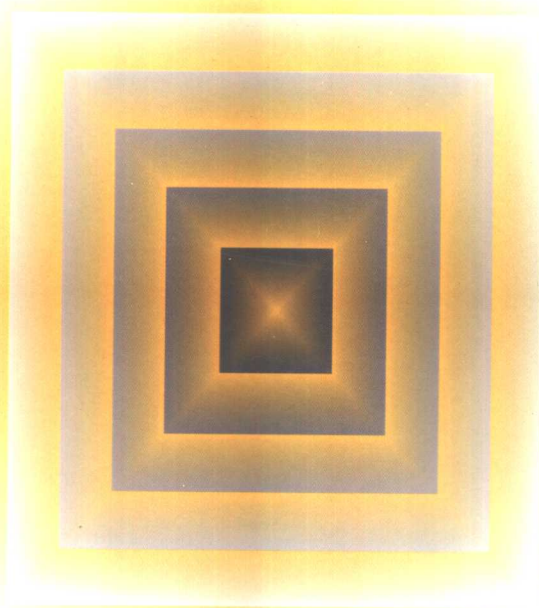


抽象代数

西安交通大学数学研究生教学丛书

盛德成 编著



科学出版社

西安交通大学数学研究生教学丛书

抽 象 代 数

盛德成 编著

科 学 出 版 社

2001

内 容 简 介

本书介绍了几类最基本的代数结构及其简单的应用. 主要内容有半群、群、环、域、模、格等. 本书叙述由浅入深, 并配有较多富有启发性的例题和习题, 便于教学和自学, 对数学专业研究生来说, 是一本很好的参考书.

读者对象: 高等院校数学系师生及有关工程技术人员.

图书在版编目(CIP)数据

抽象代数/盛德成编著. -北京: 科学出版社, 2001

(西安交通大学数学研究生教学丛书)

ISBN 7-03-009088-8

I. 抽… II. 盛… III. 抽象代数-研究生-教学参考资料 IV. O153

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 84561 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年8月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2000年8月第一次印刷 印张: 12 3/4

印数: 1—3 000 字数: 232 000

定价: 20.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前 言

作为西安交通大学数学研究生教学丛书之一,本书主要讲述了研究生“代数学”课程的基本内容.考虑到不同读者的需要,为了阅读、讲授和查阅的方便,在内容的安排上是从最基础的代数知识开始的.也就是说,即使本科阶段没有或只有很少的近世代数知识的读者也可以使用此书.对于那些有一定的近世代数基础的读者,则可以跳过那些熟悉的章节.

受篇幅的限制,本书只列入了一些基本的、常用的抽象代数学的内容.本书共分七章:第一章是准备性质的,重点介绍代数学中常用的那些来自集合论的概念;第二章介绍群;第三章介绍环与域;第四章介绍格与布尔代数;第五章介绍模与向量空间;第六章是范畴论的一个导引;第七章介绍抽象代数的一些应用.第六章和第七章的内容相互是独立的,读完前五章后即可阅读第六章或第七章.第七章各节的内容也是相互独立的,阅读时可以不受顺序的限制.

本书也可作为本科高年级学生学习近世代数课程的教材.对本科生一个学期学习的内容,建议选取第一章全部内容,第二章、第三章的大部分内容;对于研究生,则以第二至第六章为主,可适当加第七章的一些内容.

本书是作者十多年来在西北大学、西安交通大学为研究生讲授“代数学”课程的讲稿的基础上修改而成的.由于时间仓促和作者水平有限,不妥之处在所难免,敬请同行不吝指正.

本书写作过程中得到西安交通大学理学院的领导和同事的大力支持和帮助,在此深表谢意.

盛德成

2000年2月于西北大学

责任编辑 / 林 鹏 杨 波 · 封面设计 / 高海英 · 责任校对 / 邓介馥
(O-1327.0101)

抽 象 代 数

西安交通大学 数学研究生教学丛书

计算力学
计算智能中的仿生理论和算法
数值计算的算法与分析
统计推断导引

抽象代数

偏微分方程现代数值方法
常微分方程定性与稳定性方法
随机逼近及自适应算法
近代优化方法
应用非线性分析
动力系统基础及其方法
粗糙集理论与方法
计算机数学

张 武等
徐宗本等
张可村等
范金城等
盛德成
黄艾香等
马知恩等
聂赞坎等
徐成贤等
陈红斌等
陈绥阳等
张文修等
陈志平等

ISBN 7-03-009088-8



9 787030 090881 >

ISBN 7-03-009088-8/O · 1327

定 价: 20.00 元

目 录

第一章 集与映射	1
§ 1.1 集,子集,集的运算	1
§ 1.2 笛卡儿积集,映射	4
§ 1.3 等价关系与分类	11
§ 1.4 映射关于一个等价关系的分解	13
§ 1.5 偏序集, Zorn 引理	14
§ 1.6 整数的基本性质	17
§ 1.7 关于基数的概念	20
第二章 半群与群	23
§ 2.1 半群的定义与例子	23
§ 2.2 半群的同态	28
§ 2.3 同余,商半群	29
§ 2.4 群的定义及例子	31
§ 2.5 子群	34
§ 2.6 同构, Cayley 定理	37
§ 2.7 由子集生成的子群,循环群	39
§ 2.8 置换群	42
§ 2.9 轨道,子群的陪集	46
§ 2.10 正规子群,商群	48
§ 2.11 同态,同态基本定理	51
§ 2.12 同构定理	55
§ 2.13 群在集上的作用	59
§ 2.14 Sylow 定理	62
§ 2.15 群的直积	66
§ 2.16 群分解为不可分解子群的直积	69
第三章 环与域	75
§ 3.1 环的定义及例子	75
§ 3.2 整环,除环,域	79
§ 3.3 矩阵环	82
§ 3.4 环上的同余,理想	85
§ 3.5 商环,环的同态	91
§ 3.6 惟一分解整环	95
§ 3.7 素理想与极大理想	98
§ 3.8 环的扩张	102

§ 3.9 域的扩张	108
§ 3.10 有限域	111
第四章 格与 Boole 代数	114
§ 4.1 格	114
§ 4.2 格代数	117
§ 4.3 分配格	122
§ 4.4 模格, 半模格	124
§ 4.5 有余模格	128
§ 4.6 Boole 代数	131
第五章 模与向量空间	137
§ 5.1 模的定义及例子	137
§ 5.2 子模, 模的同态	139
§ 5.3 自由模	142
§ 5.4 模的直和	145
§ 5.5 向量空间	147
§ 5.6 共轭空间	149
§ 5.7 主理想整环上的有限生成模	151
§ 5.8 主理想整环上的有限生成模的结构	154
§ 5.9 域 F 上的 n 阶矩阵的相似标准形	157
第六章 范畴与函子	162
§ 6.1 范畴的定义及例子	162
§ 6.2 函子与自然变换	168
第七章 若干应用	174
§ 7.1 纠错码	174
§ 7.2 几何作图	179
§ 7.3 Burnside 定理及其应用	184
参考文献	190
名词索引	191

第一章 集与映射

抽象代数研究的是各种代数结构,例如,群、环、域、格、模等.但代数结构的基本成分是集和集上的映射.因此,在本书中常常要用到集合论中的一些概念和结论.为此,在着手研究各种代数结构之前,先对以后常要用到的集合论中的一些基本概念作一个简要的讨论.

§ 1.1 集,子集,集的运算

集这个概念是数学中的基本概念.我们对它作如下的说明:集是由**元素**组成的.这样,给定了一个集 M ,即是给出了 M 是由哪些元素组成的.例如:

数学系全体学生的集.

线性方程组 $Ax = B$ 的解向量的集.

多项式 $f(x)$ 的零点的集.

平面上过点 $M(1,2)$,斜率为 3 的直线上所有点的集.

全部正偶数的集.

所有自然数的集.

数域 P 上所有 m 行 n 列矩阵的集.

多项式 $f(x), g(x)$ 的所有公因式的集.

一般以大写英文字母 $A, B, \dots, S, T, \dots$ 表示集,而以小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集的元素.两个集 M, N **相等**是指它们是由同样的元素组成的,并记为 $M = N$.

若元素 a 是集 A 的元素,称 a **属于** A ,记为 $a \in A$,否则记为 $a \notin A$.

给出一个集 M 通常有两种方式.一种是列出集的全部元素,如

$$M = \{1, 2, 4, 7\}, \quad M = \{1, 2, \dots, n, \dots\};$$

另一种方式是给出集 M 的定义性质.这时,集 M 用如下记号表示:

$$M = \{a \mid P(a)\}.$$

它表示 M 是由所有使命题 $P(a)$ 为真命题的元素 a 组成的.例如

$$M = \{d(x) \mid d(x) \text{ 是 } f(x) \text{ 的因式}, d(x) \text{ 是 } g(x) \text{ 的因式}\}.$$

给出一个集的这种方式是很重要的,特别是当列出一个集的全部元素较困难时.

空集是指一个元素也没有的集,用符号 $\emptyset$ 表示.例如

$$M = \{x \mid x \text{ 是实数}, x^2 + 1 = 0\}$$

就是一个空集,即 $M = \emptyset$. 空集的引入可以使我们在谈到一个集时不必事先论证它至少有一个元素.

在本书中经常用到的几个集,常用下述记号表示:

$\mathbf{N}$ 是所有自然数的集.

$\mathbf{Z}$ 是所有整数的集.

$\mathbf{Q}$ 是所有有理数的集.

$\mathbf{R}$ 是所有实数的集.

$\mathbf{C}$ 是所有复数的集.

设 A, B 是两个集,若 $b \in B \Rightarrow b \in A$ (即由 $b \in B$ 能推出 $b \in A$), 则称 B 是 A 的**子集**, 记作 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$. 这样, 容易看到

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, \quad B \subseteq A.$$

由此, 当我们要证明 $A = B$ 时, 我们常常去证明

$$x \in A \Rightarrow x \in B, \quad x \in B \Rightarrow x \in A.$$

例 1.1.1 全体偶数的集 E 是 $\mathbf{Z}$ 的子集.

对任何集 $A, \emptyset \subseteq A, A \subseteq A$.

设 A 是一个给定的集, 令

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\},$$

它是由 A 的所有子集组成的集, 叫做 A 的**幂集**.

例 1.1.2 若 $A = \{1, 2\}$, 则 $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$.

这里应该注意 a 与 $\{a\}$ 的区别, 当 $a \in A$ 时 $\{a\} \in P(A)$.

设 A, B 是两个集, 令

$$A \cap B = \{c \mid c \in A, c \in B\},$$

称为 A 与 B 的**交**.

例 1.1.3 设 $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 2\}$ 是方程 $2x - y - 2 = 0$ 的解向量的集, $B = \{(x, y) \mid x - 2y = 2\}$ 是方程 $x - 2y - 2 = 0$ 的解向量的集, 则 $A \cap B$ 是方程组

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0, \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

的解向量的集.

设有集族 $\{A_i \mid i \in I\}$, 令

$$\cap \{A_i \mid i \in I\} = \{c \mid \text{对每一 } i \in I \text{ 有 } c \in A_i\},$$

称为集族 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的**交**.

若 $A \cap B = \emptyset$, 即 A, B 没有公共元素, 则说 A, B **不相交**.

设有集 A, B , 令

$$A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ 或 } c \in B\},$$

称为 A 与 B 的**并**.

例 1.1.4 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 5\}$, 则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A \cap B = \{2\}.$$

类似地, 设有集族 $\{A_i \mid i \in I\}$, 令

$$\bigcup \{A_i \mid i \in I\} = \{c \mid \text{存在一个 } i \in I \text{ 使 } c \in A_i\},$$

称为集族 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的并.

练习 1.1

一、下述诸集中哪些是相等的?

$$A = \{x \mid x < 10, x \text{ 是正偶数}\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x^2 < 90\};$$

$$C = \{2, 4, 6, 8\};$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

二、下述命题哪些是对的? 哪些是错的?

$$1. \emptyset \in \{\emptyset\};$$

$$2. \emptyset \in \emptyset;$$

$$3. \emptyset \in \{0\};$$

$$4. 0 \in \emptyset;$$

$$5. \emptyset \in \{\{0\}\};$$

$$6. \{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{\{1, 2\}\}\};$$

$$7. 2 \in \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{\{1, 2\}\}\}.$$

三、对任何集 A 完成下述等式:

$$A \cup \emptyset = \underline{\hspace{2cm}}; \quad A \cap A = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$A \cap \emptyset = \underline{\hspace{2cm}}; \quad A \cup A = \underline{\hspace{2cm}}.$$

四、设 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{3, 7\}, C = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \geq 9\}, D = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x < 45\},$

$E = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 2 < x < 50\}$. 确定下列各集:

$$A \cap D = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$C \cup D = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$C \cup E = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$D \cap E = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$C \cap D \cap E = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(C \cap D) \cup E = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\{x \mid x \in \mathbf{N}, x^2 \in B\} = \underline{\hspace{2cm}};$$

五、设 $A = \{a, \square, \triangle, *\}$, 写出 $P(A)$ 的全部元素.

六、对于给定的集 A , 考虑幂集 $P(A)$, 此时常称 A 为全集. 对 $B \in P(A)$, 称 $B' = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ 为 B 的余集. 试证下述 De Morgan 定理:

$$(B_1 \cup B_2)' = B_1' \cap B_2', \quad (B_1 \cap B_2)' = B_1' \cup B_2',$$

其中 $B_1, B_2 \in P(A)$.

§ 1.2 笛卡儿积集, 映射

1° 笛卡儿积集

设 S, T 是两个集, 令

$$S \times T = \{(s, t) \mid s \in S, t \in T\},$$

其中 $(s_1, t_1) = (s_2, t_2)$ 是指 $s_1 = s_2, t_1 = t_2$. 称 $S \times T$ 为 S 与 T 的笛卡儿积集. 这里并不要求 $S \neq T$. 若 S 有 m 个元素, T 有 n 个元素, 则 $S \times T$ 有 mn 个元素.

例如: 设 $S = \{1, 2\}, T = \{1, 2, 3\}$, 则 $S \times T = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

设 S 为平面上 x 轴上点的集, T 为 y 轴上点的集, 则 $S \times T$ 是整个平面上的点的集

一般地, 若 $S_1, S_2, \dots, S_r$ 是任意 r 个集, 则称所有 r 有序组 $(s_1, s_2, \dots, s_r)$,

$s_i \in S_i$ 的集为 $S_1, S_2, \dots, S_r$ 的笛卡儿积集, 并记为 $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_r$. 从而

$$S_1 \times S_2 \times \dots \times S_r = \{(s_1, s_2, \dots, s_r) \mid s_i \in S_i, 1 \leq i \leq r\}.$$

2° 映射

定义 1.2.1 集 S 到集 T 的一个映射是指有序三元组 $\langle S, T, \mu \rangle$, 其中 μ 是一个对应法则, 依此, 对每一 $s \in S$, 有惟一的 $t \in T$ 与之对应. 常记 t 为 $t = s\mu$, 集 S 叫做该映射的区域, T 叫做余区域 (如图 1.2.1).

映射 $\langle S, T, \mu \rangle$ 也常常记为 $\mu: S \rightarrow T$ 或 $S \xrightarrow{\mu} T$.

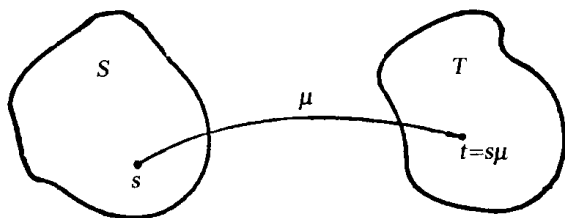


图 1.2.1

当上下文中 S 及 T 是清楚的时候, 可以简单地说映射 μ . 对于映射 $\mu: S \rightarrow T$, 若 $t = s\mu$, 则 t 叫 s 的像, s 叫 t 的逆像.

例 1.2.1 设 S 为整数集, T 为实数集, 则我们有映射 $\mu: S \rightarrow T$, 对 $x \in S, x\mu = 2x$.

例 1.2.2 设 S 是数域 P 上的 n 阶方阵的集, $T = P$, 则我们有映射 $\mu:$

$S \rightarrow T$, 对 $x \in S$, $x\mu = |x|$ 是矩阵 x 的行列式.

例 1.2.3 对给定的 S, T 及 $t_0 \in T$, 我们有映射 $\mu: S \rightarrow T$, 对 $x \in S$, $x\mu = t_0$.

例 1.2.4 对给定的 S 及 $T = S$, 我们有映射 $I_s: S \rightarrow S$, 对 $x \in S$, $xI_s = x$. 这个映射叫做 S 上的恒等映射. 当上下文中集 S 是清楚的时候, 也简记为 I 或 ε .

例 1.2.5 设 $S = T = R$ 为实数集, 令 $x\mu = \frac{1}{x}$, 则 $\langle R, R, \mu \rangle$ 不是一个映射. 这是因为 0μ 不存在.

例 1.2.6 设 S 是有理数集, T 是整数集. 对 $x \in S$, 若把 x 写成分数 $x = \frac{q}{p}$, 令 $x\mu = q$, 则 $\langle S, T, \mu \rangle$ 不是一个映射. 这是因为 $x\mu$ 不惟一. 例如,

$$x = 1.5 = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \cdots, \text{从而 } x\mu = 3, x\mu = 6, \cdots.$$

例 1.2.7 令 $S = R$ 是实数集, $T = N$ 是自然数集. 对 $x \in S$, 令 $x\mu = |x|$ 是 x 的绝对值, 则 $\langle R, N, \mu \rangle$ 不是一个映射. 这是因为对 $x = 3.5 \in R$, $x\mu = 3.5 \notin N$.

两个映射 $\langle S_1, T_1, \mu \rangle, \langle S_2, T_2, \eta \rangle$ 叫做相等的, 是指 $S_1 = S_2, T_1 = T_2$, 且对任何 $x \in S_1, x\mu = x\eta$.

例 1.2.8 设 $S_1 = S_2 = \{1, 2\}, T_1 = \{2, 3, 4\}, T_2 = \{2, 4\}$. 考虑映射 $\langle S_1, T_1, \mu \rangle$, 其中 $1\mu = 2, 2\mu = 4$; 映射 $\langle S_2, T_2, \eta \rangle$, 其中 $1\eta = 2, 2\eta = 4$. 虽然 $S_1 = S_2$, 且对应法则也一样, 但 $T_1 \neq T_2$, 从而这是两个不同的映射.

3° 映射的图形

定义 1.2.2 设有映射 $\mu: S \rightarrow T$, 称

$$G(\mu) = \{(s, t) \mid t = s\mu, s \in S\} \subseteq S \times T$$

为该映射的图形(如图 1.2.2).

从定义立即得到 $G(\mu) \subseteq S \times T$ 具有下述性质:

(1) 对任何 $s \in S$, 存在 $t \in T$, 使 $(s, t) \in G(\mu)$.

(2) $(s, t_1), (s, t_2) \in G(\mu) \Rightarrow t_1 = t_2$.

这两条性质完全刻画了 $S \times T$ 的一个子集能作为某一映射的图形的条件. 事实上, 若 $G \subseteq S \times T$ 具有这两条性质, 则可以定义映射 $\mu: S \rightarrow T$. 对 $s \in S$, 按性质(1), 存在 $t \in T$ 使 $(s, t) \in G$.

由性质(2)知这种 t 是惟一存在的. 令 $s\mu = t$, 容易看到, $G = G(\mu)$.

这样, 我们也可以把映射定义为有序三组 $\langle S, T, G \rangle$, 其中 $G \subseteq S \times T$ 具

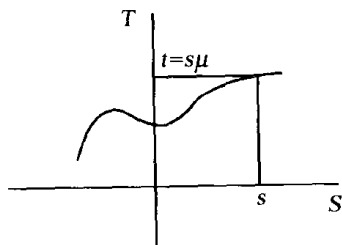


图 1.2.2

有上述性质(1),(2).

容易看到,两个映射 $\langle S_1, T_1, \alpha \rangle, \langle S_2, T_2, \beta \rangle$ 相等的充要条件是 $S_1 = S_2, T_1 = T_2, G(\alpha) = G(\beta)$.

4° 几种特殊的映射

定义 1.2.3 映射 $\mu: S \rightarrow T$ 叫做**单射**或**1-1**的,是指 $s_1 \neq s_2 \Rightarrow s_1\mu \neq s_2\mu$.

由此, $\mu: S \rightarrow T$ 是单射的充要条件是:若 $t \in T$ 有逆像,则逆像是惟一的.

定义 1.2.4 映射 $\mu: S \rightarrow T$ 叫做**满射**或**到上的**,是指对任何 $t \in T$,都存在 $s \in S$,使 $t = s\mu$,即 T 中的每个元素都有逆像.

定义 1.2.5 映射 $\mu: S \rightarrow T$ 叫做**双射**或**1-1 到上的**,是指 μ 既是单射又是满射.

按定义,例 1.2.1 是单射但不是满射.例 1.2.2 中的映射是满射但不是单射.例 1.2.3 中的映射既不是单射也不是满射.例 1.2.4 中的映射是双射.

一般称集 S 到其自身的映射为**变换**.称 S 到其自身的双射为 S 上的**置换**.特别地,当 S 是由 n 个元素组成的有限集时, S 上的置换叫做 n 阶**置换**.

例 1.2.9 考虑映射 $\mu: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$,对 $x \in \mathbf{Z}, x\mu = x + 3$.它是一个置换.

例 1.2.10 令 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,考虑映射 $\mu: S \rightarrow S$,其中 $1\mu = 2, 2\mu = 3, 3\mu = 4, 4\mu = 1, 5\mu = 5$.它是一个 5 阶置换.

一般地, $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个置换 μ 常用一个“表”来表示:

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1\mu & 2\mu & \cdots & n\mu \end{pmatrix}.$$

而以 S_n 表示 S 上的所有 n 阶置换的集.这样,例 1.2.10 中的 5 阶置换 μ 可以表示为

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

5° 映射的积

定义 1.2.6 设有映射 $\alpha: S \rightarrow T, \beta: T \rightarrow U$,称映射 $\gamma: S \rightarrow U$,对 $s \in S, s\gamma = (s\alpha)\beta$,为 $\alpha: S \rightarrow T, \beta: T \rightarrow U$ 的**积**,简记为 $\gamma = \alpha\beta$ (如图 1.2.3).

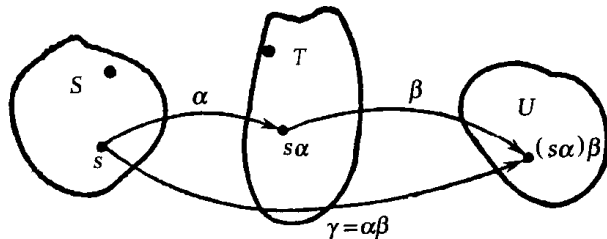


图 1.2.3

由定义, 对 $s \in S$, 我们有 $s(\alpha\beta) = (s\alpha)\beta$.

应该注意, 在映射的积的定义中, 要求 α 的余区域就是 β 的区域.

例 1.2.11 设 $S = T = U = R$ 是实数集, $x\alpha = \sin x$, $y\beta = y^2 + 1$, 则 $x(\alpha\beta) = \sin^2 x + 1$; $x(\beta\alpha) = \sin(x^2 + 1)$.

由此看到, 映射的积正是通常数学分析中复合函数概念的推广.

例 1.2.12 设 $S = (1, 2, 3)$, $T = \{n, p, q, r\}$, $U = \{x, y, z\}$. 考虑映射

$$\begin{array}{ll} \alpha: S \rightarrow T & \beta: T \rightarrow U \\ 1\alpha = p, & n\beta = x, \\ 2\alpha = n, & p\beta = y, \\ 3\alpha = q, & q\beta = z, \\ & r\beta = z. \end{array}$$

则得积 $\alpha\beta: S \rightarrow U$

$$\begin{aligned} 1(\alpha\beta) &= (1\alpha)\beta = p\beta = y, \\ 2(\alpha\beta) &= (2\alpha)\beta = n\beta = x, \\ 3(\alpha\beta) &= (3\alpha)\beta = q\beta = z. \end{aligned}$$

例 1.2.13 设

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

则

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

这些例子表明, 对于映射的积 $\alpha\beta$, 一般来说, $\beta\alpha$ 并不一定有意义, 因为 S, U 可以不相同. 即使 $S = T = U$, $\alpha\beta$ 与 $\beta\alpha$ 也不一定相等. 从而关于映射的积, 因子的顺序是重要的, 即交换律不成立. 但有下列定理.

定理 1.2.1 设有映射 $\alpha: S \rightarrow T$, $\beta: T \rightarrow U$, $\gamma: U \rightarrow V$, 则 $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, 即映射的积满足结合律.

证明 因为 $(\alpha\beta)\gamma$ 及 $\alpha(\beta\gamma)$ 的区域都是 S , 余区域都是 V , 所以只需证明对任何 $s \in S$ 有 $s[(\alpha\beta)\gamma] = s[\alpha(\beta\gamma)]$ 就可以了. 事实上

$$\begin{aligned} s[(\alpha\beta)\gamma] &= [s(\alpha\beta)]\gamma = [(s\alpha)\beta]\gamma, \\ s[\alpha(\beta\gamma)] &= (s\alpha)(\beta\gamma) = [(s\alpha)\beta]\gamma. \end{aligned}$$

从而 $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

根据这个定理, 我们可以讨论三个映射的积 $\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ 以及三个以上映射的积, 而它们与括号的添加方式无关.

定义 1.2.7 一个由映射组成的图形叫做**交换图**, 是指沿着任何一条从同一个始点到同一个终点的路径, 把这些映射乘起来, 得到的结果相同.

例 1.2.14 设有映射 $\alpha: S \rightarrow T, \beta: T \rightarrow U, \gamma: S \rightarrow U$. 考虑图 1.2.4, 则它是交换图的充要条件是 $\gamma = \alpha\beta$.

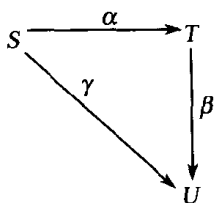


图 1.2.4

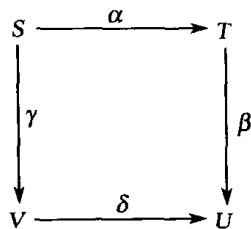


图 1.2.5

例 1.2.15 设有映射 $\alpha: S \rightarrow T, \beta: T \rightarrow U, \gamma: S \rightarrow V, \delta: V \rightarrow U$ 且 $\alpha\beta = \gamma\delta$, 则图 1.2.5 是交换图.

例 1.2.16 图 1.2.6 是交换图, 是指 $\alpha\beta = \eta = \gamma\delta$.

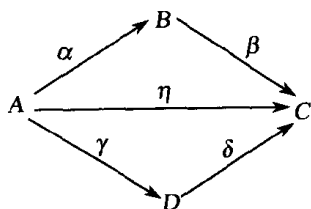


图 1.2.6

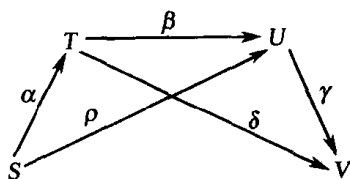


图 1.2.7

这样, 映射积的结合律可以用交换图 1.2.7 叙述.

对于图 1.2.7, $\triangle STU$ 是交换图及 $\triangle TUV$ 是交换图 $\Rightarrow$ 整个图形是交换图.

定理 1.2.2 对映射 $\alpha: S \rightarrow T$ 有

$$I_S \alpha = \alpha, \quad \alpha I_T = \alpha.$$

证明 对任何 $s \in S, s(I_S \alpha) = (sI_S)\alpha = s\alpha$, 故 $I_S \alpha = \alpha$. 又 $s(\alpha I_T) = (s\alpha)I_T = s\alpha$, 故 $\alpha I_T = \alpha$.

定理 1.2.3 $\alpha: S \rightarrow T$ 是双射 $\Leftrightarrow$ 存在 $\beta: T \rightarrow S$, 使 $\alpha\beta = I_S, \beta\alpha = I_T$.

证明 $\Rightarrow$ 因为 α 是双射, 故对每一 $t \in T$, 有惟一的 $s \in S$, 使 $s\alpha = t$. 令 $t\beta = s$. 于是得到映射 $\beta: T \rightarrow S$. 我们来证明 $\alpha\beta = I_S, \beta\alpha = I_T$. 事实上, 对任何 $s \in S$, 有 $s(\alpha\beta) = (s\alpha)\beta$. 设 $s\alpha = t$. 由 β 的定义, $t\beta = s$, 从而 $s(\alpha\beta) = (s\alpha)\beta = t\beta = s = sI_S$, 故 $\alpha\beta = I_S$; 又对任何 $t \in T$, 有 $t(\beta\alpha) = (t\beta)\alpha$. 设 $t\beta = s$, 即 $s\alpha = t$, 从而 $t(\beta\alpha) = (t\beta)\alpha = s\alpha = t = tI_T$, 故 $\beta\alpha = I_T$.

$\Leftarrow$ 首先, α 是满射. 事实上, 对任何 $t \in T$, 有 $t = tI_T = t(\beta\alpha) = (t\beta)\alpha$, 从而 t 有逆像 $t\beta$. 其次, α 是单射. 事实上, 若 $s_1\alpha = s_2\alpha, s_1, s_2 \in S$, 则 $(s_1\alpha)\beta = (s_2\alpha)\beta$

$= (s_2\alpha)\beta$, 故 $s_1(\alpha\beta) = s_2(\alpha\beta)$, 且 $s_1I_S = s_2I_S$, 从而 $s_1 = s_2$.

定理 1.2.3 中的 β 如果存在, 则必是惟一的. 这是因为, 若有 β_1 使 $\alpha\beta_1 = I_S, \beta_1\alpha = I_T$, 则

$$\beta_1 = \beta_1 I_S = \beta_1(\alpha\beta) = (\beta_1\alpha)\beta = I_T\beta = \beta.$$

我们称这惟一的 β 为 α 的逆映射, 并记为 $\beta = \alpha^{-1}$.

6° 二元合成

利用积集可以讨论定义于集 S 取值于 T 的二元映射(它是数学分析中二元函数概念的推广)为

$$\alpha: S \times S \rightarrow T.$$

特别地, 当 $T = S$ 时, 称 $\alpha: S \times S \rightarrow S$ 为 S 上的二元合成或 S 上的代数运算. 我们通常讨论的数的加法, 乘法都是二元合成的例子. 二元合成正是本书中要讨论的各种代数结构的主要组成部分.

7° 任意集族的积集

我们可以推广有限个集的笛卡儿积 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$ 到任意集族的情形. 我们把 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r$ 中的元素 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_r)$, $a_i \in S_i$, 看作是集 $I = \{1, 2, \cdots, r\}$ 到集 $S = \bigcup \{S_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ 的一个映射, 对每一 $i \in I$, $ia = a_i \in S_i$, 习惯上常以 $a(i)$ 记 ia . 于是我们有 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r = \{a: I \rightarrow S \mid I = \{1, 2, \cdots, r\}, S = \bigcup \{S_i \mid 1 \leq i \leq r\}, \text{对每一 } i \in I, a(i) \in S_i\}$.

这样, 我们可以把有限个集的笛卡儿积推广到任意集族上.

定义 1.2.8 设有集族 $\{S_i \mid i \in I\}$, 这里 I 是任一标号集, 称 $\prod_{i \in I} S_i = \{a: I \rightarrow S \mid S = \bigcup \{S_i \mid i \in I\}, \text{对 } i \in I, \text{有 } ia = a(i) \in S_i\}$ 为集族 $\{S_i \mid i \in I\}$ 的积集.

应当指出, 上述定义中, 并不要求 $i \neq j \Rightarrow S_i \neq S_j$. 特别地, 若对每一 $i \in I$, 均有 $S_i = T$, 则积集 $\prod_{i \in I} T = \{a: I \rightarrow T\}$ 是 I 到 T 的所有映射的集.

练习 1.2

一、设 $A = \{1, 2, 5\}, B = \{3, 7\}$, 确定 $A \times B, B \times A$.

二、设 $S = \{1, 2\}, T = \{2, 3, 4\}$, 映射 $\mu: S \rightarrow T$, 其中 $x\mu = 2x, x \in S$, 确定 μ 的图形 $G(\mu)$.

三、设 $S = \{2, 3, 4\}, T = \{4, 6, 10\}$,

$$H_1 = \{(2, 4), (3, 6)\},$$

$$H_2 = \{(2, 2), (3, 4), (4, 6)\},$$

$$H_3 = \{(2, 4), (6, 10), (3, 6), (4, 4)\},$$

这些 $H_i (i = 1, 2, 3)$ 哪一个可以作为某一映射 $\mu: S \rightarrow T$ 的图形 $G(\mu)$.

四、给定映射 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$. 对 $x \in \mathbf{N}, xf = \sqrt{x}$, 试写出

$$2f = \underline{\hspace{2cm}}, \quad 16f = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \underline{\hspace{2cm}} f = 14.$$

五、给出下述映射的例子：

1. 是满射而非单射；
2. 是单射而非满射；
3. 既非单射亦非满射。

六、下述映射哪些是单射？满射？双射？

1. $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 对 $x \in \mathbf{R}, xf = e^x$;
 2. $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, 对 $x \in \mathbf{N}, xf = \begin{cases} x-1, & x \geq 2, \\ 1, & x = 1; \end{cases}$
 3. $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}$, 对 $(z, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}, (z, n)f = \frac{z}{n}$;
 4. $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, 对 $x \in \mathbf{Z}, xf = x^2 + 1$;
 5. 对 $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, 对 $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, (x, y)f = (y, x)$;
 6. 对 $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, 对 $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, (x, y)f = (x^2, y)$.
- 七、设 $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$, 对 $x \in \mathbf{Z}, xf = x - 1$,

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \text{对 } x \in \mathbf{R}, xg = \frac{x}{3}.$$

问 $x(fg) = ?$

八、设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\alpha\beta, \beta\alpha, \alpha^2 (= \alpha\alpha), \alpha^2\beta (= \alpha\alpha\beta), \alpha^{-1}, \beta^{-1}$.

九、设 S 是一个有限集, 则 $f: S \rightarrow S$ 是满射 $\Leftrightarrow f: S \rightarrow S$ 是单射. 但当 S 是无限集时, 这一结论是不对的, 试举一例说明.

十、设 $S = \{1, 2, 3, 4\}, T = \{a, b, c\}$, 有多少个以 S 为区域以 T 为余区域的映射？有多少个满射？

十一、若 S 有 m 个元素, T 有 n 个元素, $m \geq n$, 有几个从 S 到 T 的映射？几个满射？当 $m = n$ 时, 有几个单射？

十二、下面哪些是给定集上的二元合成？

1. 在有理数集 $\mathbf{Q}$ 上, $(x, y)\alpha = \frac{xy}{2}$;
2. 在实数集 $\mathbf{R}$ 上, $(x, y)\alpha = x + \pi$;
3. 在有理数集 $\mathbf{Q}$ 上, $(x, y)\alpha = \frac{1}{x+y}$;
4. 在有理数集 $\mathbf{Q}$ 上, $(x, y)\alpha = (x-y)^{\frac{1}{2}}$;
5. S 是班上所有学生的集, $(x, y)\alpha$ 是 x, y 中年龄较大者;
6. S 是班上所有学生的年龄的集, $(x, y)\alpha$ 是 x, y 中较大者.

十三、设有映射 $\mu: S \rightarrow T$, 对 T 的任一子集 B , 令 $\mu^{-1}(B) = \{\alpha \mid \alpha \in S, \alpha\mu \in B\}$, 常称 $\mu^{-1}(B)$ 为 B 关于 μ 的原像 (当 $B = \{x\}$ 是由一个元素所成的集时, 常以 $\mu^{-1}(x)$ 代替 $\mu^{-1}(\{x\})$). 对 $A \subseteq S$, 令 $A\mu = \{\alpha\mu \mid \alpha \in A\}$, 常称 $A\mu$ 为 A 关于 μ 的像集, 试证:

1. 对任何 $B \subseteq T, (\mu^{-1}(B))\mu \subseteq B$;
2. 当 μ 是满射时, $(\mu^{-1}(B))\mu = B$.