全国高等教育自学考试配套练习丛书

# 高等数学(二)

GAODENG SHUXUE (II)

钱晓明
罗万钧 主编

上海财经大学出版社

全国高等教育自学考试配套练习丛书

# 高等数学（二）

钱晓明
罗万钧　主编



上海财经大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学.2/钱晓明,罗万钧主编.—上海:上海财经大学出版社,2000.6
(全国高等教育自学考试配套练习丛书)
ISBN 7-81049-438-4/O·10

Ⅰ.高… Ⅱ.①钱… ②罗… Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 24424 号

□特约编辑 李炳钊
□责任编辑 王联合
□封面设计 周卫民

GAODENG SHUXUE(Ⅱ)
高等数学(二)

钱晓明 罗万钧 主编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市中山北一路 369 号 邮编 200083)
http://www.sufep.com
全国新华书店经销
上海崇明晨光印刷厂印刷装订
2000 年 7 月第 1 版 2000 年 7 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32 14.5 印张 363 千字
印数:0 001—6 000 定价:20.00 元

# 前　言

环顾当今世界，科学技术突飞猛进，知识经济已见端倪。教育在综合国力的形成中处于基础地位，国力的强弱越来越取决于劳动者的素质，取决于各类人才的质量和数量，这对于培养和造就我国21世纪的一代新人提出了更加迫切的要求。自学考试、自学成才为我国提高国民素质、人才成长开拓了广阔的道路。随着社会对人才素质要求的不断提高，参加全国高等教育自学考试尤其是经济管理类专业的考生越来越多。

《高等数学（二）》作为经济管理类本科专业学历规定的一门必修课，受到越来越多考生的重视。对于广大考生来说，他们最关心的问题是如何按照考试大纲的要求和考核目标，学习并有效地掌握大纲所规定的内容，了解这些内容在广度和深度上的具体要求，同时，也要熟悉自学考试试卷中的各种题型及解法。

然而，自学考试有其特殊性。由于大多数考生是利用业余时间自学的，虽然社会助学的形式受到普通欢迎，但教师在课堂中讲授的时间毕竟有限，解题训练较少，不少考生往往感到难以准确地把握教材中的重点与难点，从而影响学习的效果和考试的合格率。为了便于考生自学和社会助学，我们严格按照《高等数学（二）自学考试大纲》的要求及教材内容，对历年试卷收编整理，并结合从事多年教学与自学考试辅导的体会和经验，编写这本自学辅导书，以帮助考生加深对教材内容的学习、理解与消化，在掌握基本概念、基本理论和基本运算的基础上，熟练掌握解题技巧，增强应试能

力，达到事半功倍的学习效果。

在编写过程中，力求紧扣考试大纲、内容简明扼要、深入浅出、突出重点；解题思路清晰、逻辑严密、技巧性强。

为了便于自学，本书的编写顺序与《高等数学(二)》教材一致。按大纲要求，本书包含了《线性代数》和《概率统计》两大部分。其中《线性代数》有五章，《概率统计》有九章。每一章由三部分组成：主要内容，典型例题分析和练习题。书后附有参考答案与提示，并录入历年自学考试试卷与参考答案。

参加本书编写的有钱晓明、罗万钧、方能文、潘群，最后由钱晓明、罗万钧统纂定稿。

在本书编写过程中，编者得到了上海财经大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示衷心感谢。

虽然我们尽了很大努力，希望能写出一本质量较高、适合考生需要的自学辅导书，但由于水平有限和时间仓促，书中还会存在这样或那样的缺点与不足，敬请读者不吝指正，我们将万分感谢。

编者

2000年元月

# 第一篇　线性代数

## 第一章　行列式

### 一、主要内容

#### （一）行列式定义

1. 二阶行列式与三阶行列式

为了简化二元线性方程组与三元线性方程组的解的形式，我们引进二阶行列式与三阶行列式.

**定义**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

称为二阶行列式.

二阶行列式含有两行、两列共4个元素. 各元素足标的二个数字中前者表示行，后者表示列. 例如，$a_{21}$是表示行列式第二行第一列的元素. $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为二阶行列式的展开式. 当行列式中的元素都是数时，展开式的结果也是个数，称为行列式的值. 二阶行列式值的计算按对角线法则进行（从左上角到右下角的对角线称为主对角线，用实线表示；从右上角到左下角的对角线称为次对角线，用虚线表示）. 主对角线上两个元素的乘积减去次对角线上两

个元素的乘积，或者说主对角线上两个元素乘积前取正号，次对角线上两个元素乘积取负号.

类似地，可定义三阶行列式为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式含有三行三列共九个元素，其中 $a_{ij}$ 表示第 $i$ 行第 $j$ 列的元素，$i$、$j$ 称为足标，$i$ 为行标，$j$ 为列标. 等式的右边为三阶行列式的展开式，当元素 $a_{ij}$ 均为数时，展开式的结果也是一个数，称为行列式的值. 展开式似乎很复杂，实质上与二阶行列式的展开式类似，也符合对角线法则.

把行列式的第一、二列重复写在行列式的右边：

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(左上角到右下角的用实线连接)} \\ \\ \text{(右上角到左下角的用虚线连接)} \end{matrix}$$

实对角线上三个元素乘积取正号，虚对角线上三个元素乘积取负号，把这六个(3！个)乘积相加，即得三阶行列式的展开式.

**注意** 对于更高阶的行列式展开式不满足上述对角线法则. 为了引进 $n$ 阶行列式的定义，我们给出三阶行列式的另一个定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

容易验证它与前面的三阶行列式有相同的展开式. 这种展开形式称为按第一行展开. 同样也可以按第一列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

其中$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$称为 $a_{11}$ 的余子式，它是由三阶行列式划去 $a_{11}$ 所在的行（第 1 行）及所在的列（第 1 列）而得到的；同样地，$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$称为 $a_{21}$ 的余子式，它是由三阶行列式划去 $a_{21}$ 所在的第 2 行及所在的第 1 列而得到的，$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$称为 $a_{31}$ 的余子式. 当然，也可以按第 2、3 行展开或第 2、3 列展开. 但必须注意右边展开式中各式的"＋"、"－"号，诚然，它们有其规律性.

2. $n$ 阶行列式及其展开

(1)余子式和代数余子式

由 $n$ 行 $n$ 列(共 $n^2$ 个)元素组成，两边加符号|　|(不是绝对值)，形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称它为 $n$ 阶行列式. 记为$|\mathbf{A}|$.

在 $n$ 阶行列式$|\mathbf{A}|$中，划去第 $i$ 行第 $j$ 列后剩下的$(n-1)$行$(n-1)$列元素后构成$(n-1)$阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

称它为元素 $a_{ij}$ **的余子式**，记为 $M_{ij}$. 对 $M_{ij}$ 乘以 $(-1)^{i+j}$，则称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 $a_{ij}$ **的代数余子式**.

(2) $n$ 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的展开

特别地，一阶行列式 $|\boldsymbol{A}|=|a_{11}|=a_{11}$.

**注意**　一阶行列式与绝对值符号的区别，一阶行列式 $|a_{11}|$ 等于元素 $a_{11}$ 本身.

假定我们对 $(n-1)$ 阶行列式已经定义，则 $n$ 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 1 列展开式为：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\boldsymbol{A}_{11}+a_{21}\boldsymbol{A}_{21}+\cdots a_{n1}\boldsymbol{A}_{n1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}.$$

按第 1 行展开式为：

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}\boldsymbol{A}_{11}+a_{12}\boldsymbol{A}_{12}+\cdots a_{1n}\boldsymbol{A}_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}.$$

事实上，在计算行列式时，我们根据行列式的具体情况，可按

任一行(列)来展开,而不必限于对第一行(列)展开.

**定理** 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 而行列式$|\boldsymbol{A}|$任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即有

$$\sum_{l=1}^{n} a_{li}\boldsymbol{A}_{lj}=|\boldsymbol{A}|\delta_{ij}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, \text{当 } i=j, \\ 0, \quad \text{当 } i\neq j.\end{cases} \quad (\text{按列展开})$$

或

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il}\boldsymbol{A}_{jl}=|\boldsymbol{A}|\delta_{ij}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, \text{当 } i=j, \\ 0, \quad \text{当 } i\neq j.\end{cases} \quad (\text{按行展开})$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, \text{当 } i=j, \\ 0, \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

**(二)行列式的性质**

设$|\boldsymbol{A}|$是一个$n$阶行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若把$|\boldsymbol{A}|$的行依次改为列、列改为行,所得的新行列式

$$|\boldsymbol{A}'|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为$|\boldsymbol{A}|$的转置行列式(有时也记为$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$).

**性质 1** 行列式转置后的值不变,即

$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}'|$.

**推论** 任一行列式$|\boldsymbol{A}|$按行展开与按列展开是等价的.

性质 1 表明，许多行列式的性质如果对列成立，则对行也成立；反过来若对行成立，则对列也成立.

**性质 2** 用某个常数 $k$ 乘以行列式的某一行(或某一列)，得到的行列式的值是原行列式值的 $k$ 倍. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**推论 1** 若行列式的某一行(或某一列)的元素全为零，则该行列式的值等于零.

**推论 2** 若行列式的某一行(或某一列)有公因子 $c$，则这个 $c$ 可提取到外面来.

**性质 3** 互换行列式的两行(或两列)，则行列式的值改变符号.(第 $i$ 行与第 $j$ 行互换，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；第 $i$ 列与第 $j$ 列互换，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$)，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i \leftrightarrow r_j} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**推论** 若行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 有两行(或两列)元素相同，则行列式的值等于零.

**性质 4** 若行列式的某两行(或某两列)成比例，则行列式的值等于零.

**性质 5** 若行列式中某一行(或某一列)的元素 $a_{ij}$ 都可分解为

两元素 $b_{ij}$ 与 $c_{ij}$ 之和. 即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$，则该行列式可分解为相应的两个行列式之和，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**性质 6** 把行列式的某一行(或某一列)元素都乘以一个因子加到另一行(或另一列)上去，行列式的值不变. 即

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (k) \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\xlongequal{kr_i+r_j}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(注：上式表示第 $i$ 行的每个元素乘以 $k$ 后分别加到第 $j$ 行的对应元素上去，用 $kr_i+r_j$ 表示；这里第 $i$ 行的元素不能改变！)

当 $k$ 为负数时，性质 6 也可叙述为：行列式的某一行（或某一列）减去另一行（或另一列）的若干倍后，值仍不变.

## （三）克莱姆法则

**克莱姆法则** 若 $n$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则该方程组有且仅有唯一解

$$x_j=\frac{|\boldsymbol{A}_j|}{|\boldsymbol{A}|} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

其中 $|\boldsymbol{A}|$ 为系数行列式：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

而 $|\boldsymbol{A}_j|$ 为 $|\boldsymbol{A}|$ 中去掉第 $j$ 列换上由方程组右边的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 组成的列而成的行列式：

$$|\boldsymbol{A}_j|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**注意** 运用克莱姆法则解线性方程组时有两个条件：一个方程的个数与未知量的个数必须相等；二是系数行列式不等于零.

常数项全为零的线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\
\qquad\qquad\cdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0
\end{cases}
$$

称为齐次线性方程组，它至少有一个零解 $x_j=0(j=1,2,\cdots,n)$.

**推论 1** 若齐次线性方程组的系数行列式$|\boldsymbol{A}|\neq0$，则该齐次线性方程组只有零解.

（根据第三章的知识，其实对于由 $n$ 个方程组成的 $n$ 元齐次线性方程组只有零解的充分必要条件是它的系数行列式$|\boldsymbol{A}|\neq0$.）

**推论 2** 若 $n$ 个方程、$n$ 个未知量的齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式一定等于零.

## 二、典型例题分析

**例 1** 计算行列式

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0\\
a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{vmatrix}.
$$

**解** 该行列式的特点是次（副）对角线以下的元素全为零，尽管如此，也不能简单地把 $D$ 的值写成次对角线上各元素的乘积，必须考虑它的符号，其符号与行列式 $D$ 的阶数有关.

为方便起见，不妨将行列式按最后一列展开，于是

$$D=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}a_{1n}(-1)^{1+n-1}a_{2,n-1}$$

$$\times\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}a_{1n}(-1)^{1+n-1}a_{2,n-1}\cdots(-1)^{1+2}a_{n-1,2}$$

$$(-1)^{1+1}a_{n1}$$

$$=(-1)^{2+3+\cdots+n+(n+1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

这里的 $2+3+\cdots+n+(n+1)$ 是等差数列，其和为 $\frac{n(n+3)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}+2n$，而 $2n$ 为偶数，所以 $(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. 由此可知，当 $n=4k$ 或 $4k+1(k=0,1,2,\cdots)$（即 $n$ 为 4 的倍数或为 4 的倍数加 1）时，$D$ 的值为次对角线各元素乘积，否则 $D$ 的值为次对角线元素乘积的相反数（各元素乘积前加“－”号）. 这个结果可作为公式运用.

例如 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_6 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_7 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7$；

又如 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -8 & \cdots & b & c \\ 9 & d & \cdots & e & f \end{vmatrix} = 1\times(-2)\times3\times(-4)\cdots(-8)\times9=9!.$

**例 2** $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}>0$ 的充要条件是什么?

**解** 本题实质上要计算行列式的值,而第二行零元素有两个,按第二行展开计算方便,于是

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\times4\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix}=4(a^2-4).$$

因此 $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}>0$ 的充要条件是 $a^2-4>0$ ,即 $|a|>2$ .

**例 3** 设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$是直角坐标上的两个不同的点,问 $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$ 是否过 $P$,$Q$ 两点的直线方程?

**解** 要验证直线方程是否过 $P$,$Q$ 两点,只须验证这两点的坐标$(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$是否满足方程.

将$(x_1,y_1)$与$(x_2,y_2)$分别代入方程左边的$(x,y)$,则有第一行与第二行(第三行)的元素全相同. 由行列式性质可知,行列式为 0,即点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$在直线上. 所以 $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$ 是过 $P$,$Q$ 两点的直线方程.

**例 4** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & x^2 & x \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$是关于 $x$ 的二次多项式，求此式中的二次项系数.

**解** 此式中二次项的系数是行列式中第二项第二列元素 $x^2$ 的代数余子式，即

$$(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=11.$$

**例 5** 已知 $x$ 的二次多项式

$$|D|=\begin{vmatrix} x & -3 & x^2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

求此多项式的根.

**解** 行列式第二、三、四行的元素之和为零；第二、三、四列都加到第一列上去：

$$|D|=\begin{vmatrix} x^2+x-2 & -3 & x^2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(x^2+x-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

所以 $x_1=-2, x_2=1$.

**例 6** 解下列方程：