[日] 吉田耕作 著

泛 函 分 析

吴元恺 孙顺华
唐志远 黄发伦 译

人 民 教 育 出 版 社

出版前言

本书根据 Springer-Verlag 出版 Kôsaku Yosida《Functional Analysis》1978 年第 5 版译出。它以不大的篇幅，相当详尽地介绍了泛函分析的基本内容与方法，并结合理论的阐述，介绍了泛函分析对各种分析问题的应用。本书包括：预备知识，Banach 空间及 Hilbert 空间的一般理论，线性算子的一般理论，赋范环与谱表示，向量格及其表示等。作为应用本书还介绍了：广义函数，Fourier 变换及偏微分方程，半群的分析理论，遍历理论与扩散理论，线性与非线性发展方程的积分等。

本书可作为高等学校数学专业泛函专门组学生及泛函、偏微分方程、概率论等专业研究生的参考书，对于纯粹与应用数学工作者以及理论物理工作者也有一定参考价值。

泛函分析

［日］吉田耕作 著

吴元恺 孙顺华 唐志远 黄发伦 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

西安铁路局印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 27 字数 600,000

1980 年 9 月第 1 版 1981 年 7 月第 1 次印刷

印数 00,001—17,500

书号 13012·0522 定价 1.95 元

目　录

第0章 预备知识

本章的目的是阐述全书常用的某些概念和定理. 这些内容涉及集合论、拓扑空间、测度空间和线性空间.

§1. 集合论

集合 $x\in X$ 表示 x 是集合 X 的一个元或元素; $x\bar{\in}X$ 表示 x 不是集合 X 的元. 我们用 $\{x;P\}$ 表示由所有具有性质 P 的 x 组成的集合. 例如 $\{y;y=x\}$ 是由单独一个元素 x 组成的集合 $\{x\}$. 空集是没有元素的集合, 记为 $\varnothing$. 如果集合 X 的每一个元素都是集合 Y 的元素, 则称 X 是 Y 的一个子集, 记为 $X\subseteqq Y$ 或 $Y\supseteqq X$. 设 $\mathscr{X}$ 是以某些集合 X 作为元素的集合, 则由所有属于 $\mathscr{X}$ 中的某个 X 的元素 x 组成的集合称为 $\mathscr{X}$ 中的诸集合 X 的并集; 此并集用 $\bigcup\limits_{X\in\mathscr{X}}X$ 来表示. $\mathscr{X}$ 中的诸集合 X 的交集是由所有属于 $\mathscr{X}$ 中的每一个 X 的元素 x 组成的集合; 此交集用 $\bigcap\limits_{X\in\mathscr{X}}X$ 来表示. 如果两个集合的交集是空集, 则称它们是不相交的. 如果某集合族中的每两个不同的集合都是不相交的, 则称此集合族是不相交的. 如果集合序列 $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 是一个不相交的集合族, 则其并集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ 可以写成和的形式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n$.

映射 术语映射、函数和变换将作为同义词来使用. 符号 $f:X\to Y$ 表示 f 是一个单值函数, 它的定义域是 X 而它的值域是含于 Y 内的; 对于每一个 $x\in X$, 函数 f 都确定一个唯一的元素 $f(x)=y\in Y$. 对于两个映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$, 我们可以用 $(gf)(x)=g(f(x))$ 来定义它们的复合映射 $gf:X\to Z$. 符号 $f(M)$ 表示集合 $\{f(x);x\in M\}$, 叫做 M 在映射 f 下的象. 符号 $f^{-1}(N)$ 表示集合 $\{x;f(x)\in N\}$, 叫做 N 在映射 f 下的逆象. 显然

对所有的 $Y_1\subseteqq f(X)$ 都有 $Y_1=f(f^{-1}(Y_1))$, 且

对所有的 $X_1\subseteqq X$ 都有 $X_1\subseteqq f^{-1}(f(X_1))$.

如果 $f:X\to Y$, 并且对于每一个 $y\in f(X)$ 都只有一个 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$, 那么就说 f 有逆(映射), 或者说 f 是一一的. 这时, 该逆映射的定义域为 $f(X)$ 而值域为 X; 它被方程 $x=f^{-1}(y)=f^{-1}(\{y\})$ 所确定.

映射 f 的定义域和值域分别记为 $D(f)$ 和 $R(f)$. 因此, 如果 f 有逆映射, 则

对所有的 $x\in D(f)$ 都有 $f^{-1}(f(x))=x$, 且

对所有的 $y\in R(f)$ 都有 $f(f^{-1}(y))=y$.

如果$f(X)=Y$，那么就说函数f把X映到Y上，而如果$f(X)\subseteqq Y$，就说f把X映入Y内．对于函数f和g，如果$D(f)$包含$D(g)$且对$D(g)$中所有的x都有$f(x)=g(x)$，则称f是g的一个扩张（译者注：也译作延拓），而称g是f的一个限制．

Zorn 引 理

定义 设P是元素$a, b, \cdots$所成的一个集合．假定在P的某些元素对(a, b)之间定义了某种二元关系，记为$a \prec b$，具有性质

$$\begin{cases} a \prec a, \\ \text{如果 } a \prec b \text{ 且 } b \prec a, \text{ 则 } a=b, \\ \text{如果 } a \prec b \text{ 且 } b \prec c, \text{ 则 } a \prec c \text{（可传递性）}. \end{cases}$$

则称P按关系$\prec$是半序的（或部分有序的）．

例 如果P是由集合X的一切子集所组成的集合，则集合包含关系$(A\subseteqq B)$就给出了P的一种半序关系．由所有复数$z=x+iy, w=u+iv, \cdots$组成的集合，按$x\leqq u$和$y\leqq v$定义的关系$z\prec w$，是半序的．

定义 设P是一个半序集，其元素为$a, b, \cdots$．如果$a\prec c$和$b\prec c$，则我们把c叫做a和b的一个上界．此外，如果对于a和b的任何一个上界d都有$c\prec d$，则我们把c叫做a和b的最小上界或上确界，并记$c=\sup(a, b)$或$a\vee b$．如果P内存在这种元素c，则它必是唯一的．我们用类似的方法定义a和b的最大下界或下确界，并把它记为$\inf(a, b)$或$a\wedge b$．如果对于半序集P内的每个元素对(a, b)都存在$a\vee b$和$a\wedge b$，则称P为一个格．

例 集合B的子集M的全体，对于由集合包含关系$M_1\subseteqq M_2$定义的半序关系$M_1\prec M_2$，是一个格．

定义 如果对于半序集P内的每个元素对(a, b)，不是$a\prec b$成立就是$b\prec a$成立，则称P是全序的（或线性有序的）．半序集P的子集本身，对于P的半序关系而言，也是半序的；而在该序关系下，子集还有可能成为全序集．设P是半序集而S是P的一个子集，如果有某个$m\in P$使得对于每一个$s\in S$都有$s\prec m$，则称m是S的一个上界．P中的某元素m称为极大元素，如果$p\in P$同$m\prec p$一起就意味着$m=p$．

Zorn 引理 设P是一个非空的半序集，并且P的每一个全序子集都有含于P的上界．则P至少含有一个极大元素．

我们知道，Zorn 引理等价于集合论中的 Zermelo 选择公理．

§2. 拓 扑 空 间

开集和闭集

定义 设τ是集合X的一个子集系．如果τ含有空集、集合X本身、τ的每个子系的并集以及τ的每个有限子系的交集，那么就说τ在X中定义了一种拓扑．τ内的集合叫做拓扑空间

(X, τ)的开集；通常我们略去 τ，就把 X 叫做拓扑空间．除非作相反的申明，我们总是假定拓扑空间 X 要满足 Hausdorff 的分离公理：

对于 X 中的每两个不同的点 x_1, x_2，总存在着不相交的开集 G_1，G_2 使得 $x_1 \in G_1$，$x_2 \in G_2$．X 中的点 x 的邻域是一个集合，它包含某个含有 x 的开集．X 的子集 M 的邻域也是一个集合，它是 M 的每一点的邻域．X 中的某个点 x 叫做 X 的子集 M 的聚点或极限点，如果 x 的每一个邻域都至少含有一个不同于 x 的点 $m \in M$．

定义 设 M 是拓扑空间 X 的任一子集，而 G 是 X 的开集．如果把 M 的形如 $M \cap G$ 的子集都叫做 M 的"开集"，则 M 就成为一个拓扑空间．M 的这种诱导拓扑称为拓扑空间 X 的子集 M 的相对拓扑．

定义 如果拓扑空间 X 的某集合 M 含有 M 的一切聚点，则 M 称为闭集．容易看出，M 是闭集，当且仅当 M 的补集 $M^C = X - M$ 是开集．这里，$A - B$ 表示属于 A 但不属于 B 的点的全体．如果 $M \subseteq X$，则 X 内所有包含 M 的闭子集的交集称为 M 的闭包，记为 M^a（此上标"a"出自德文abgeschlossene Hülle——闭包的第一个字母）．

显然，M^a 是闭集并且 $M \subseteq M^a$；容易看出，当且仅当 M 是闭集时，$M = M^a$．

度量空间

定义 如果 X 和 Y 都是集合，我们用 $X \times Y$ 表示由一切有序对(x, y)组成的集合，其中，$x \in X$，$y \in Y$；$X \times Y$ 称为 X 与 Y 的笛卡尔乘积．对于集合 X，如果能定义一个函数 d，其定义域为 $X \times X$ 而值域含于实数域 R^1 内，且满足

$$\begin{cases} d(x_1, x_2) \geqq 0, \text{并且当且仅当 } x_1 = x_2 \text{ 时}, d(x_1, x_2) = 0, \\ d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1), \\ d(x_1, x_3) \leqq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \ (\text{三角不等式}), \end{cases}$$

则称 X 为度量空间．d 称为 X 的度量函数或距离函数．对于每一个正数 r，我们给度量空间 X 内的每一点 x_0 配上一个集合 $S(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\}$，而把它叫做以 x_0 为心、r 为半径的开球．度量空间 X 的集合 M 叫做"开集"，当且仅当对于每个点 $x_0 \in M$，M 都含有一个以 x_0 为心的开球．于是，这种"开集"的全体满足拓扑空间的定义中的开集公理．

因此，度量空间 X 是一个拓扑空间．容易看出，X 的某个点 x_0 是 M 的一个聚点，当且仅当对于每一个 $\varepsilon > 0$，M 都至少含有一个点 $m \neq x_0$ 使得 $d(m, x_0) < \varepsilon$．n 维欧几里得空间 R^n 关于

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

是一个度量空间，其中，$x = (x_1, \cdots, x_n)$ 而 $y = (y_1, \cdots, y_n)$．

连续映射

定义 设 $f: X \to Y$ 是一个定义在拓扑空间 X 上并把 X 映入拓扑空间 Y 内的映射．对于点 $x_0 \in X$，如果 $f(x_0)$ 的每个邻域 U 都相应地有 x_0 的某个邻域 V 使得 $f(V) \subseteq U$，则称 f 在点 x_0 连续．

如果映射 f 在它的定义域 $D(f)=X$ 的每一点都是连续的,则称 f 是连续的.

定理 设 X 和 Y 都是拓扑空间,而 f 是定义在 X 上且把 X 映入 Y 内的一个映射. 这时,f 是连续的,当且仅当 Y 的每一个开集在映射 f 下的逆象都是 X 的开集.

证明 如果 f 是连续的而 U 是 Y 的一个开集,于是 $V=f^{-1}(U)$ 是每个使得 $f(x_0)\in U$ 的点 $x_0\in X$ 的邻域,亦即 V 是 V 的每一点 x_0 的邻域. 因此,V 是 X 的一个开集. 反之,假定对于 Y 的每一个开集 $U\ni f(x_0)$,集合 $V=f^{-1}(U)$ 都是 X 的开集,则由定义可知,f 在点 $x_0\in X$ 是连续的.

紧　性

定义 设 $\{G_\alpha\}$ 是一个集合系,其中,$\alpha\in A$. 如果集合 X 作为并集 $\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$ 的一个子集而含于其中,则称该集合系是集合 X 的一个覆盖.

设 M 是拓扑空间 X 的一个子集. 如果 X 的每一个覆盖 M 的开集系都含有一个仍然覆盖 M 的有限子系,则 M 叫做紧集.

由前面的定理可知,紧集的连续映象仍然是紧集.

命题 1 拓扑空间的紧子集必是闭集.

证明 假定拓扑空间 X 的紧集 M 有一个聚点 x_0 使得 $x_0\bar{\in}M$. 根据 Hausdorff 的分离公理,对任何点 $m\in M$,总存在 X 的不相交的开集 G_{m,x_0} 和 $G_{x_0,m}$ 使得 $m\in G_{m,x_0}$,$x_0\in G_{x_0,m}$. 于是集合系 $\{G_{m,x_0};\ m\in M\}$ 必覆盖 M. 由于 M 是紧集,所以该集合系含有某个覆盖 M 的有限子集 $\{G_{m_i,x_0};\ i=1,2,\cdots,n\}$. 因此,$\bigcap_{i=1}^{n}G_{x_0,m_i}$ 不与 M 相交. 但是,由于 x_0 是 M 的一个聚点,所以开集 $\bigcap_{i=1}^{n}G_{x_0,m_i}\ni x_0$ 必含有某个不同于 x_0 的点 $m\in M$. 这是一个矛盾,从而 M 必是闭集.

命题 2 拓扑空间 X 的紧集 M 的闭子集 M_1 也是紧集.

证明 设 $\{G_\alpha\}$ 是 X 的任一覆盖 M_1 的开集系. 因为 M_1 是闭集,所以 $M_1^c=X-M_1$ 是 X 的一个开集. 由于 $M_1\subseteq M$,所以开集系 $\{G_\alpha\}$ 添上 M_1^c 后就覆盖了 M,又因为 M 是紧集,所以总可以从 $\{G_\alpha\}$ 中选出某个有限子系 $\{G_{\alpha_i};\ i=1,2,\cdots,n\}$ 使得此子系添上 M_1^c 后能覆盖 M. 因此 $\{G_{\alpha_i};\ i=1,2,\cdots,n\}$ 就覆盖了 M_1.

定义 如果拓扑空间的某子集的闭包是紧集,则该子集叫做相对紧集. 如果某拓扑空间的每一点都有一个紧的邻域,则该空间叫做局部紧空间.

定理 任何一个局部紧空间 X 都可以嵌入到这样一个只比 X 多一个点的紧空间 Y 内,使得作为 Y 的一个子集的 X 的相对拓扑刚好就是 X 原来的拓扑. 空间 Y 称为 X 的一点紧化空间.

证明 设 y 是任何一个不属于 X 的元素. 又设 $\{U\}$ 是 X 中所有使得 $U^c=X-U$ 为紧集的开集族. 我们规定,X 本身 $\in\{U\}$. 设 Y 是由点 y 及 X 的全体点组成的集合. 对于 Y 中的某个集合,如果或者 (i) 它不含 y 而作为 X 的一个子集是开集,或者 (ii) 它含有 y 且它与 X 的交集是 $\{U\}$ 的一个元,则称该集合是 Y 的一个开集. 因此,容易看出,所得到的 Y 是一个拓扑空间且 X 的相对拓扑同它原来的拓扑是一致的.

假定 $\{V\}$ 是一个覆盖 Y 的开集系. 于是 $\{V\}$ 必含有某个形如 $U_0\cup\{y\}$ 的元,这里,$U_0\in\{U\}$. 根

据$\{U\}$的定义,U_0^c作为X的子集是紧集. 由于U_0^c被集合系$\{V\cap X\}$所覆盖，其中,$V\in\{V\}$. 所以,此集合系必含有某个覆盖U_0^c的有限子集：$V_1\cap X, V_2\cap X, \cdots, V_n\cap X$. 从而$V_1, V_2, \cdots, V_n$以及$U_0\cup\{y\}$就覆盖了$Y$,这就证明了$Y$是紧的.

Tychonov 定理

定义 假设相应于指标集合A的每一个α都给定了一个拓扑空间X_α. 我们把笛卡尔乘积$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$定义为所有这种函数$f$组成的集合:$f$的定义域为$A$且对于每一个$\alpha\in A$都有$f(\alpha)\in X_\alpha$. 我们记$f=\prod_{\alpha\in A} f(\alpha)$,并把$f(\alpha)$叫做$f$的第$\alpha$个坐标. 当$A$是整数集$(1, 2, \cdots, n)$时,$\prod_{k=1}^{n} X_k$通常记为$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$. 我们在乘积空间$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$中引入一种(弱)拓扑，即把形如$\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$的如下集合都叫做该空间的“开集”,其中,$X_\alpha$的开集$G_\alpha$,除去有限个$\alpha$之外都与$X_\alpha$重合.

Tychonov 定理 诸紧拓扑空间X_α的笛卡尔乘积$X=\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$也是紧的.

注 众所周知，实数轴R^1上的有界闭集对由距离$d(x, y)=|x-y|$所确定的拓扑是紧的(Bolzano-Weierstrass 定理). 顺便指出，如果度量空间的子集M能被该空间的某个球$S(x_0, r)$所包含,则称M是有界集. 特别地，Tychonov 定理意味着n维欧几里得空间R^n中的平行正多面体:

$$-\infty<a_i\leqq x_i\leqq b_i<\infty \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

是紧的. 由此我们看出,R^n是局部紧的.

Tychonov 定理的证明 如果某集合系的每一个有限子系都有非空的交集，则称该集合系具有有限交性质. 利用作出一个覆盖的诸开集的补集的办法,容易看出,一个拓扑空间X是紧的,当且仅当对于它的每一个具有有限交性质的闭子集系$\{M_\alpha;\alpha\in A\}$,交集$\bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha^a$都是非空的.

现在，设$\{S\}$是由$X=\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$的子集$S$组成的一个具有有限交性质的集合系. 又设$X$的某些子集$N$组成的集合系$\{N\}$具有以下性质:

(i) $\{S\}$是$\{N\}$的一个子系,

(ii) $\{N\}$具有有限交性质,

(iii) $\{N\}$在下述意义下是极大的，即它不可能是任何别的具有有限交性质且以$\{S\}$作为其子系的集合系的真子系.

这种极大系$\{N\}$的存在性可以用 Zorn 引理或超限归纳法予以证明.

对于$\{N\}$的任何一个集合N，我们定义集合$N_\alpha=\{f(\alpha);\ f\in N\}\subseteq X_\alpha$. 用$\{N_\alpha\}$表示集合系$\{N_\alpha; N\in\{N\}\}$. 同$\{N\}$一样，$\{N_\alpha\}$也具有有限交性质. 因此，根据$X_\alpha$的紧性，至少存在一个点

$p_\alpha \in X_\alpha$ 使得 $p_\alpha \in \bigcap\limits_{N\in\{N\}} N_\alpha^a$. 需要证明的是，点 $p=\prod\limits_{\alpha\in A} p_\alpha$ 属于集合 $\bigcap\limits_{N\in\{N\}} N^a$.

由于 p_{α_0} 属于交集 $\bigcap\limits_{N\in\{N\}} N_{\alpha_0}^a$，从而 X_{α_0} 的任何一个含有 p_{α_0} 的开集 G_{α_0} 都要同每一个 $N_{\alpha_0}\in\{N_{\alpha_0}\}$ 相交. 所以 X 的开集

$$G^{(\alpha_0)}=\{x; x=\prod_{\alpha\in A} x_\alpha \text{ 且其中的 } x_{\alpha_0}\in G_{\alpha_0}\}$$

必同 $\{N\}$ 的每一个 N 相交. 根据 $\{N\}$ 的极大性条件 (iii)，$G^{(\alpha_0)}$ 必属于 $\{N\}$. 因此，有限个这种集合 $G^{(\alpha_0)}(\alpha_0\in A)$ 的交集也必属于 $\{N\}$，从而它同每一个集合 $N\in\{N\}$ 相交. 因为 X 的任何一个含有 p 的开集，根据定义，是一个包含这种交集的集合，所以我们看出，$p=\prod\limits_{\alpha\in A} p_\alpha$ 必属于交集 $\bigcap\limits_{N\in\{N\}} N^a$.

Urysohn 定理

命题 紧空间 X 在这种意义下是正规的：对于 X 的任何不相交的闭集 F_1 和 F_2，总存在不相交的开集 G_1 和 G_2 使得 $F_1\subseteq G_1, F_2\subseteq G_2$.

证明 对于任何一对点 (x, y)，其中 $x\in F_1, y\in F_2$，总存在不相交的开集 $G(x, y)$ 和 $G(y, x)$ 使得 $x\in G(x, y), y\in G(y, x)$. 因为 F_2 是紧空间 X 的一个闭子集，所以它也是紧集，从而，对于固定的 x，我们可以用有限个开集 $G(y_1, x), G(y_2, x), \cdots, G(y_{n(x)}, x)$ 来覆盖 F_2. 令

$$G_x=\bigcup_{j=1}^{n(x)} G(y_j, x) \quad \text{和} \quad G(x)=\bigcap_{j=1}^{n(x)} G(x, y_j).$$

则开集 G_x 和 $G(x)$ 不相交并且有 $F_2\subseteq G_x, x\in G(x)$. 因为 F_1 是紧空间 X 的一个闭子集，所以它也是紧集，从而我们可以用有限个开集 $G(x_1), G(x_2), \cdots, G(x_k)$ 来复盖 F_1. 因此

$$G_1=\bigcup_{j=1}^{k} G(x_j) \text{ 和 } G_2=\bigcap_{j=1}^{k} G_{x_j}$$

满足命题的条件.

系 紧空间 X 在这种意义下是正则的：对于 X 的任何一个非空开集 G_1'，总存在非空开集 G_2' 使得 $(G_2')^a\subseteq G_1'$.

证明 令 $F_1=(G_1')^C$ 而 $F_2=\{x\}$，其中 $x\in G_1'$. 于是我们可以把上述命题中所得到的开集 G_2 就取为 G_2'.

Urysohn 定理 设 A, B 是正规空间 X 中的不相交的闭集. 则存在 X 上的实值连续函数 $f(t)$ 使得

$$\text{在 } X \text{ 上 } 0\leqq f(t)\leqq 1, \text{ 在 } A \text{ 上 } f(t)=0 \text{ 而在 } B \text{ 上 } f(t)=1.$$

证明 相应于每一个有理数 $r=k/2^n(k=0, 1, \cdots, 2^n)$ 我们都可以确定一个开集 $G(r)$ 使得

(i)$A\subseteqq G(0)$，$B=G(1)^C$，而(ii)当 $r<r'$ 时总有 $G(r)^a\subseteqq G(r')$．这可用对于 n 的归纳法予以证明．对于 $n=0$，由空间 X 的正规性可知，存在不相交的开集 G_0 和 G_1 使得 $A\subseteqq G_0$，$B\subseteqq G_1$．我们取 $G_0=G(0)$ 就行了．假定对于形如 $k/2^{n-1}$ 的数 r 已经构造出了满足条件(ii)的诸 $G(r)$．下面设 k 是一个 >0 的奇整数．这时，因为 $(k-1)/2^n$ 和 $(k+1)/2^n$ 都是形如 $k'/2^{n-1}$ 的数，其中，$0\leqq k'\leqq 2^{n-1}$，所以我们有 $G((k-1)/2^n)^a\subseteqq G((k+1)/2^n)$．因此，根据空间 X 的正规性，存在某开集 G，它满足 $G((k-1)/2^n)^a\subseteqq G$，$G^a\subseteqq G((k+1)/2^n)$．如果我们令 $G(k/2^n)=G$，则归纳法就实现了．

我们把 $f(t)$ 定义为

$$\text{在 } G(0) \text{ 上 } f(t)=0, \qquad \text{而当 } t\in G(0)^C \text{ 时 } f(t)=\sup_{t\in G(r)} r.$$

于是由(i)可知，在 A 上 $f(t)=0$ 而在 B 上 $f(t)=1$．我们尚须证明 f 的连续性．对于任何 $t_0\in X$ 和正整数 n，我们取这样的 r，它满足 $f(t_0)<r<f(t_0)+2^{-n-1}$．令 $G=G(r)\cap G(r-2^{-n})^{aC}$（我们约定，当 $s<0$ 时，令 $G(s)=\varnothing$ 而当 $s>1$ 时令 $G(s)=X$）．此开集 G 必含有 t_0．这是因为由 $f(t_0)<r$ 可知 $t_0\in G(r)$，而由 $(r-2^{-n-1})<f(t_0)$ 可知 $t_0\in G(r-2^{-n-1})^C\subseteqq G(r-2)^{aC}$．由于 $t\in G$ 意味着 $t\in G(r)$，从而 $f(t)\leqq r$；类似地，$t\in G$ 意味着 $t\in G(r-2^{-n})^{aC}\subseteqq G(r-2^{-n})^C$，从而 $r-2^{-n}\leqq f(t)$．所以，我们就证明了当 $t\in G$ 时，$|f(t)-f(t_0)|\leqq 1/2^n$．

Stone-Weierstrass 定理

Weierstrass 多项式逼近定理　设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的实（或复）值连续函数．则存在多项式 $P_n(x)$ 的序列使得当 $n\to\infty$ 时，它在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$．按照 S. Bernstein 的作法，我们可以取

$$P_n(x)=\sum_{p=0}^{n} {}_nC_p f(p/n)x^p(1-x)^{n-p}. \tag{1}$$

证明　将 $(x+y)^n=\sum_{p=0}^{n} {}_nC_p x^p y^{n-p}$ 对 x 微分，再乘以 x 后，我们就得到

$$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{p=0}^{n} p\,{}_nC_p x^p y^{n-p}.$$

类似地，将第一个式子对 x 微分两次，再乘以 x^2 后我们就得到

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{p=0}^{n} p(p-1)\,{}_nC_p x^p y^{n-p}.$$

因此，如果我们令

$$r_p(x)={}_nC_p x^p(1-x)^{n-p}, \tag{2}$$

则我们有

$$\sum_{p=0}^{n} r_p(x)=1,\quad \sum_{p=0}^{n} p r_p(x)=nx,\quad \sum_{p=0}^{n} p(p-1)r_p(x)=n(n-1)x^2. \tag{3}$$

因此

$$\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2r_p(x)=n^2x^2\sum_{p=0}^{n}r_p(x)-2nx\sum_{p=0}^{n}pr_p(x)+\sum_{p=0}^{n}p^2r_p(x)$$

$$=n^2x^2-2nx\cdot nx+(nx+n(n-1)x^2)=nx(1-x). \tag{4}$$

我们可以假定在$[0,1]$上$|f(x)|\leqq M<\infty$. 由$f(x)$的一致连续性可知,对任何一个$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$使得

$$\text{当 } |x-x'|<\delta \text{ 时}, |f(x)-f(x')|<\varepsilon. \tag{5}$$

由(3)我们有

$$\left|f(x)-\sum_{p=0}^{n}f(p/n)r_p(x)\right|=\left|\sum_{p=0}^{n}(f(x)-f(p/n))r_p(x)\right|\leqq\left|\sum_{|p-nx|\leq\delta n}\right|+\left|\sum_{|p-nx|>\delta n}\right|.$$

对右端第一项,由$r_p(x)\geqq0$以及(3)和(5)可得

$$\left|\sum_{|p-nx|\leq\delta n}\right|\leqq\varepsilon\sum_{p=0}^{n}r_p(x)=\varepsilon.$$

对右端第二项,由(4)和$|f(x)|\leqq M$可得

$$\left|\sum_{|p-nx|>\delta n}\right|\leqq 2M\sum_{|p-nx|>\delta n}r_p(x)\leqq\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2r_p(x)$$

$$=\frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2}\leqq\frac{M}{2\delta^2 n}\to 0\quad(\text{当 } n\to\infty \text{ 时}).$$

Stone-Weierstrass 定理 设X是一个紧空间而$C(X)$是X上的实值连续函数的全体. 设$C(X)$的某子集B满足三个条件: (i)如果f、$g\in B$, 则函数乘积$f\cdot g$以及关于实系数α、β的线性组合$\alpha f+\beta g$都属于B, (ii)常数函数1属于B以及(iii) B的任何函数序列$\{f_n\}$的一致极限f_∞也属于B. 这时,$B=C(X)$, 当且仅当B可分离X的点,亦即当且仅当对于每一对(s_1, s_2), 其中s_1、s_2是X不同的点,在B中总存在某函数x, 它满足$x(s_1)\neq x(s_2)$.

证明 必要性是显然的,因为紧空间是正规的,从而由 Urysohn 定理可知,存在实值连续函数x使得$x(s_1)\neq x(s_2)$.

为了证明充分性,我们引入格的记号:

$$(f\vee g)(s)=\max(f(s),g(s)),\ (f\wedge g)(s)=\min(f(s),g(s)),\ |f|(s)=|f(s)|.$$

由前面的定理可知,存在某个多项式序列$\{P_n\}$使得

$$\text{当}\quad -n\leqq t\leqq n \text{ 时},\ ||t|-P_n(t)|<1/n.$$

于是当$-n\leqq f(s)\leqq n$时, $||f(s)|-P_n(f(s))|<1/n$. 利用(iii), 于是就证明了当$f\in B$时有$|f|\in B$, 这是因为任何一个函数$f(s)\in B\subseteq C(X)$在紧空间X上都是有界的. 因此,根据

$$f\vee g=\frac{f+g}{2}+\frac{|f-g|}{2}\ \text{和}\ f\wedge g=\frac{f+g}{2}-\frac{|f-g|}{2},$$

我们可以看出, B在格运算$\vee$和$\wedge$之下是封闭的.

设 $h\in C(X)$ 而 $s_1, s_2\in X$ 是任意给定的，且 $s_1\neq s_2$. 于是我们能够找到某个 $f_{s_1s_2}\in B$ 使得 $f_{s_1s_2}(s_1)=h(s_1)$ 而 $f_{s_1s_2}(s_2)=h(s_2)$. 为了看出这一事实，设 $g\in B$ 且 $g(s_1)\neq g(s_2)$，再选取实数 α 和 β 使得 $f_{s_1s_2}=\alpha g+\beta$ 满足条件：$f_{s_1s_2}(s_1)=h(s_1)$ 和 $f_{s_1s_2}(s_2)=h(s_2)$.

给定 $\varepsilon>0$ 以及一个点 $t\in X$. 于是对每个 $s\in X$, 总存在 s 的某个邻域 $U(s)$ 使得，当 $u\in U(s)$ 时有 $f_{st}(u)>h(u)-\varepsilon$. 设 $U(s_1), U(s_2), \cdots, U(s_n)$ 覆盖紧空间 X. 又令

$$f_t=f_{s_1t}\vee\cdots\vee f_{s_nt}.$$

于是 $f_t\in B$ 且对所有的 $u\in X$ 均有 $f_t(u)>h(u)-\varepsilon$. 由于 $f_{s_jt}(t)=h(t)$, 所以我们有 $f_t(t)=h(t)$. 因此，存在 t 的一个邻域 $V(t)$ 使得当 $u\in V(t)$ 时有 $f_t(u)<h(u)+\varepsilon$. 设 $V(t_1), V(t_2), \cdots, V(t_k)$ 覆盖紧空间 X. 又令

$$f=f_{t_1}\wedge\cdots\wedge f_{t_k}.$$

于是 $f\in B$ 且对所有的 $u\in X$ 均有 $f(u)>h(u)-\varepsilon$, 这是因为对所有的 $u\in X$ 均有 $f_{t_j}(u)>h(u)-\varepsilon$. 此外，对任一点 $u\in X$, 譬如说 $u\in V(t_i)$, 均有 $f(u)\leqq f_{t_i}(u)<h(u)+\varepsilon$.

所以我们就证明了在 X 上，$|f(u)-h(u)|<\varepsilon$.

我们也就顺带地证明了以下两个系.

系 1 (Kakutani-Krein)　设 X 是一个紧空间而 $C(X)$ 是 X 上的实值连续函数的全体. 设 $C(X)$ 的某子集 B 满足条件：(i) 如果 $f, g\in B$, 则 $f\vee g, f\wedge g$ 以及关于实系数 α, β 的线性组合 $\alpha f+\beta g$ 均属于 B, (ii) 常数函数 1 属于 B 以及 (iii) B 的任何函数序列 $\{f_n\}$ 的一致极限 f_∞ 也属于 B. 这时，$B=C(X)$, 当且仅当 B 可分离 X 的点.

系 2　设 X 是一个紧空间而 $C(X)$ 是 X 上的复值连续函数的全体. 设 $C(X)$ 的某子集 B 满足条件：(i) 如果 $f, g\in B$, 则函数乘积 $f\cdot g$ 以及关于复系数 α, β 的线性组合 $\alpha f+\beta g$ 均属于 B, (ii) 常数函数 1 属于 B 以及 (iii) B 的任何函数序列 $\{f_n\}$ 的一致极限 f_∞ 也属于 B. 这时，$B=C(X)$, 当且仅当 B 满足条件：(iv) B 可分离 X 的点以及 (v) 如果 $f(s)\in B$, 则它的共轭复函数 $\bar{f}(s)$ 也属于 B.

Weierstrass 三角逼近定理　设 X 是 R^2 内的单位圆的圆周. 它在通常的拓扑下是一个紧空间，而定义在 X 上的复值连续函数可以表示为以 2π 为周期的连续函数 $f(x)$, $-\infty<x<\infty$. 在上面的系 2 中，如果我们把 B 取为一切可以用三角函数

$$e^{inx}\quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

关于复系数的线性组合表示的函数以及一切可以用这种线性组合的一致极限表示的函数所组成的集合，于是我们就得到了 Weierstrass 三角逼近定理：任何一个以 2π 为周期的复值连续函数 $f(x)$ 都可以用形如 $\sum_n c_n e^{inx}$ 的一个三角多项式序列一致地逼近.

完 备 性

度量空间 X 中的某元素序列 $\{x_n\}$ 收敛于极限点 $x\in X$, 当且仅当 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x)=0$. 从三角不等式 $d(x_n, x_m)\leqq d(x_n, x)+d(x, x_m)$, 我们看出，$X$ 中的收敛序列 $\{x_n\}$ 满足 Cauchy 收敛条件：

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0. \qquad (1)$$

定义 度量空间X中的任何满足上述条件(1)的序列$\{x_n\}$都叫做Cauchy序列. 如果度量空间X中的每一个Cauchy序列都收敛于一个极限点$\in X$, 则X叫做完备空间.

由三角不等式容易看出, $\{x_n\}$的极限点如果存在, 则必是唯一确定的.

定义 设M是拓扑空间X的一个子集. 如果闭包M^a不含有X的非空开集, 则称M在X内是稀疏的. 如果$M^a=X$, 则称M在X内是稠密的. 如果M可以表示为X中可数个稀疏集的并集, 则称M是第一纲的集合. 否则, 称M是第二纲的集合.

Baire的纲论

Baire-Hausdorff定理 一个非空的完备度量空间是第二纲的.

证明 设$\{M_n\}$是闭集所组成的一个序列, 它的并集是一个完备度量空间X. 假若没有M_n含有非空开集, 则我们就会导出矛盾. 这时, M_1^C是开集且$M_1^{Ca}=X$, 因此M_1^C含有某个闭球$S_1=\{x; d(x_1, x)\leq r_1\}$, 它的球心$x_1$可以取得任意靠近$X$的任何一点. 我们可以假定$0<r_1<1/2$. 由同样的讨论可知, 开集$M_2^C$含有这样的闭球$S_2=\{x; d(x_2, x)\leq r_2\}$, 它含于$S_1$内且$0<r_2<1/2^2$. 重复同样的推理, 我们就得到一系列闭球$S_n=\{x; d(x_n, x)\leq r_n\}$, 且序列$\{S_n\}$具有性质:

$$0<r_n<1/2^n, \quad S_{n+1}\subseteq S_n, \quad S_n\cap M_n=\varnothing \quad (n=1, 2, \cdots).$$

其球心序列$\{x_n\}$形成一个Cauchy序列, 这是因为对任何$n<m$都有$x_m\in S_n$, 从而$d(x_n, x_m)\leq r_n<1/2^n$. 设$x_\infty\in X$是序列$\{x_n\}$的极限点. X的完备性保证了此极限点x_∞的存在性. 由于当$m\to\infty$时, $d(x_n, x_\infty)\leq d(x_n, x_m)+d(x_m, x_\infty)\leq r_n+d(x_m, x_\infty)\longrightarrow r_n$, 于是我们看出, 对每个$n$均有$x_\infty\in S_n$. 因此, x_∞不在任何一个集合M_n之内, 从而x_∞不在并集$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n=X$之内, 这同$x_\infty\in X$矛盾.

Baire定理1 设M是紧拓扑空间X中的一个第一纲集. 则补集$M^C=X-M$在X中是稠密的.

证明 我们要证明对于任何一个非空开集G, M^C都要同G相交. 设$M=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, 其中每个$M_n$都是稀疏的闭集. 因为$M_1=M_1^a$是稀疏集, 所以开集$M_1^C$必与$G$相交. 因为$X$是一个紧空间, 从而是正则空间, 因此存在某个非空开集G_1使得$G_1^a\subseteq G\cap M_1^C$. 类似地, 我们可以选取某个非空开集$G_2$使得$G_2^a\subseteq G_1\cap M_2^C$. 重复这一过程, 我们就得到了一个非空开集序列$\{G_n\}$使得

$$G_{n+1}^a\subseteq G_n\cap M_{n+1}^C \quad (n=1, 2, \cdots).$$

由于闭集序列$\{G_n^a\}$对n是单调的, 所以它具有有限交性质. 因为X是紧的, 所以存在某个$x\in X$使得$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n^a$. 由于$x\in G_1^a$意味着$x\in G$, 再由于$x\in G_{n+1}^a\subseteq G_n\cap M_{n+1}^C$ $(n=0, 1, 2, \cdots; G_0=G)$, 因此我们可以得到$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n^C=M^C$. 所以我们就证明了$G\cap M^C$是非空的.

Baire 定理 2 设$\{x_n(t)\}$是一个定义在拓扑空间X上的实值连续函数的序列. 假定在X的每一点 t 都存在有限极限:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=x(t).$$

则函数 x 的不连续点所成的集合是一个第一纲集.

证明 对于X的任何集合M, 我们用M^i 表示所有含于M内的开集的并集; M^i 就叫做M的内部.

令$P_m(\varepsilon)=\{t\in X; |x(t)-x_m(t)|\leqq\varepsilon, \varepsilon>0\}, G(\varepsilon)=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} P_m^i(\varepsilon)$. 于是我们可以证明$C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G(1/n)$同$x(t)$的所有连续点组成的集合重合. 假定$x(t)$在$t=t_0$点是连续的. 我们将要证明 $t_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G(1/n)$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$, 所以存在某个 m 使得$|x(t_0)-x_m(t_0)|\leqq\varepsilon/3$. 由$x(t)$和$x_m(t)$在 $t=t_0$ 点的连续性可知, 存在某个开集 $U_{t_0}\ni t_0$ 使得, 当 $t\in U_{t_0}$时, $|x(t)-x(t_0)|\leqq\varepsilon/3$, $|x_m(t)-x_m(t_0)|\leqq\varepsilon/3$. 于是由 $t\in U_{t_0}$ 可得

$$|x(t)-x_m(t)|\leqq|x(t)-x(t_0)|+|x(t_0)-x_m(t_0)|+|x_m(t_0)-x_m(t)|<\varepsilon,$$

这表明 $t_0\in P_m^i(\varepsilon)$, 从而 $t_0\in G(\varepsilon)$. 因为 $\varepsilon>0$ 是任意的, 所以必定有 $t_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G(1/n)$.

反之, 设 $t_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G(1/n)$. 于是对任意的 $\varepsilon>0$, 有 $t_0\in G(\varepsilon/3)$, 从而存在某个 m 使得$t_0\in P_m^i(\varepsilon/3)$. 因此存在某个开集$U_{t_0}\ni t_0$ 使得, 当 $t\in U_{t_0}$时, $|x(t)-x_m(t)|\leqq\varepsilon/3$. 于是由 $x_m(t)$ 的连续性和 $\varepsilon>0$ 的任意性可知, $x(t)$必在 $t=t_0$ 点连续.

在作了这些准备工作之后, 我们令

$$F_m(\varepsilon)=\{t\in X; |x_m(t)-x_{m+k}(t)|\leqq\varepsilon\ \ (k=1, 2, \cdots)\}.$$

由$x_n(t)$的连续性可知, 它是一个闭集. 由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$, 所以有$X=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m(\varepsilon)$. 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$还可得出$F_m(\varepsilon)\subseteqq P_m(\varepsilon)$. 因此, $F_m^i(\varepsilon)\subseteqq P_m^i(\varepsilon)$, 从而$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m^i(\varepsilon)\subseteqq G(\varepsilon)$. 另一方面, 对于任何闭集$F$, $(F-F^i)$是一个稀疏闭集. 于是$X-\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m^i(\varepsilon)=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(F_m(\varepsilon)-F_m^i(\varepsilon))$是一个第一纲集. 因而它的子集$G(\varepsilon)^C=X-G(\varepsilon)$也是一个第一纲集. 所以函数$x(t)$的一切不连续点所成的集合是一个第一纲集, 因为它可表为$X-\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G(1/n)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G(1/n)^C$.

定理 完备度量空间X的某子集M是相对紧的, 当且仅当M在这种意义下是完全有界的: 对于每个 $\varepsilon>0$, M中都存在有限个点 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 使得M的每个点m到 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的距离至

少有一个小于 ε. 换句话说, M 是完全有界的, 如果对于每个 $\varepsilon>0$, M 都可以被有限个其球心 $\in M$ 而半径 $<\varepsilon$ 的球所覆盖.

证明 假定 M 不是完全有界的. 于是存在一个正数 ε 以及由 M 的点组成的无限序列 $\{m_n\}$ 使得, 当 $i\neq j$ 时, 有 $d(m_i, m_j)\geqq\varepsilon$. 这时, 如果我们用半径 $<\varepsilon$ 的开球系覆盖紧集 M^a, 则此开球系没有能覆盖 M^a 的有限子系. 这是因为, 这种子系不可能覆盖无限子集 $\{m_n\}\subseteq M\subseteq M^a$. 因此, X 的相对紧子集必定是完全有界的.

反之, 假定 M 是完备度量空间 X 的一个子集且是完全有界的. 于是闭包 M^a 是完备的, 并且它同 M 一样也是完全有界的. 我们需证 M^a 是紧集. 为此目的, 我们先来证明, M^a 的任何一个无限序列 $\{p_n\}$ 总含有收敛于 M^a 的点的子序列 $\{p_{(n)'}\}$. 由 M 的完全有界性可知, 对任何一个 $\varepsilon>0$, 总存在某个点 $q_\varepsilon\in M^a$ 以及 $\{p_n\}$ 的某个子序列 $\{p_{n'}\}$ 使得, 当 $n=1, 2, \cdots$ 时, 有 $d(p_{n'}, q_\varepsilon)<\varepsilon/2$; 因此, 当 $n, m=1, 2, \cdots$ 时, 有 $d(p_{n'}, p_{m'})\leqq d(p_{n'}, q_\varepsilon)+d(q_\varepsilon, p_{m'})<\varepsilon$. 我们令 $\varepsilon=1$ 并作出该序列 $\{p_{n'}\}$, 然后根据同前面一样的考虑, 对于序列 $\{p_{n'}\}$, 令 $\varepsilon=1/2$. 于是我们得到 $\{p_{n'}\}$ 的一个子序列 $\{p_{n''}\}$ 使得有

$$d(p_{n'}, p_{m'})<1, \quad d(p_{n''}, p_{m''})<1/2 \quad (n, m=1, 2, \cdots).$$

重复此过程, 我们就得到序列 $\{p_{n^{(k)}}\}$ 的一个子序列 $\{p_{n^{(k+1)}}\}$ 使得

$$d(p_{n^{(k+1)}}, p_{m^{(k+1)}})<1/2^k \quad (n, m=1, 2, \cdots).$$

因此, 由原序列 $\{p_n\}$ 按对角线方法选出的子序列 $\{p_{(n)'}\}$:

$$p_{(n)'}=p_{n^{(n)}}$$

必定满足 $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(p_{(n)'}, p_{(m)'})=0$. 于是由 M^a 的完备性可知, 必定存在一点 $p\in M^a$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} d(p_{(n)'}, p)=0$.

下面我们要证明集合 M^a 是紧的. 我们指出, 存在 X 的某些开集 F 组成的一个可数族 $\{F\}$ 使得, 当 U 是 X 的任一开集而 $x\in U\cap M^a$ 时, 则存在某个集合 $F\in\{F\}$, 对于它, 有 $x\in F\subseteq U$. 这个事实可以证明如下. 因为 M^a 是完全有界的, 所以对任何一个 $\varepsilon>0$, M^a 都可以被半径为 ε 而球心 $\in M$ 的有限个开球组成的系所覆盖. 令 $\varepsilon=1, 1/2, 1/3, \cdots$ 并把相应的那些有限开球系汇总成一个可数族, 于是我们就得到了所需要的开集族 $\{F\}$.

现在设 $\{U\}$ 是 M^a 的任何一个开覆盖. 令 $\{F^*\}$ 是族 $\{F\}$ 按下述方式确定的子族: $F\in\{F^*\}$, 当且仅当 $F\in\{F\}$ 且存在某个 $U\in\{U\}$ 使得 $F\subseteq U$. 根据 $\{F\}$ 的性质以及 $\{U\}$ 覆盖了 M^a 这一事实, 我们看出, 该可数开集族 $\{F^*\}$ 覆盖了 M^a. 现在设 $\{U^*\}$ 是从 $\{U\}$ 这样得到的一个子族, 即对于每个 $F\in\{F^*\}$, 我们在 $\{U\}$ 中只选取一个使 $F\subseteq U$ 成立的 U. 于是 $\{U^*\}$ 是一个覆盖了 M^a 的可数开集族. 我们需要证明 $\{U^*\}$ 的某个有限子族能覆盖 M^a. 把 $\{U^*\}$ 中的集合赋予足标后, 记为 $U_1, U_2, \cdots$. 假定对于每个 n, 有限并集 $\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_j$ 都不能覆盖 M^a. 于是存在点 $x_n\in\left(M^a-\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k\right)$. 由前面已证明过的事实可知, 序列 $\{x_n\}$ 含有子序列 $\{x_{(n)'}\}$, 它收敛于 M^a 的某一点, 譬如说 x_∞. 因此, 对于某个足标 N, 有 $x_\infty\in U_N$, 从而对于无穷多个数值 n, 有 $x_n\in U_N$, 特别地, 对于某一个 $n>N$, 有

$x_n \in U_N$. 这与选出的 x_n 要遵从 $x_n \in \left(M^a - \bigcup_{k=1}^{n} U_k\right)$ 这一事实相矛盾。于是我们就证明了 M^a 是紧集.

§3. 测度空间

测　度

定义 设 S 是一个集合. 如果 S 的某子集族 $\mathfrak{B}$ 满足

$$S \in \mathfrak{B} \tag{1}$$

$$B \in \mathfrak{B} \text{ 就有 } B^C = (S-B) \in \mathfrak{B}, \tag{2}$$

$$B_j \in \mathfrak{B}\,(j=1,2,\cdots) \text{就有} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathfrak{B} \quad (\sigma\text{-可加性}) \tag{3}$$

则把 $(S, \mathfrak{B})$ 叫做 S 的那些属于 $\mathfrak{B}$ 的子集所成的 σ-环或 σ-可加族. $(S, \mathfrak{B}, m)$ 叫做一个测度空间,如果 m 是定义在 $\mathfrak{B}$ 上的一个非负且 σ-可加的测度:

$$\text{对每一个 } B \in \mathfrak{B} \text{ 都有 } m(B) \geqq 0, \tag{4}$$

对 $\mathfrak{B}$ 的集合组成的任何不相交的序列 $\{B_j\}$ 都有

$$m\left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(B_j) \qquad (m\text{的可数可加性或}m\text{的 }\sigma\text{-可加性}), \tag{5}$$

S 可以表示为可数个集合 $B_j \in \mathfrak{B}$ 的并集,而这里

$$m(B_j) < \infty \quad (j=1,2,\cdots) \qquad (\text{测度空间}(S,\mathfrak{B},m)\text{的 }\sigma\text{-有限性}). \tag{6}$$

此数值 $m(B)$ 叫做集合 B 的 m-测度.

可 测 函 数

定义 设 $x(s)$ 是定义在 S 上的一个实(或复)值函数. 如果它满足下述条件:

对于实轴 R^1 (或复平面 C^1) 上的任何开集 G, 集合 $\{s; x(s) \in G\}$ 都属于 $\mathfrak{B}$, (7)

则称 $x(s)$ 是 $\mathfrak{B}$-可测的,或简称为可测的. 这里,允许 $x(s)$ 取值 ∞.

定义 与 S 的点 s 有关的某性质 P 叫做 m-几乎处处成立或简称为 m-a.e. 成立, 如果除去某些点 s 外, P 在 S 上处处成立,而那些例外的点 s 所组成的集合 $\in \mathfrak{B}$ 且其 m-测度为 0.

一个 m-a.e. 定义在 S 上且满足条件(7)的实(或复)值函数 $x(s)$ 就叫做 m-a.e. 定义在 S 上的 $\mathfrak{B}$-可测函数或简称为 $\mathfrak{B}$-可测函数.

Egorov 定理 设 B 是一个 $\mathfrak{B}$-可测集且 $m(B) < \infty$。又如果在 B 上 m-a.e. 有限的 $\mathfrak{B}$-可测函数组成的序列 $\{f_n(s)\}$ 在 B 上 m-a.e. 收敛于某个有限的 $\mathfrak{B}$-可测函数 $f(s)$, 则对于每个 $\varepsilon > 0$ 都存在 B 的一个子集 E 使得, $m(B-E) \leqq \varepsilon$ 且在 E 上 $f_n(s)$ 一致收敛于 $f(s)$.

证明 如果需要的话,就从 B 中挖去一个 m-测度为 0 的集合, 于是我们总可以假定在 B 上