就。研究表明对于一类叫做NPC类的困难问题，至今都不存在有效算法，但它们难度相当，只要其中任何一个找到多项式解法，则全体都获得解决；或证明它们根本不存在有效办法。不论是前者还是后者都还看不见露到海平面上的桅杆塔，它吸引了众多的有志之士。密码学是其中十分引人入胜的分支。如若设计好的密码，对它的破译等价于某一NPC类困难问题，无疑这样的密码将是牢不可破的。

在计算机网络深入普及的信息时代，信息本身就是时间，就是财富。信息的传输通过的是脆弱的公共信道，信息储存于"不设防"的计算机系统中，如何保护信息的安全使之不被窃取及不至于被纂改或破坏，已成为当今被普遍关注的重大问题。密码是有效而且可行的办法。在计算机网络的刺激下，近代密码学便在算法复杂性理论的基础上建立起来了。密码作为一种技术，自从人类有了战争，不久便有了它。但作为一门学科则是近20多年的事。甚至于它已成为其它学科的基础。密码也从此走出"军营"，进入百姓家。

实际中的"优化"问题是大量的，半个多世纪以来它曾经几度辉煌。近来在计算机科学的影响下，又出现了若干闪光点，十分耀眼，引人注目。

实际上密码也是一种编码。如果说密码学研究的编码是保证通信的保密与安全，则编码理论研究的是通信中如何纠错与检错。计算机纠错码是既实用、理论上又饶有趣味的分支。

本丛书是作者在清华大学计算机科学与技术系长期工作的总结。它不是一部"长篇"记述，而是互相关联又彼此相对独立，因此难免有少量交叉。它们涉及的面如此之广，囿于作者的水平，缺点和错误在所难免，敬请读者不吝指正。谢谢。

序　　言

有人说“计算机科学是一门研究算法的科学”。不论这个说法是否全面，算法无疑是计算机科学的重要组成部分。它近来发展极其迅速，说是异彩纷呈并不为过。“算法与算法复杂性分析”已是计算机专业本科生，特别是研究生的一门必需掌握的内容。

与算法有关的还有一个大家熟悉的公式：

程序＝算法＋数据结构

这说明算法的研究不单是数学问题，还和数据结构密切相关。这个观点在这里必须突出地强调，必须强调的还有一点，那就是“实践”，只有通过动手实践才能掌握算法的实质。正因为这个原因，实例是本书的重要组成部分。

本书是在“组合数学（算法与分析）”下册的基础上改写而成。第 1 章至第 5 章及第 18 章、第 19 章由卢华明执笔，第 6 章至第 12 章及第 16 章由黄连生完成。没有他们的合作，本书的出版可能还得拖相当一段时间。作者深知书中存在不少缺点与错误，还望读者不吝指教。

绪　论

快速电子计算机的出现是本世纪的一件大事，因为它改变了我们这个世界的面貌。可以毫不夸张地这么说，今天没有一个角落不感觉到它的存在，无处不感受到它的影响。

快速电子计算机贵在神速，也就是它的运算速度快，同时它的发展之迅速也是惊人的。从第一台计算机问世到现在才 50 个年头，50 岁对于一个人来说才过中年，可是计算机已从每秒 5000 次运算，发展到现在的运算速度每秒数以亿次计。元器件从继电器、真空管、晶体管、集成电路、大规模集成电路，发展到超大规模集成电路。结构上从每台机器作为运算工具的"单兵作战"模式，发展到今天将范围遍及各大洲的计算机网络，算法也从单机的串行计算发展到网络上并行的分布计算。

一台作 10^9 次/秒运算的计算机的效率超过 10 亿人同时工作。它可以作中期的天气预报，可以控制庞大的化工厂生产过程，以至于还可以驾驭现代化战争，从这个意义上来说它确实是近乎神奇的。不过必须强调的是这些都是在人的安排下进行工作的。以人们利用计算机作天气预报为例，必须依据天气预报的偏微分方程及编好程序，指导计算机依照人的意志一步步地工作。

在强调计算机虽然神通广大，还是在人的控制下工作的同时，还应说明计算机并非什么都能做，有的事情理论上它根本做不了。讨论哪些事计算机能做，哪些事计算机做不了，这属于可计算性理论研究的范畴。本书后面还将看到有些问题理论上计算机虽是能做的，但实际上又是不可能完成的，比如说开动计算机必须运行几个、几十个世纪以至更长时间，它实际上是不能完成的。比如拿最简单例子，26 个英文字母全排列，它的排列数为：

$$26! \approx 4 \times 10^{26}$$

以每年 365 天计算，共有

$$365 \times 24 \times 3600 = 3.1536 \times 10^7 \text{ 秒}$$

以每秒能完成 10^7 个排列的超高速电子计算机来做这项工作，需要

$$4 \times 10^{26}/(3.1536 \times 10^{14}) \approx 1.2 \times 10^{12} \text{ 年}$$

即使计算机运行速度随着技术的提高，恐怕也还是不可能实现的。因计算机的速度再提高也有它的极限。这里是在假定计算机从不休息的前提下作估计的。

"算法与算法复杂性"是研究算法的一门学科。它还很年轻远未定型，还处在发展中。本书是采取一个问题一个问题地讨论的方式进行，这里的每个问题也可能是一种算法，也可能是某一个解题的对象即问题。首先还要回答：什么是算法。如若某一种方法不仅适用于解决具体的一个问题，而是能用之解决若干个问题，则这个方法便可称之为一种算法了。

评价算法的效率是要对它所需要的时间和存贮单元进行估计，前者为时间复杂性分析，后者为空间复杂性分析。

如何描述算法步骤呢？本书采用自然语言叙述的办法，避免用类似于某种高级语言

的形式化办法。有些算法的实质是极为直观，非要形式化不可，则可能适得其反将问题异乎寻常地复杂化了。实例更是帮助正确理解算法的重要环节。总之，通过算法的描述，辅以例子，力求将它理解得正确。作者有这样体会，有的方法只有通过自始至终实践一遍才能了解透彻。

本书用到一些符号和术语，也在这里介绍一下。

$N=\{0,1,2,\cdots\}$； R＝实数集合；

$N^+=\{1,2,\cdots\}$； R^+＝正实数集合；

$R^*=R^+\cup\{0\}$。

令 f 和 g 是由 N 到 R^* 的两个函数。

定义 令 $f: N\to R^*$，

$O(f) \triangleq \{g: N\to R^* \mid \exists\ c\in R^*, \exists\ n_0\in N, \forall\ n\geqslant n_0$，使 $g(n)\leqslant cf(n)\}$

也就是 $O(f)$ 是函数 $g: N\to R^*$ 的集合，它以 $cf(n)$ 为上界。亦即若存在 $c\in R^*$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=c$，则 $g\in O(f)$。基于上述概念，若 $f(n)=n^3, g(n)=n^2$，则 $g\in O(f)$，但 $f\notin O(g)$。

定义 令 $f: N\to R^*$，

$\Omega(f) \triangleq \{g: N\to R^* \mid \exists\ n_0\in N, \exists\ c\in R^+, \forall\ n\geqslant n_0$，使 $g(n)\geqslant cf(n)$，

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=c>0$，则 $g\in\Omega(f)$。

定义 令 $f: N\to R^*$，$\Theta(f)=O(f)\cap\Omega(f)$，

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=c, c\in R^+$，则 $g\in\Theta(f)$。

其中 $c\in R^+$ 表示 $c\neq 0, c\neq\infty$，$g\in\Theta(f)$ 意味着 g 和 f 同阶。

O,Ω,Θ 有以下的性质（假定 $f,g,h: N\to R^*$）：

(1) 若 $f\in O(g), g\in O(h)$，则 $f\in O(h)$；

(2) $f\in O(g)\Leftrightarrow g\in\Omega(f)$；

(3) 若 $f\in\Theta(g)$，则 $g\in\Theta(f)$；

(4) $O(f+g)=O(\max\{f,g\})$。

这 4 个性质的证明留作习题。

目　录

第1章 动态规划

1.1 最短路径问题

数学规划是研究最优化的一类数学问题，包含有线性规划，非线性规划等内容。和动态规划有什么关系呢？动态规划实际上是研究一类最优化问题的算法，应用范围十分广。下面通过若干实例，介绍如何将一个最优化问题通过动态规划来求解的基本原理。

如图 1.1.1，从 A_0 点要铺设一条管道到 A_6 点，中间必须经过 5 个中间站，第一站可以在 A_1，B_1 两地中任选一个，类似地，第二、三、四、五站可供选择的地点分别是：$\{A_2,B_2,C_2,D_2\}$，$\{A_3,B_3,C_3\}$，$\{A_4,B_4,C_4\}$，$\{A_5,B_5\}$。连接两地间管道的距离（或造价）用连线上的数字表示，要求选一条从 A_0 到 A_6 的铺管线路，使总距离最短（或总造价最小）。

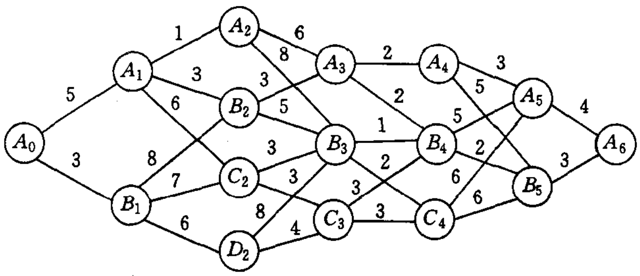


图 1.1.1

我们首先想到使用穷举法。在第一段，有两种路径选择：A_0A_1、A_0B_1。在第二段，若选 A_0A_1，第二段路径有三种选择：A_1A_2、A_1B_2、A_1C_2；若选 A_0B_1，也有三种选择：B_1B_2、B_1C_2、B_1D_2。所以两段共有 6 种选择。依次类推，从 A_0 到 A_6 共有 $2\times3\times2\times2\times2\times1=48$ 种不同路径。可通过 $48\times5=240$ 次加法，47 次比较，即通过各种可能方案的穷举，最后可求出从 A_0 到 A_6 的最短路径是：

$$A_0 \to A_1 \to B_2 \to A_3 \to B_4 \to B_5 \to A_6$$

相应的最短距离是 18。

但我们注意到最短路径有这样一个特性，即如果最短路径的第 k 站通过 P_k，则这一最短路径在由 P_k 出发到达终点的那一部分路径，对于始点为 P_k 到终点的所有可能的路径来说，必定也是距离最短的。这一特性很容易证明。读者可自己来完成它。

根据最短路径这一特性，启发我们计算时从最后一段开始，从后向前逐步递推的方法，求出各点到 A_6 的最短路径，最后求得从 A_0 到 A_6 的最短路径。步骤如下：

$k=6$ 时

设 $f(A_5)$表示由 A_5 到 A_6 的最短距离，$f(B_5)$表示由 B_5 到 A_6 的最短距离，显然有：

$$f(A_5)=4,\qquad f(B_5)=3。$$

$k=5$ 时

$$\begin{aligned} f(A_4) &= \min\{d(A_4,A_5)+f(A_5),d(A_4,B_5)+f(B_5)\} \\ &= \min\{\underline{3+4},\ 5+3\}=7 \end{aligned}$$

这里括号里的底线____表示最小值所取的项。即 $f(A_4)$取的是 $A_4 \to A_5 \to A_6$，而不是 $A_4 \to B_5 \to A_6$。以后同此，不再说明。

$$\begin{aligned} f(B_4) &= \min\{d(B_4,A_5)+f(A_5),d(B_4,B_5)+f(B_5)\} \\ &= \min\{5+4,\underline{2+3}\}=5 \\ f(C_4) &= \min\{d(C_4,A_5)+f(A_5),d(C_4,B_5)+f(B_5)\} \\ &= \min\{6+4,\underline{6+3}\}=9 \end{aligned}$$

$k=4$ 时

$$\begin{aligned} f(A_3) &= \min\{d(A_3,A_4)+f(A_4),d(A_3,B_4)+f(B_4)\} \\ &= \min\{2+7,\underline{2+5}\}=7 \\ f(B_3) &= \min\{d(B_3,B_4)+f(B_4),d(B_3,C_4)+f(C_4)\} \\ &= \min\{\underline{1+5},2+9\}=6 \\ f(C_3) &= \min\{d(C_3,B_4)+f(B_4),d(C_3,C_4)+f(C_4)\} \\ &= \min\{\underline{3+5},3+9\}=8 \end{aligned}$$

$k=3$ 时

$$\begin{aligned} f(A_2) &= \min\{d(A_2,A_3)+f(A_3),d(A_2,B_3)+f(B_3)\} \\ &= \min\{\underline{6+7},8+6\}=13 \\ f(B_2) &= \min\{d(B_2,A_3)+f(A_3),d(B_2,B_3)+f(B_3)\} \\ &= \min\{\underline{3+7},5+6\}=10 \\ f(C_2) &= \min\{d(C_2,B_3)+f(B_3),d(C_2,C_3)+f(C_3)\} \\ &= \min\{\underline{3+6},3+8\}=9 \\ f(D_2) &= \min\{d(D_2,B_3)+f(B_3),d(D_2,C_3)+f(C_3)\} \\ &= \min\{8+6,\underline{4+8}\}=12 \end{aligned}$$

$k=2$ 时

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \min\{d(A_1,A_2)+f(A_2),d(A_1,B_2)+f(B_2),d(A_1,C_2)+f(C_2)\} \\ &= \min\{1+13,\underline{3+10},6+9\}=13 \\ f(B_1) &= \min\{d(B_1,B_2)+f(B_2),d(B_1,C_2)+f(C_2),d(B_1,D_2)+f(D_2)\} \\ &= \min\{8+10,\underline{7+9},6+12\}=16 \end{aligned}$$

$k=1$ 时

$$\begin{aligned} f(A_0) &= \min\{d(A_0,A_1)+f(A_1),d(A_0,B_1)+f(B_1)\} \\ &= \min\{\underline{5+13},3+16\}=18 \end{aligned}$$

上述计算结果可表示如图 1.1.2，其中$\frac{A_5}{4}$表示从 A_5 出发到终点的最短路径长度为 4，即 $A_5 \xrightarrow{4} A_6$，余此类推。

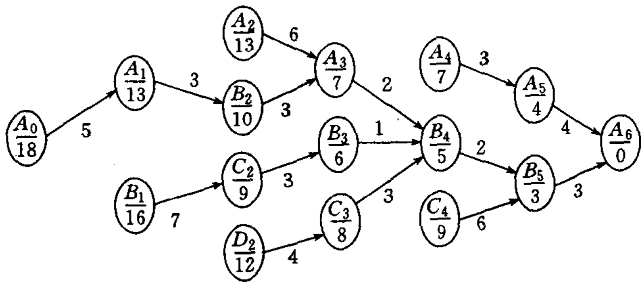


图 1.1.2

一共要用 15 次比较运算和 28 次加法运算就可得到从 A_0 到 A_6 的最短距离，而且在这过程中，还得到其它各点到 A_6 的最短路径和最短距离。

一般地，若我们考虑如图 1.1.3 所示从始点 $O(0,0)$ 到终点 $E(m,n)$ 的最短路径（也称格路）问题。若用穷举法，则需

$$(m+n-1)C(n+m,n)=\frac{(n+m-1)(n+m)!}{n!m!}$$

次加法及 $\frac{(n+m)!}{n!\,m!}-1$ 次比较运算。组合数 $C(n+m,n)$ 为从 O 点到 E 点的路径数，这是考虑到图 1.1.3 的每一格路和 m 个 x，n 个 y 的任一排列一一对应。比如排列 $\underbrace{x\,x\cdots x}_{m个}\underbrace{y\,y\cdots y}_{n个}$，对应于从 O 点先沿 x 方向走 m 块，后沿 y 方向走 n 块到 E 点。相当于由 m 个 y，n 个 x 构成的长度为 $m+n$ 的符号串数目，即从 $m+n$ 个格子中任选 m 个格子作为 x、其余为 y 的方案数。

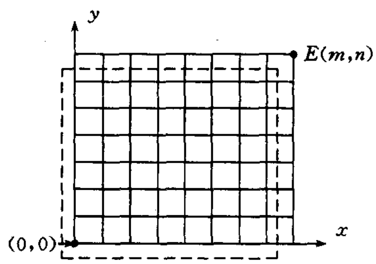


图 1.1.3

但用后一种方法只需 $2mn+m+n$ 次加法及 mn 次比较就够了。不难知道图 1.1.3 由虚线包围的矩形域内的点要作 2 次比较，2 次加法，在这以外的点只需 1 次加法，无需作比较。

当 $m=n$ 时，穷举法需进行 $(2n-1)\cdot(2n)!\,/(n!)^2$ 次加法，$(2n)!\,/(n!)^2-1$ 次比较。后一种方法只要作 $2(n^2+n)$ 次加法，n^2 次比较。由 Stirling 公式

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

可知穷举法的运算量是 n 的指数函数，后一种算法则只是 n^2 量级。

1.2 最佳原理

从前节例子知道：一个最短路径问题可变成多段判决问题，利用了最短路径的一个性质：从起点到终点的最短路径也是该路径上各点到终点的最短路径。与此类似的问题

很多，故可抽象成组合优化问题中的一个重要的最佳原理：假设为了解决某一优化问题，需要依次作出 n 个决策 $D_1, D_2, \cdots, D_n$，如若这个决策序列是最优的，对于任何一个整数 k，$1<k<n$，不论前面 k 个决策是怎样的，以后的最优决策只取决于由前面决策所确定的当前状态，即以后的决策 $D_{k+1}, D_{k+2}, \cdots, D_n$ 也是最优的。

本章的这节和以后各节主要举例说明如何灵活运用最佳原理。动态规划与线性、非线性规划不尽相同，实际它是算法的一种。最佳原理说起来很简单，如何灵活应用它则又是另一回事。它用途很广，利用它来解决一个新问题的本身也就是一种创造。我们希望下面的例子能帮助读者掌握它的技巧，并达到举一反三。

例 1 某工厂购进 1000 台机器，准备生产 P_1、P_2 两种产品，若生产产品 P_1，每台机器每年可收入 50 千元，损坏率达 65%；若生产产品 P_2，每台机器年收入为 40 千元，但损坏率仅有 40%；估计三年后将有新的机器出现，旧的机器将全部淘汰，试问应如何安排生产，使三年内收入最多？计划以一年为周期。

以上的问题原可以化为整数规划问题求解。设 x_1, x_2, x_3 分别是第 1、2、3 年中用以生产产品 P_1 的机器数，y_1, y_2, y_3 分别是第 1、2、3 年用以生产产品 P_2 的机器数。则得到求

$$\max z = 50000(x_1 + x_2 + x_3) + 40000(y_1 + y_2 + y_3)$$

约束条件

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 1000 \\ x_2 + y_2 = 0.35x_1 + 0.60y_1 \\ x_3 + y_3 = 0.35x_2 + 0.60y_2 \end{cases}$$

$x_i, y_i \geqslant 0$ 的整数，$i=1,2,3$

现应用最佳原理变成多段判决问题如下：

设 $P_i(n)$ 为 n 台机器在以后 i 年内的最大收益。若只考虑安排一年的生产，x_3 为生产 P_1 的机器数目。从 $i=1$ 开始，即一年后的最大收益为：

$$P_1(n) = \max_{0 \leqslant x_3 \leqslant n} \{50000x_3 + 40000(n - x_3)\}$$
$$= 50000n$$

即
$$x_3 = n$$

进而考虑 $i=2$，即若考虑两年的生产，x_2 为两年中第一年生产 P_1 的机器数目，则一年后机器剩余数为 $0.35x_2 + 0.60(n-x_2)$，故有

$$P_2(n) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant n} \{50000x_2 + 40000(n - x_2) + P_1(0.35x_2 + 0.60(n - x_2))\}$$

由于 $P_1(k) = 50000k$，故

$$P_2(n) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant n} \{50000x_2 + 40000n - 40000x_2 + 50000(0.60n - 0.25x_2)\}$$
$$= \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant n} \{-2500x_2 + 70000n\}$$
$$= 70000n$$

即
$$x_2 = 0$$

最后考虑 $i=3$，若考虑三年的生产，第一年生产 P_1 的机器数目设为 x_1，则有

$$P_3(1000) = \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant 1000} \{50000x_1 + 40000(1000 - x_1) + P_2(0.35x_1 + 0.60(1000 - x_1))\}$$